UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

LISBOA

UNIVERSIDADE
DE LISBOA

A CALCULADORA GRÁFICA NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES NO ENSINO SECUNDÁRIO

Maria Madalena Correia Consciência

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO

(Didática da Matemática)

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE DE LISBOA

A CALCULADORA GRÁFICA NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES NO ENSINO SECUNDÁRIO

Maria Madalena Correia Consciência

Tese orientada pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor em Educação (Didática da Matemática)

2013

Apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, com a atribuição de uma bolsa de doutoramento (SFRH / BD / 43728 / 2008)

Apoio do Ministério da Educação e Ciência, com a atribuição de equiparação a bolseiro.

Resumo

Este estudo tem como principal objetivo compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário e qual o papel que esse instrumento desempenha na aprendizagem das funções.

O quadro teórico incide na abordagem instrumental, dando especial atenção ao processo de génese instrumental relativo à calculadora gráfica; no papel das múltiplas representações na aprendizagem das funções; e no desenvolvimento do *conceito imagem* de função.

A metodologia do estudo insere-se no paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa, na modalidade de estudo de caso. A recolha de dados realizou-se em dois anos letivos consecutivos, acompanhando os alunos no décimo e décimo primeiro anos, e envolveu a observação de aulas, entrevistas clínicas aos alunos e recolha de documentos produzidos por estes e pela professora da turma. A análise de dados foi moldada pelo enquadramento teórico e pelos dados empíricos recolhidos, sendo realizados dois estudos de caso.

Os resultados sugerem que o processo de génese instrumental é demorado, tal como é referido na literatura, sendo influenciado por vários fatores, nomeadamente os esquemas de utilização que são desenvolvidos e valorizados na sala de aula, o tipo de funções e as situações matemáticas em que os alunos se envolvem, os conhecimentos matemáticos que possuem e o seu próprio perfil de trabalho. No final do décimo primeiro ano, os alunos têm ainda alguma dificuldade em compreender e interpretar determinadas limitações da calculadora gráfica, em particular no que diz respeito à representação gráfica, sendo o estabelecimento de conexões entre representações essencial para evitar interpretações precipitadas.

O acesso rápido à representação gráfica facilitado pela calculadora promove o desenvolvimento de uma visão estrutural do conceito de função, incentiva a exploração de situações problemáticas e contribui para uma maior flexibilidade em termos das estratégias de resolução de problemas.

Palavras-chave: Calculadora gráfica, génese instrumental, representações, funções, aprendizagem, ensino secundário.

Abstract

The main goal of this study is to understand how students incorporate the graphic calculator in their mathematical activity, during the first two years of the secondary education, and also to understand the role of that instrument in the learning of functions.

The theoretical framework focuses on the instrumental approach, paying particular attention to the process of instrumental genesis of the graphic calculator; on the role of multiple representations in the learning of functions; and in the development of the *concept image* of function.

The methodology of the study is within the interpretive paradigm, following a qualitative approach in the form of case study. Data collection took place in two consecutive academic years, with students in the tenth and eleventh grades, and was accomplished by classroom observation, clinical interviews with the students and collection of some documents produced by these and by the classroom teacher. The data analysis was shaped by the theoretical framework and the empirical data collected, being conducted two case studies.

The results suggest that the process of instrumental genesis takes time, as reported in the literature, being influenced by many factors, including the utilization schemes that are developed and valued in the classroom, the type of functions and mathematical situations in which students engage themselves, their mathematical knowledge and work profile. At the end of the eleventh grade, the students still have some difficulties in understanding and interpreting certain graphic calculator's limitations, particularly as regards to the graphic representation, being essential that they establish connections among representations to avoid hasty interpretations.

The rapid access to the graphic representation, enabled by the graphic calculator, promotes the development of a structural view of the function concept, encourages the exploration of problematic situations and contributes to a greater flexibility in terms of the strategies in problem solving.

Keywords: Graphic calculator, instrumental genesis; representations; functions; learning, secondary education.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Oliveira, um agradecimento especial, pela sua inesgotável disponibilidade, pelos seus conselhos e sugestões, e acima de tudo pela sua amizade.

Aos professores da parte curricular deste doutoramento, pelos desafios que nos foram colocando, e a todos os que, posteriormente, contribuíram com críticas e sugestões para este estudo em particular.

À professora que permitiu que a recolha de dados fosse possível.

Aos alunos da turma, e, em particular, aos quatro alunos que se disponibilizaram para ser participantes nesta investigação, mesmo fora do seu horário escolar.

Ao meu marido e aos meus filhos pelo apoio e incentivo, imprescindíveis para eu conseguir concluir esta tese de doutoramento.

À minha colega de doutoramento, Sandra Quintas, pela sua amizade, apoio, estímulo e pareceres acerca do trabalho.

Aos restantes colegas de doutoramento pela ajuda, convívio, e encorajamento.

Aos colegas da minha escola, pelo incentivo e encorajamento.

Cântico de Consciência

Olho daqui o mundo e o ponto negro
Que sou na sua crosta esbranquiçada,
E não perco a coragem da jornada,
Nem me iludo.
Numa esfera animada
Rola tudo,
E tudo chega ao fim da sua estrada.

Miguel Torga

Índice

Capítulo 1 – Introdução ... 1

1.1. Motivação e pertinência do estudo ... 1
1.2. Problema e questões de investigação ... 8

Capítulo 2 – Abordagem instrumental ... 13

2.1. Principais influências da abordagem instrumental ... 14
2.1.1. Vygotsky e a psicologia histórico-cultural ... 14
2.1.2. Teoria da atividade ... 19
2.1.3. Noção de esquema ... 24

2.2. Esquemas de utilização ... 27
2.3. Definição psicológica de instrumento ... 31
2.4. Génese instrumental ... 34
2.5. O processo da génese instrumental e a didática da matemática ... 39
2.5.1. A complexidade da génese instrumental ... 41
2.5.2. Orquestração instrumental ... 49

Capítulo 3 – Funções e representações ... 59

3.1. Funções ... 59
3.1.1. Evolução do conceito de função ... 59
3.1.2. Teorias sobre conceções dos alunos acerca do conceito de função ... 63
3.1.2.1. Conceito imagem e conceito definição em matemática ... 64
3.1.2.2. Teoria da reificação de Sfard ... 67
3.1.2.3. Teoria do procept ... 69
3.1.2.4. Abordagem orientada pelas propriedades ... 73

3.2. Representações ... 77
3.2.1. Teoria das representações segundo Goldin ... 78
3.2.1.1. Sistemas de representação ... 78
3.2.1.2. Componentes primitivos, configurações e estruturas ... 79
3.2.1.3. Representações externas e internas ... 80
3.2.1.4. Sistemas de representação internos ... 81
3.2.1.5. Estádios de desenvolvimento ... 85
3.2.1.6. Representação, padrões, comunicação e ambiguidade ... 87
3.2.2. Representações semióticas mobilizadas nos processos matemáticos segundo Duval ... 89
3.2.2.1. Classificação dos registos que podem ser mobilizados na atividade matemática ... 90
3.2.2.2. Transformações das representações semióticas ... 91

3.3. Múltiplas representações ... 94
3.3.1. O papel das múltiplas representações no ensino e aprendizagem ... 94
3.3.2. O papel das múltiplas representações na aprendizagem do conceito de função ... 98

Capítulo 4 – Calculadora gráfica, funções e múltiplas representações ... 107

4.1. Potencialidades e constrangimentos da calculadora gráfica no âmbito do trabalho com as funções 107
4.1.1. Precisão numérica 108
4.1.2. Modo de representação do gráfico de uma função 109
4.1.3. Exploração dos vários *zooms* 116
4.1.4. Representação gráfica de famílias de funções e visualização de várias representações em simultâneo 120
4.2. Aprendizagem das funções e a calculadora gráfica 121
4.3. Modos de utilização da calculadora gráfica 132

Capítulo 5 – Metodologia 139

5.1. Opções metodológicas gerais 139
5.1.1. Paradigma da investigação e abordagem do estudo 139
5.1.2. Modalidade do estudo 141
5.2. Participantes 142
5.2.1. A professora 143
5.2.2. A turma 144
5.2.3. Os alunos 145
5.3. Opções metodológicas instrumentais 147
5.3.1. Observação participante 147
5.3.2. Entrevistas 157
5.3.3. Tarefas a propor nas entrevistas 162
5.3.3.1. Tarefas para o 10.º ano 163
5.3.3.2. Tarefas para o 11.º ano 164
5.3.4. Recolha documental 165
5.4. Análise de dados 165

Capítulo 6 – Contexto de aprendizagem 171

6.1. As primeiras aulas com a calculadora gráfica 171
6.1.1. Identificação de algumas teclas; Introdução da expressão analítica de uma função no editor de funções; Janela de visualização; Cálculo de imagens 171
6.1.2. Resolução gráfica de condições 185
6.1.3. Menu tabela 192
6.1.4. Refinamento do esquema de utilização para resolução gráfica de condições 193
6.1.5. Determinação de extremos relativos 197
6.1.6. Normas relativas à utilização da calculadora 201
6.2. Exploração de algumas tarefas ou tópicos abordados na sala de aula 203
6.2.1. Investigações com a função afim 203
6.2.2. Investigando a função módulo 208
6.2.3. Uma tarefa sobre transformações de funções 215
6.2.4. Breve abordagem às funções trigonométricas 224
6.2.5. Primeira abordagem ao tópico "Funções Racionais" 229
6.2.6. Estudo da família de funções $y=b+\frac{a}{x-c}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}; b,c\in\mathbb{R}$ 235

Capítulo 7 – Estudo de caso Diogo 247

7.1. Apresentação 247
7.2. Conceito de função no final do ensino básico 249
7.3. Esquemas de utilização desenvolvidos pelo aluno ao longo do 10.º e 11.º anos 259
7.3.1. Esquemas de introdução da expressão analítica no editor de funções ... 260
7.3.2. Esquemas de enquadramento 264
7.3.3. Esquemas de resolução de equações e inequações 270
7.3.4. Esquemas de determinação de pontos notáveis do gráfico de uma função 274
7.3.5. Esquemas de determinação da derivada de uma função num ponto 282
7.3.6. Síntese 284
7.4. Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada 285
7.4.1. Representação gráfica de uma função 285
7.4.2. Confirmação gráfica de resultados obtidos analiticamente 286
7.4.3. Situações matemáticas que o aluno não consegue resolver analiticamente 291
7.4.4. Instrumento facilitador de certos procedimentos 295
7.4.5. Exploração de situações problemáticas 298
7.4.6. Síntese 304
7.5. Aprendizagem do conceito de função e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno 305
7.5.1. Reconhecimento e identificação de funções 305
7.5.2. Transformações de funções 312
7.5.3. Conversão de representações 325
7.5.4. Fluência e flexibilidade representacional 342

Capítulo 8 – Estudo de caso Francisco 357

8.1. Apresentação 357
8.2. Conceito de função no final do ensino básico 359
8.3. Esquemas de utilização desenvolvidos pelo aluno ao longo do 10.º e 11.º anos 370
8.3.1. Esquemas de introdução da expressão analítica no editor de funções ... 370
8.3.2. Esquemas de enquadramento 378
8.3.3. Esquemas de resolução de equações e inequações 386
8.3.4. Esquemas de determinação de pontos notáveis do gráfico de uma função 391
8.3.5. Esquemas de utilização relativos à derivada de uma função 397
8.3.6. Síntese 401
8.4. Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada 402
8.4.1. Representação gráfica de uma função 402
8.4.2. Confirmação gráfica de resultados obtidos analiticamente 404
8.4.3. Situações matemáticas que o aluno não consegue resolver analiticamente 409
8.4.4. Instrumento facilitador de certos procedimentos 414
8.4.5. Exploração de situações problemáticas 417
8.4.6. Síntese 433
8.5. Aprendizagem do conceito de função e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno 434

8.5.1. Reconhecimento e identificação de funções 434
8.5.2. Transformações de funções 442
8.5.3. Conversão de representações 451
8.5.4. Fluência e flexibilidade representacional 470

Capítulo 9 – Discussão de resultados 483

9.1. Conceito de função no final do ensino básico 483
9.2. Principais esquemas de utilização desenvolvidos ao longo do 10.º e 11.º anos 485
9.3. Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada 494
9.4. Aprendizagem do conceito de função e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno 499
9.4.1. Reconhecimento e identificação de funções 499
9.4.2. Transformações de funções 501
9.4.3. Conversão de representações 502
9.4.4. Fluência e flexibilidade representacional 503

Capítulo 10 – Conclusões 507

10.1. Síntese do estudo 507
10.2. Conclusões do estudo 508
10.3. Reflexão final 519
10.3.1. Processo de génese instrumental 519
10.3.2. Reflexão pessoal 522

Referências 525

Anexos 537

Índice de figuras

Figura 1 – Ilustração do método instrumental Vygotskyano. 15
Figura 2 – Estrutura dos níveis da atividade. 23
Figura 3 – Estrutura de um sistema de atividade humana. 23
Figura 4 – Interação de dois sistemas de atividade como modelo mínimo para a terceira geração da teoria da atividade. 24
Figura 5 – Relação dialética entre conceito-em-ação e teorema-em-ação. 26
Figura 6 – Diagrama invariantes operatórios, conhecimento consciente explicitável, explícito e formalizado. 27
Figura 7 – Esquemas de utilização. 28
Figura 8 – Implementação dos esquemas de utilização de acordo com a particularidade das situações. 30
Figura 9 – Modelo IAS. 32
Figura 10 – Génese instrumental como combinação de dois processos. 35
Figura 11 – Diferentes zonas de valor funcional de um artefacto. 37
Figura 12 – Zona das escolhas didáticas. 38
Figura 13 – Cálculo num ambiente com calculadora gráfica. 42
Figura 14 – Tipologia dos diferentes comportamentos dos alunos. 44
Figura 15 – Níveis de atuação da orquestração instrumental. 50
Figura 16 – O aluno-*sherpa*, parte de uma orquestração instrumental. 52
Figura 17 – O "espelho de observação". 53
Figura 18 – Cenário de exploração didático. 56
Figura 19 – Modelo geral para a formação de conceitos. 67
Figura 20 – Desempenho de acordo com diferentes níveis de sofisticação do pensamento. 71
Figura 21 – Diferentes tipos de entidades mentais surgidas através da perceção, ação e reflexão. 72
Figura 22 – Componentes de uma visão de função orientada para o objeto. 76
Figura 23 – Taxonomia funcional das múltiplas representações. 95
Figura 24 – Representação gráfica da função indicada usando *zoom ZStandard*. 110
Figura 25 – Representação gráfica da função $y = x^3$ usando *zoom ZStandard* em modo *connected* e modo *dot*. 111
Figura 26 – Representação gráfica da função $y = \operatorname{sen} x$ na janela de visualização indicada. 111
Figura 27 – Representação obtida para valores de $x_{res} = 1; 3; 8$, respetivamente. 112

Figura 28 – Representação gráfica das funções $y = 2^x$ e $y = x^{10}$ obtida com *ZDecimal*. 114

Figura 29 – Representação gráfica da função $y = \text{sen}(60x)$ obtida com *ZDecimal*......115

Figura 30 – Janelas correspondentes aos *zooms ZStandard*, *ZDecimal* e *ZTrig*. 116

Figura 31 – Representação gráfica da função $y = -0.1x^2 + 12$ obtida com *ZSandard*, *Zoom In*, e *Zoom Out*, respetivamente. 117

Figura 32 - Representação da função $y = \sqrt{49 - x^2}$ obtida com *ZSquare* a partir de *ZStandard*. 117

Figura 33 – Questão relacionada com o efeito de escalas diferentes nos dois eixos....119

Figura 34 – Representações gráficas das funções $y = (x+3)^2$, $y = (x-0.5)^2$ e $y = (x-4.5)^2$ 120

Figura 35 – Visualização simultânea e dinâmica das representações gráfica e numérica (alteração na parte gráfica, ou numérica, respetivamente). 120

Figura 36 – Modos como a tecnologia afeta o ensino e aprendizagem da matemática. 122

Figura 37 – Conversões representacionais permitidas pela calculadora gráfica. 124

Figura 38 – Componentes da análise de dados. 166

Figura 39 – Modelo interativo da análise de dados. 167

Figura 40 – Exemplo de imagens projetadas a partir do Portal da Matemática A. 172

Figura 41 – Ecrã obtido pela Helena, depois de supostamente terminar os procedimentos. 194

Figura 42 – Representação gráfica projetada por meio do *view-screen*. 205

Figura 43 – Extrato da resolução da Tatiana (questão 1). 208

Figura 44 – Relação recordada pelo Diogo. 251

Figura 45 – Tratamento da expressão $2x - 3y = 4$ 251

Figura 46 – Representação gráfica da expressão $x = y$ 254

Figura 47 – Esboço da representação gráfica da função *f* (questão 4.3). 256

Figura 48 – Determinação da expressão algébrica da função *f* (questão 4.3). 256

Figura 49 – Expressão algébrica obtida para a função *g* (questão 4.3). 257

Figura 50 – Representação gráfica obtida pela professora (esquerda) e pelo par Diogo e Francisco (direita). 261

Figura 51 – Expressão obtida pelo Diogo (E3, questão 3.3). 263

Figura 52 – Representação gráfica obtida pelo Diogo para a função $d(t) = -5t^2 + 200$. 265

Figura 53 – Representação gráfica e janela de visualização obtidas pelo par Diogo e Francisco (ficha *O Concerto de Rock*). 267

Figura 54 – Representação gráfica da função $f(x)=\left|x^2+50x-104\right|$ (E3, questão 1.1). 269

Figura 55 – Resolução da questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas* pelo par Diogo e Francisco. 272

Figura 56 – Primeira abordagem à questão 5 (E8). 272

Figura 57 – Segunda abordagem à questão 5 (E8). 273

Figura 58 – Resolução da questão 4.2 do teste intermédio de 5 de maio de 2010. 278

Figura 59 – Resolução da questão 4.2 do teste de 25 de outubro de 2010. 282

Figura 60 – Representação gráfica da função *p* (E4, parte individual, questão 1.1). 286

Figura 61 – Resolução da questão 1.3 (E6). 287

Figura 62 – Resolução da questão 1.1 da ficha *Funções Racionais e Irracionais,* pelo par Diogo e Francisco. 288

Figura 63 – Resolução da questão 2.1, da ficha *Funções Trigonométricas*, pelo par Diogo e Francisco. 288

Figura 64 – Resolução da questão 2.1 da ficha Funções Racionais e Irracionais, pelo par Diogo e Francisco. 290

Figura 65 – Representação gráfica no papel (E3, questão 3.3). 292

Figura 66 – Resolução da questão 4 do teste de 25 de outubro de 2010. 293

Figura 67 – Primeira tentativa de resolução da questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas*, pelo par Diogo e Francisco. 294

Figura 68 – Resolução da questão 2.1 da ficha *Derivadas*, pelo par Diogo e Francisco. 295

Figura 69 – Resposta à questão 1.3 (E4, parte individual). 296

Figura 70 – Resposta à questão 1.4 (E6). 297

Figura 71 – Representação gráfica de dois elementos da família de funções $y=x^2+bx+1$, pelo par Diogo e Francisco. 300

Figura 72 – Representação algébrica da função *f* (E7, questão 1.3). 303

Figura 73 – Esboço feito no papel relativo à representação gráfica da expressão iii) (E8, questão 1). 308

Figura 74 – Resolução da questão 5.1 do teste de 5 de março 2010. 313

Figura 75 – Resolução da questão 1.1 (E7). 316

Figura 76 – Resolução da questão 1.6, segunda parte, ficha de avaliação de 28 fevereiro 2011. 319

Figura 77 – Representação gráfica das funções *f* e *g* (E5, questão 2.1). 320

Figura 78 – Resolução da questão 1.3 (E5). 321

Figura 79 – Resolução da questão 2, do grupo II, do teste intermédio de 5 de maio 2010. 326

Figura 80 – Resolução da questão 2, da segunda parte, do teste de 5 de março de 2010. 327
Figura 81 – Esquema feito pelo Diogo (E3, questão 3.3)....................328
Figura 82 – Resolução da questão 3, do Grupo II, do teste intermédio de 5 de maio 2010. 329
Figura 83 – Resolução da questão 1, primeira parte, do teste de 28 outubro de 2010. 330
Figura 84 – Resolução da questão 1.5 (E6). 336
Figura 85 – Resolução da questão 3, escolha múltipla, ficha de avaliação de 28 de fevereiro de 2011. 337
Figura 86 – Resolução da questão 5, segunda parte, teste de julho 2010, 10.º ano......339
Figura 87 – Conversão da representação gráfica I na algébrica, ficha *Relacionando a função quadrática e a função afim*....................339
Figura 88 – Resolução da questão 1.3, segunda parte, ficha de 28 de fevereiro 2011. 340
Figura 89 – Resolução da questão 4.3 do teste de 4 de junho de 2010. 344
Figura 90 – Resolução da questão 1.2 da ficha *Derivadas*, pelo par Diogo e Francisco....................345
Figura 91 – Resolução da questão 2.1 (E7). 349
Figura 92 – Representações visualizadas pelo Diogo na calculadora (E7, questão 2.3.1). 352
Figura 93 – Representações visualizadas pelo Diogo (E7, questão 2.3.2). 355
Figura 94 – Tratamento da expressão $x^2 + y^2 = 9$ 363
Figura 95 – Representação gráfica da relação entre as variáveis lucro por *blu-ray* e número de aparelhos vendidos. 365
Figura 96 – Respostas dadas à questão 3 (E1). 367
Figura 97 – Linhas auxiliares relativas à interpretação da condição $f(x) < 2$ 368
Figura 98 – Escrita da expressão analítica da função *i* (E2, questão 2.1.2). 373
Figura 99 – Simplificação da expressão $p(x+7)$ (E4, questão 4, parte individual). 375
Figura 100 – Expressão obtida para a área do triângulo (E3, questão 3.3). 377
Figura 101 – Representação obtida a partir da calculadora gráfica (E3, questão 1.1). 381
Figura 102 – Identificação da parte da representação gráfica da função $f(x) = \left| x^2 + 50x - 104 \right|$ anteriormente visualizada na calculadora gráfica. 383
Figura 103 – Algumas das representações da função $y = \sqrt{1 - sen^4 x}$, visualizadas pelo Francisco (*Zoom ZStandard*, $[-10,10] \times [0;1,1]$ e $[-100,100] \times [0,2]$ respetivamente, argumento em graus). 385

Figura 104 – Resolução da questão 4 da ficha *O Concerto*, pelo par Francisco e Diogo. 388

Figura 105 – Resolução da questão 2 da ficha *Derivadas*, pelo par Francisco e Diogo. 388

Figura 106 – Resolução da questão 3.3 (E3). 394

Figura 107 – Resolução da questão 4.2 do teste intermédio de 5 maio de 2010. 395

Figura 108 – Resolução da questão 4.2 do teste de 25 de outubro de 2010. 396

Figura 109 – Resolução da questão 2.2.1, da ficha *Derivadas,* pelo par Francisco e Diogo. 400

Figura 110 – Representação gráfica das funções *h* e *i* (E2)....403

Figura 111 – Representação gráfica da função *p* (E4, parte individual, questão 1.1)....404

Figura 112 – Resolução das questões 1.3 e 1.4 (E6). 406

Figura 113 – Determinação dos zeros do denominador (E7, questão 1.2). 406

Figura 114 – Resolução da questão 1.5 (E6). 407

Figura 115 – Resolução da questão 4 do teste de 25 de outubro de 2010. 409

Figura 116 – Determinação das dimensões do triângulo isósceles de área máxima (E3, questão 3.3). 410

Figura 117 – Resolução da questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas,* pelo par Diogo e Francisco. 411

Figura 118 – Resolução da questão 2.1 da ficha *Derivadas,* pelo par Diogo e Francisco. 411

Figura 119 – Resolução da questão 1.2 da ficha *Funções racionais*, pelo par Diogo e Francisco. 414

Figura 120 – Soluções da equação $p(x) = -5940$ (E4, parte individual, questão 1.3). 416

Figura 121 – Tratamento da expressão analítica da função *h* (E6, questão 2.3). 420

Figura 122 – Tradução matemática do problema (E8, questão 3.2). 421

Figura 123 – Indicação do conjunto de valores possíveis para *a* (E8, questão 3.2). 423

Figura 124 – Conversão da representação gráfica na algébrica, assumindo que se trata de uma parábola (E4, parte conjunta, questão 1.3). 425

Figura 125 – Resolução da questão 1.2, depois da exploração na calculadora (E7). 432

Figura 126 – Representação gráfica de $y = \begin{cases} 4, & x \leq 1 \\ -2x+5, & x > 4 \end{cases}$ (E8, questão 1, iii)). 438

Figura 127 – Tratamento da expressão $\operatorname{sen}^4 x + y^2 = 1$ (E8, questão 1, alínea (i)). 440

Figura 128 – Resolução da questão 5.1 do teste de 5 de março de 2010. 442

Figura 129 – Resolução da questão 3, primeira parte, teste de 4 de junho de 2010. 445

Figura 130 – Resolução da questão 1.6, ficha de avaliação de 28 de fevereiro de 2011. 447

Figura 131 – Representação gráfica das funções *f* e *g* (E5, questão 2.1). 447

Figura 132 – Resolução da questão 1.3 (E5). 448

Figura 133 – Resolução da questão 2, do grupo II, do teste intermédio de 5 de maio de 2010. 452

Figura 134 – Resolução da questão 2, da segunda parte, do teste de 5 de março de 2010. 452

Figura 135 – Resolução da questão 4, primeira parte, teste de 4 de junho de 2010. 453

Figura 136 – Resolução da questão 4.1.1, teste de 5 de março de 2010. 454

Figura 137 – Resolução da questão 3.1 do teste intermédio de 5 de maio de 2010. 454

Figura 138 – Determinação da expressão que dá a área do triângulo em função de *x* (E3, questão 3.3). 455

Figura 139 – Resolução da questão 6.1 (E8). 457

Figura 140 – Esboço da forma da representação gráfica da função *n*, a partir da representação gráfica dos fatores (E4, parte conjunta, questão 2)..............................459

Figura 141 – Esboço da forma da representação gráfica de f, a partir do esboço da representação gráfica dos fatores (E4, parte conjunta, questão 2)..............................461

Figura 142 – Resolução da questão 5, segunda parte, teste de julho de 2010. 465

Figura 143 – Conversão da representação gráfica III na algébrica, ficha *Relacionando a função quadrática e a função afim*...466

Figura 144 – Resolução da questão 1.3, segunda parte, ficha de 28 de fevereiro de 2011. 466

Figura 145 – Resolução da questão 3, primeira parte, teste de 28 de março de 2011. 468

Figura 146 – Resolução da questão 2.2 (E3). 469

Figura 147 – Resolução da questão 1.4 (E7). 471

Figura 148 – Resolução da questão 2.2 (E7). 472

Figura 149 – Determinação do domínio da função *f* (E7, questão 2.1). 476

Figura 150 – Escrita inicial da expressão analítica da função *h* (E7, questão 2.3).......479

Figura 151 – Composição da função *f* com a função $g(x) = \frac{1}{x}$ (E7). 479

Figura 152 – Resolução da questão 1 (E8, alínea iv). 481

Índice de tabelas

Tabela 1 – Exemplos dos vários níveis de orquestração instrumental em ambientes de aprendizagem com calculadora.....51

Tabela 2 – Diferentes tipos de orquestrações instrumentais.....58

Tabela 3 – Principais diferenças entre conceção operacional e estrutural. 68

Tabela 4 – Propriedades funcionais comuns. 74

Tabela 5 – Classificação dos registos que podem ser usados nos processos matemáticos.....90

Tabela 6 – Classificações no final do 10.º e 11.º, obtidas pelos alunos da turma selecionada.....145

Tabela 7 – Classificações por período obtidas pelos quatro alunos durante os dois primeiros anos do ensino secundário.....146

Tabela 8 – Síntese cronológica da observação de aulas no ano letivo 2009/2010 (10.º ano) 153

Tabela 9 – Síntese cronológica da observação de aulas no ano letivo 2010/2011 (11.º ano) 155

Tabela 10 – Calendarização das entrevistas. 162

Tabela 11 – Comparação dos esquemas de edição da expressão analítica de Diogo e Francisco.....486

Tabela 12 – Comparação dos esquemas de enquadramento de Diogo e Francisco. 487

Tabela 13 – Comparação dos esquemas de resolução de equações ou inequações de Diogo e Francisco. 489

Tabela 14 – Comparação dos esquemas de determinação de pontos notáveis de Diogo e Francisco.....490

Tabela 15 – Comparação dos esquemas relativos à derivada de uma função de Diogo e Francisco.....491

Tabela 16 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Representação gráfica de uma função.....495

Tabela 17 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Confirmação de resultados obtidos analiticamente.....495

Tabela 18 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Situações matemáticas que não conseguem resolver analiticamente.....496

Tabela 19 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Instrumento facilitador de certos procedimentos. 496

Tabela 20 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Exploração de situações problemáticas.....497

Tabela 21 – Níveis de desenvolvimento em termos do processo de génese instrumental. 520

Índice de anexos

Anexo 1 – Entrevista 1 – 10.º ano 539
Anexo 2 – Entrevista 2 – 10.º ano 545
Anexo 3 – Entrevista 3 – 10.º ano 551
Anexo 4 – Entrevista 4 – 10.º ano 553
Anexo 5 – Entrevista 5 – 11.º ano 557
Anexo 6 – Entrevista 6 – 11.º ano 561
Anexo 7 – Entrevista 7 – 11.º ano 565
Anexo 8 – Entrevista 8 – 11.º ano 569
Anexo 9 – Testes do 10.º Ano 575
Anexo 10 – Fichas de trabalho 10.º ano 593
Anexo 11 – Fichas Pares 10.º Ano 611
Anexo 12 – Aplicando 14 manual 617
Anexo 13 – Investigações com a função afim...621
Anexo 14 – Uma tarefa sobre transformações de funções 625
Anexo 15 – Testes do 11.º Ano 629
Anexo 16 – Fichas de trabalho 11.º Ano 649
Anexo 17 – Fichas Pares 11.º Ano 657
Anexo 18 – Problema (funções racionais)...663
Anexo 19 – Guiões da primeira e última entrevistas...667
Anexo 20 – Guião de observação de aulas..671
Anexo 21 – Autorizações e comunicações..675

Capítulo 1

Introdução

1.1. Motivação e pertinência do estudo

A atividade humana envolve quase sempre o uso de artefactos, mas o mais característico dos seres humanos parece ser a contribuição que tais artefactos desempenham ao nível cognitivo, tendo a linguagem, oral e escrita, desempenhado um papel central neste domínio (Bussi & Mariotti, 2008). Os artefactos concebidos pelos seres humanos, sejam psicológicos ou materiais, moldam os modos de pensamento e a atividade humana. Isto é evidente para a atividade, em geral, e para a atividade matemática, em particular, bastando pensar no papel cognitivo que as representações desempenharam e desempenham na evolução da matemática.

A matemática, contudo, distinguiu-se durante muito tempo das restantes disciplinas científicas pela estabilidade e economia das suas ferramentas de ensino: lápis, régua, esquadro, compasso, etc. (Trouche, 2003). A evolução tecnológica, no final do século XX, conduziu a mudanças profundas em vários sectores das sociedades e em particular na matemática (Trouche, 2003). Atualmente vivemos num mundo em que as mudanças ocorrem muito rapidamente, em particular, no que diz respeito às novas tecnologias, requerendo dos indivíduos uma constante adaptação à utilização de novas ferramentas. À escola é pedido que corresponda aos novos desafios e que prepare jovens ativos, críticos, intervenientes, capazes de responder às exigências de um mercado de trabalho cada vez mais competitivo e globalizado.

Nesse sentido, desde há algumas décadas, têm vindo a ser preconizadas mudanças na matemática escolar de modo a corresponder às novas exigências. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) lançou um conjunto de recomendações para o ensino da matemática nos anos oitenta, publicado em Portugal pela Associação de Professores de Matemática (APM) em 1985, intitulado “Agenda para a Ação”, que influenciou profundamente a educação matemática, não apenas nos Estados Unidos, mas em vários países ocidentais. Nessa agenda são indicadas oito recomendações, cada uma delas fazendo-se acompanhar por várias ações. A resolução de problemas é colocada como o foco principal do ensino da matemática; são valorizadas mais capacidades básicas do que apenas a facilidade de cálculo; o poder das calculadoras e dos computadores passa a ser aproveitado em todos os níveis de ensino; recomenda-se a aplicação de normas rigorosas de eficácia e eficiência no ensino da matemática; sugere-se que a avaliação do sucesso dos programas e da aprendizagem seja feita por outros instrumentos além dos testes convencionais; exige-se mais estudo em matemática e um currículo mais flexível e com mais opções; preconiza-se para os professores um alto nível de profissionalismo e exige-se um apoio público para o ensino da matemática proporcional à sua importância para os indivíduos e as sociedades. Esse documento foi o precursor de várias Normas: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989); *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991); *Assessment Standards for School Mathematics* (1995). A organização NCTM reconheceu a necessidade de examinar, avaliar e revisitar periodicamente as *Normas* de modo a mantê-las relevantes, o que originou o projeto *Standards* 2000, que se iniciou em 1997, e do qual resultou o livro *Principles and Standards for School Mathematics* (2000).

Em Portugal, de acordo com Ponte (2003), o momento mais significativo em termos de reflexão curricular ocorreu em 1988, num Seminário em Vila Nova de Milfontes, organizado pela APM. Nesse seminário refletiu-se sobre a influência das novas correntes acerca do ensino, das quais o autor destaca as *Normas* do NCTM (1991), que já existiam em versão preliminar, e o livro *A experiência Matemática* de Philip Davis e Reuben Hersh (2005), editado originalmente em 1980. Desse encontro resultou um documento onde se salientam duas ideias: “a importância que os alunos tenham uma experiência matemática genuína e as possibilidades das novas tecnologias como suporte para o desenvolvimento dessa experiência” (Ponte, 2003, p. 8).

Nos anos noventa surgiram novos programas de matemática, elaborados por equipas nomeadas pelo Ministério da Educação, que procuraram responder às novas perspetivas. No ensino secundário houve uma valorização da Geometria e das Probabilidades e Estatística, uma desformalização dos conceitos e foi dada importância à ligação da matemática ao real e ao uso de novas tecnologias (Santos, Canavarro & Ponte, 2000). Relativamente ao estudo das funções foi feita uma reorganização temporal, passando a ser introduzidos vários tipos de funções ao longo dos três anos do ensino secundário. No 10.º ano deu-se relevância ao estudo de funções concretas, traduzindo fenómenos da vida real, da Matemática e de outras Ciências, envolvendo, essencialmente, o estudo intuitivo de gráficos, estando a formalização dos conceitos adquiridos intuitivamente reservada para o tema da Análise Infinitesimal no 11.º e 12.º anos (Lobato, 1991). A aplicação deste novo programa esteve, contudo, envolta em polémica, principalmente, devido à diminuição do número de horas letivas, levando a protestos dos professores por não conseguirem cumprir o programa (Santos *et al.*, 2000).

Iniciou-se, então, uma nova revisão curricular no ensino secundário que foi denominada "ajustamento" e que culminou com os novos programas de 1997. Atualmente o currículo de matemática do ensino secundário, nos cursos científico-humanísticos, concretiza-se tendo por base os programas de Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, consoante os cursos escolhidos pelos alunos. Estes programas surgiram do "reajustamento" dos de 1997 e, no que diz respeito ao atual programa de Matemática A, homologado em 2001, existem poucas alterações relativamente ao anterior programa de Matemática. Em relação à calculadora gráfica, podemos ler no atual programa de Matemática A que é uma ferramenta de uso obrigatório e deve ser entendida, não apenas como um instrumento de cálculo, mas também como um meio incentivador do espírito de pesquisa (DES, 2001).

A tecnologia é um dos princípios para a matemática escolar: "é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2007, p. 11). Como refere Ponte (2003) "uma coisa é certa: as tecnologias têm hoje um papel fundamental na sociedade e a tarefa dos educadores é tirar delas o melhor partido, conservando, como em relação a tudo, o sentido crítico" (p. 4).

A renovação do currículo de Matemática, não apenas em termos dos conteúdos dos programas mas também das novas metodologias preconizadas, pressupunha da parte dos professores uma mudança nas práticas. Tal mudança, no entanto, é um processo demorado uma vez que implica alterações nas rotinas que, por vezes, se encontram profundamente enraizadas:

> […] Como mostra o *Relatório Matemática 2001* (APM, 1998), em ambos os níveis de ensino, muitas das orientações curriculares não têm expressão efetiva no dia-a-dia escolar. Assim, a exposição do professor e a realização de exercícios continuam a ter um lugar predominante nas práticas profissionais, faltando a diversificação das tarefas, a contextualização das situações de aprendizagem, o elemento desafiante e as oportunidades de discussão aprofundada visando objetivos de ordem superior. (Ponte, 2003, p. 19)

Com a obrigatoriedade do uso das calculadoras gráficas nas salas de aula, em 1997, os professores viram-se forçados a integrar esta "inovação" na sua prática léctica. Cardoso (2003) faz referência ao modelo *Concerns Based Adoption Model* (CBAM) de Hall e Loucks (1978), que evidencia a existência de um conjunto de fases de preocupações dos professores quando se veem confrontados com a necessidade de implementar uma inovação. Esse modelo assenta em quatro postulados fundamentais: (i) a mudança educativa é um processo e não um fenómeno isolado que exige tempo, desenrola-se por etapas, implica um trabalho de colaboração com outros professores e intervenientes educativos e pressupõe o desenvolvimento profissional do professor; (ii) o indivíduo deve ser o alvo principal das intervenções sendo necessário que este compreenda o seu papel no processo de mudança; (iii) a mudança é uma experiência extremamente pessoal, por vezes os agentes da mudança dão bastante atenção ao conteúdo e/ou à técnica de inovação mas ignoram a maneira como os indivíduos visados pela mudança a percebem e sentem; e (iv) os indivíduos implicados na mudança passam por etapas, no que respeita às perceções, sentimentos e competências relacionadas com esta.

O professor tem um papel determinante no desenvolvimento do currículo, no entanto, como defende Kilpatrick (1999) "a mudança social envolve mudar pessoas, e não se pode atualizar pessoas como se elas fossem um *software*. (…) Todos os participantes necessitam de reconhecer que a mudança curricular é uma viagem pessoal para os professores de Matemática" (p. 23). Não será de estranhar que a integração das calculadoras gráficas na prática de muitos professores, apesar dos esforços empreendidos, nomeadamente pela Comissão de Acompanhamento dos Programas de Matemática do Ensino Secundário, tenha passado por um processo lento e que, atualmente, os professores continuem a utilizá-las de formas muito diferenciadas (Andrade, 2007; Rocha, 2012). Em vários casos, não existe diferença no tipo de ensino que era praticado antes de a calculadora gráfica entrar nas salas de aula de matemática, a não ser, talvez, no que diz respeito ao número de representações gráficas utilizadas.

No entanto, as calculadoras gráficas oferecem a alunos e professores uma série de oportunidades para novas abordagens dos vários temas da matemática, permitindo que o foco do ensino seja o desenvolvimento de conceitos matemáticos importantes e não apenas o desenvolvimento de técnicas convencionais. As próprias competências processuais podem ser desenvolvidas de forma mais eficaz quando os alunos compreendem bem as ideias que lhes são subjacentes (Kissane & Kemp, 2008). Este é um aspeto importante, já que existe um largo consenso entre investigadores e educadores matemáticos relativamente à necessidade de os objetivos educacionais irem além do desenvolvimento de perícia em procedimentos rotineiros, em que os alunos completam exercícios de matemática escolares de forma rápida e precisa mas sem compreensão (Graham, Pfannkuch &Thomas, 2009; Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Dooren, 2009; Stewart & Thomas, 2009; Tall & Thomas, 1991). Ou seja, a educação deve apostar no desenvolvimento da capacidade de aplicar procedimentos significativamente aprendidos de forma flexível e crítica (Verschaffel et al, 2009), ou, por outras palavras, no desenvolvimento do *pensamento versátil*. O pensamento versátil compreende três elementos: a versatilidade processo/objeto, visual/analítica e representacional (Graham *et al.*, 2009). Ora as tecnologias gráficas, podem contribuir significativamente para esse desenvolvimento (Heid & Blume, 2008).

Numa sociedade em que as mudanças ocorrem cada vez mais rapidamente e em que se exige dos indivíduos uma constante adaptação a novas situações e a novas ferramentas, a matemática desempenha um papel fundamental, contudo, como refere Matos (2004), se por um lado a sociedade é cada vez mais regulada por modelos matemáticos complexos, por outro lado, cada vez menos o cidadão tem que conhecer a matemática que os suporta. O importante é que os jovens desenvolvam a capacidade de saber lidar com esses modelos, de compreender como foram produzidos, de criticá-los e, de um modo geral, de conseguir resolver as situações problemáticas com que se vão deparando.

Paralelamente ao crescimento explosivo das tecnologias computacionais para as salas de aula cresceu o interesse da comunidade de investigação em compreender o seu impacto na aprendizagem, ensino, e currículo (Zbiek, Heid, Blume & Dick, 2007). De início, o debate foi dominado pelo otimismo e entusiasmo relativos ao potencial das novas tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática: a tecnologia libertaria os alunos de cálculos e procedimentos fastidiosos permitindo que a educação matemática se focasse em temas mais relevantes, tais como, aplicações reais, modelação, compreensão conceptual, e o desenvolvimento, do que se pode considerar, pensamento matemático superior (Drijvers & Trouche, From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, 2008). No entanto, alguns estudos (Guin & Trouche, 1999; Artigue, 2002b; Drijvers, 2000) vieram mostrar que o processo de converter uma ferramenta num instrumento psicológico não é trivial e que a integração da tecnologia com propósito educacional necessita de algum cuidado. O pensamento matemático dos alunos "é profundamente afetado pelo seu trabalho com a tecnologia, de um modo complexo e subtil" (Trouche & Drijvers, 2010, p. 667). De acordo com os autores, a história da integração das tecnologias portáteis no ensino da matemática, desde os anos oitenta até à atualidade, veio mostrar a necessidade de se ser "menos *naïve*, acerca das máquinas e da mediação" (p. 679), já que estas não são neutras e influenciam fortemente o trabalho de alunos e professores.

A calculadora gráfica, pela sua portabilidade e relativo baixo custo, é uma das principais ferramentas tecnológicas usadas nas salas de aula de matemática do ensino secundário. Enquanto professora do ensino secundário, sinto necessidade de compreender, com maior profundidade, a relação dos alunos com esta ferramenta e o seu papel na aprendizagem dos conceitos matemáticos. A minha experiência aponta em duas direções distintas, por um lado, alguns alunos, que considero "bons alunos", mostram uma certa rejeição relativamente à calculadora gráfica e, por outro lado, os alunos "mais fracos", apesar de, em certas situações, demonstrarem algum sucesso na resolução de problemas com a calculadora gráfica, posteriormente não evidenciam compreender os conceitos matemáticos envolvidos. Um estudo do Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério de Educação (GAVE) que incidiu nos resultados dos exames nacionais, no final do ensino secundário, mostra que é baixa a taxa de sucesso nas questões que testam a utilização da calculadora gráfica (Ramalho, 2002). Como corretora de exames nacionais do 12.º ano também pude, informalmente, constatar esse facto, o que aguçou o meu interesse por esta questão. Aliás, o facto de algumas vozes no nosso país se terem levantado contra a utilização das calculadoras, em particular devido às suas limitações, por exemplo Albuquerque (1998), suscitou-me desde logo o interesse em compreender melhor essas limitações, de modo a não as descurar e poder discuti-las com os meus alunos. A exploração de algumas limitações das calculadoras gráficas foi o tema do meu trabalho num Seminário, no âmbito do Mestrado em Matemática, na área de Matemática para o Ensino, no ano letivo 1999/2000.

No currículo nacional (prescrito) a calculadora gráfica é principalmente recomendada para o estudo das funções. Os conhecimentos sobre funções são, tal como diz o programa da matemática A, “indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos” (DES, 2001, p. 26). Apesar da sua importância, os alunos, muitas vezes, apresentam bastantes dificuldades ao trabalharem com as funções (Sajka, 2003), em parte, devido à necessidade de coordenar múltiplas representações (Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007). A calculadora gráfica deveria ser um poderoso instrumento para a aprendizagem das funções dada a facilidade com que efetua a conversão de várias das suas representações, mas a experiência mostra-me que nem sempre assim é.

O conhecimento do modo como o aluno se apropria dessa ferramenta tornando-a num instrumento útil para a sua atividade matemática parece-me bastante importante. Como refere Ocak (2008):

> Existe necessidade de estudos que documentem o modo como a calculadora gráfica é usada por alunos individuais. É necessário olhar para os alunos enquanto usam a calculadora gráfica para examinar como é que eles a usam, quando é que eles a usam, com que propósitos, e se o uso da calculadora aumenta a sua compreensão/aprendizagem das funções com gráficos complexos. (p. 339)

O estudo, em profundidade, do processo de apropriação da calculadora gráfica pelos alunos e do seu papel na aprendizagem das funções poderá fornecer informação importante para os professores orientarem as suas aulas, tendo em conta as situações e os ambientes que podem potenciar o desenvolvimento dos esquemas instrumentados e da compreensão conceptual.

Apesar de existirem vários estudos sobre a integração das calculadoras gráficas e simbólicas no ensino e aprendizagem da matemática, esses estudos dizem respeito a outras realidades, não existindo no nosso país muita pesquisa aprofundada nesta área. Parece-me muito importante avançar nesta direção pois, após mais de uma década de introdução obrigatória das calculadoras gráficas no ensino da matemática, ainda sabemos muito pouco sobre o modo como os alunos se apropriam desta ferramenta e sobre o seu efeito no desenvolvimento conceptual. Numa altura em que noutros países começam a ser realizados estudos para compreender as potencialidades de toda uma nova série de tecnologias que invadem a nossa sociedade, em termos do ensino e aprendizagem da matemática (Finzer, 2012; Jesberg & Ludwig, 2012; Jorgensen & Lowrie, 2012, Yerushalmy, 2012), parece-me bastante importante que a investigação no nosso país comece a dar atenção às questões de apropriação dos artefactos, neste caso, da calculadora gráfica, que faz parte das salas de aula das nossas escolas, mas cujas conclusões poderão ser tidas em consideração quando pretendermos avançar para outros artefactos tecnológicos.

1.2. Problema e questões de investigação

A calculadora gráfica é uma das ferramentas tecnológicas mais usadas nas salas de aula de matemática no ensino secundário e, como tal, pode afetar a atividade matemática, estendendo ou inibindo as abordagens dos alunos às tarefas matemáticas (Heid & Blume, 2008). Carvalho (2006) refere um episódio de um aluno que reclamou junto do secretariado de exames da sua escola, através do professor vigilante, que certa questão estava mal formulada porque "o gráfico não aparecia na calculadora". Penso que praticamente todos os professores de matemática já se depararam com situações semelhantes, em que os alunos demonstram, por um lado, falta de conhecimento em relação ao modo de funcionamento da calculadora e, por outro lado, dificuldades em estabelecer conexões entre o conhecimento do objeto matemático em questão e o conhecimento instrumental necessário à integração da ferramenta na atividade matemática. O facto de o artefacto se encontrar acessível não significa, por si só, que se torne num instrumento útil ao aluno, pois tal só acontece quando este se apropria dele e consegue integrá-lo na sua atividade matemática através de um processo denominado de génese instrumental (Vérillon & Rabardel, 1995). Como qualquer outro artefacto, a calculadora gráfica não está pronta para fazer cálculos, gráficos, investigação, resolução de problemas, aprender ou ensinar, para tal é necessário que o utilizador se aproprie dela, o que pressupõe "colocar na máquina algo pessoal" (Trouche & Drijvers, 2010, p.680).

O processo da génese instrumental consiste na construção, pelo sujeito, de um instrumento a partir de um artefacto. Esse instrumento é construído a partir de uma parte do artefacto e de *esquemas* desenvolvidos com vista a desempenhar um certo tipo de tarefa. Vérillon e Rabardel (1995) denominaram os esquemas associados à utilização de um artefacto de *esquemas de utilização*. Rabardel (2002) considera que os esquemas de utilização podem ser encarados como *esquemas de uso*, quando estão relacionados com tarefas secundárias, isto é, tarefas relativas a características próprias do artefacto, e *esquemas de ação mediada pelo instrumento* (*esquemas instrumentados*), quando estão associados a tarefas primárias, ou seja, tarefas orientadas para o objeto da atividade e para as quais o artefacto é um meio para as desempenhar.

Ao conhecimento instrumental associa-se necessariamente o conhecimento conceptual (Guin & Trouche, 1999), mas existe um elo de ligação indispensável e que detém uma enorme importância: o conhecimento representacional. A atividade matemática "envolve sempre substituir alguma representação semiótica por outra" (Duval, 2006, p. 107), pois, na matemática, as representações semióticas não são usadas apenas para designar os objetos ou para comunicar, mas para trabalhar com eles. De acordo com este autor, o problema crucial da compreensão matemática deve-se a um conflito cognitivo que surge do facto de os objetos matemáticos apenas serem acessíveis através de representações semióticas e, no entanto, ser imprescindível, para o progresso na aprendizagem, que o aluno consiga distinguir o objeto representado da sua representação semiótica.

Vários estudos mostram que os alunos têm dificuldades em reconhecer o mesmo objeto matemático através de várias representações (Hitt, 1998; Elia *et al.*, 2007), como consequência, não demonstram a capacidade de mudar de registo de representação e de usar o conhecimento fora dos contextos restritos da aprendizagem. O conhecimento fica compartimentado sendo apenas possível uma compreensão fragmentada e *monoregistral*[1] (Duval, 2006). As várias representações de um conceito matemático oferecem informação sobre aspetos particulares do conceito sem que o consigam descrever completamente pois cada representação tem capacidades representacionais limitadas. É, no entanto, a coordenação das várias representações que permite

[1]Duas representações do mesmo objeto matemático são vistas como dois objetos diferentes.

estabelecer relações e desenvolver uma maior compreensão dos conceitos (Even, 1998). Além disso, a flexibilidade em mudar de representação é também um dos fatores determinantes para o sucesso na resolução de problemas, pois permite escolher a representação mais apropriada de acordo com os objetivos ou contextos (Dick & Edwards, 2008).

A calculadora gráfica permite conjugar várias representações das funções: numérica, gráfica, simbólica e física[2]. Importa, pois, compreender como se caracteriza a atividade dos alunos no seio das múltiplas representações fornecidas pela calculadora e o seu papel no desenvolvimento do *conceito imagem* (Tall e Vinner, 1981) de função, ou seja, no desenvolvimento de toda a estrutura cognitiva associada ao conceito, o que inclui imagens mentais, propriedades e processos.

Esta investigação tem como problemática a integração da calculadora gráfica na atividade matemática do aluno no estudo das funções, na disciplina de Matemática A, ao longo do 10.º e 11.º anos, do ensino secundário. A apropriação pelo aluno da calculadora gráfica requer o desenvolvimento de esquemas instrumentados, cujo estudo deve incluir para além das próprias técnicas, as suas funções epistémicas, heurísticas e pragmáticas (Trouche, 2005). Assim, é necessário, por um lado, observar a atividade do aluno de modo profundo, no decurso do tempo, com vista a reconhecer regularidades, e, por outro lado, analisar o seu discurso, de maneira a identificar as justificações para os gestos que são realizados durante a ação. O principal objetivo deste estudo é compreender como é que o aluno se apropria da calculadora gráfica na sua atividade matemática e qual o papel que esta desempenha no que respeita à aprendizagem das funções, no ensino secundário. Para tal procurarei responder às seguintes questões:

(i) Que esquemas instrumentados desenvolvem os alunos ao utilizar a calculadora gráfica na sua atividade com funções? Como se desenvolvem e evoluem esses esquemas?

(ii) Em que situações e com que objetivo é que os alunos usam a calculadora gráfica na sua atividade matemática envolvendo funções?

(iii) Em que medida o uso da calculadora gráfica contribui para que os alunos ultrapassem as dificuldades que encontram ao trabalhar com funções?

[2] A representação física foi sugerida por Dick e Edwards (2008), tendo em conta que através de sensores, por exemplo, podem ser representadas situações físicas.

(iv) Qual o papel que a calculadora gráfica desempenha na evolução do *conceito imagem* de função dos alunos ao longo do 10.º e 11.º anos, nomeadamente, em termos da sua capacidade de trabalhar com diferentes representações e de resolver problemas?

Apesar de este estudo ser centrado nos alunos, estou consciente que o contexto terá influência no processo de apropriação da calculadora gráfica, nomeadamente, o tipo de ensino do professor e a natureza das tarefas que propõe, pois como referem Lave e Wenger (1991), a educação matemática dos alunos constitui um fenómeno emergente das práticas em que são imersos e em que participam. Assim, procurarei interpretar os dados e responder às questões do estudo à luz do contexto onde se desenrola o processo ensino/aprendizagem destes alunos.

Capítulo 2

Abordagem instrumental

O desenvolvimento das novas tecnologias e o seu crescente uso nas sociedades conduziu à necessidade de se encontrar um quadro teórico que permitisse analisar a interação entre a máquina e o indivíduo. Pierre Rabardel, Professor de Psicologia e Ergonomia na Universidade de Paris 8, diretor da equipa *C3U* (*Conceção, Criação, Competências e Usos*) cujas pesquisas focam o desenvolvimento e utilização de ferramentas em situação de trabalho, formação, arte e vida quotidiana, e Pierre Vérillon, Pesquisador no Instituto Nacional de Pesquisa Pedagógica (INRP), em França, deram um importante contributo para o desenvolvimento de um tal quadro teórico no campo da educação. Segundo Vérillon e Andreucci (2005) um dos resultados inesperados do avanço da educação tecnológica na França, em 1985, foi o "aparecimento, na pesquisa francesa, de um novo campo de estudo em psicologia – a atividade instrumentada na interação entre o Homem e o artefacto – e o desenvolvimento de um novo paradigma teórico, a teoria instrumental" (p. 2).

Rabardel dirigiu dois programas de pesquisa no *Département d'Etudes et de Recherche sur les Enseignement Technologiques* do INRP, em colaboração com pesquisadores da Universidade, em 1984. O primeiro programa intitulado *"Objetos materiais fabricados*[3] *como suporte para o desenvolvimento cognitivo na educação"* tinha como objetivo investigar se a interação com artefactos, pela sua natureza material, finalizada e funcional afetaria a cognição e de que modo. O segundo programa denominado *"Interpretação de dificuldades no desenho de engenharia"*, destinava-se a compreender as dificuldades encontradas pelos alunos na descodificação de desenhos de engenharia, então considerada uma das principais competências na educação (Vérillon & Andreucci, 2005). Os quadros teóricos adotados pelos investigadores envolvidos em

[3] Segundo o autor, dado o interesse do grupo em questões antropológicas, a expressão "objeto material fabricado" foi rapidamente abandonada a favor do termo "artefacto".

ambos os programas basearam-se no construtivismo Piagetiano que, na época, segundo Vérillon e Andreucci (2005), era claramente dominante na psicologia educacional francesa, sendo ainda praticamente desconhecidos os trabalhos de Vygotsky e Bruner, recentemente traduzidos. Apesar do construtivismo parecer um quadro teórico bastante satisfatório para a análise dos dados empíricos, alguns resultados não se encaixavam inteiramente na teoria: “se alguns casos de interação criança-artefacto pareciam em conformidade com a teoria do equilíbrio, outras experiências eram menos conclusivas” (Vérillon & Andreucci, 2005, p. 3). Os investigadores aperceberam-se que a construção das propriedades do artefacto[4] pelo sujeito não resulta apenas da interação bilateral com o objeto, como seria de esperar num clássico quadro teórico Piagetiano. Surgia assim a necessidade de se apelar a outras teorias na área da psicologia.

Vérillon e Rabardel (1995) avançaram com um modelo para analisar a atividade instrumentada. Nas palavras dos autores “de certa forma, as hipóteses que servem de base a esta teoria não são novas” (p. 2), provêm das ideias de Vygotsky e englobam também a teoria do desenvolvimento de esquemas mentais que pode vista segundo a tradição Piagetiana. A abordagem instrumental fornece um poderoso quadro teórico para analisar o processo de aprendizagem em ambientes computacionais, que tem vindo a ser utilizado em várias pesquisas com resultados bastante interessantes (White, 2008), o que se deve ao facto de este quadro teórico permitir interligar o surgimento da compreensão conceptual com os objetivos que o aluno pretende atingir ao usar a ferramenta no contexto de uma tarefa.

2.1. Principais influências da abordagem instrumental

2.1.1. Vygotsky e a psicologia histórico-cultural

O quadro teórico desenvolvido por Vygotsky é, segundo Werstch (1985), essencialmente constituído por três temas: (i) a relevância da genética ou método do desenvolvimento; (ii) a afirmação de que os processos mentais mais elevados do

[4] Material ou simbólico

individuo têm a sua origem nos processos sociais; e (iii) a afirmação de que os processos mentais só podem ser compreendidos se forem compreendidos as ferramentas e os signos que os medeiam.

O conceito de mediação é um dos maiores contributos da obra de Vygotsky. Na altura em que Vygotsky desenvolveu a sua teoria já outros autores tinham argumentado acerca da necessidade de usar a análise genética no estudo da mente e avançado com a ideia de que a mente tinha origem na vida social, contudo, foi este que redefiniu e estendeu essas ideias, introduzindo a noção de ferramenta e de mediação (Wertsch, 1985).

Vygotsky refere que no comportamento humano se encontram muitos dispositivos artificiais – ferramentas psicológicas – a comandar os processos mentais, como por exemplo: "linguagem; vários sistemas de contagem; técnicas mnemónicas; sistemas algébricos simbólicos; trabalhos de arte; escrita; esquemas, diagramas, mapas e desenhos mecânicos; toda a espécie de signos convencionais; etc." (Vygotsky, 1979b, p. 137). Estas ferramentas psicológicas, pela sua natureza, são de origem social, não orgânica ou individual.

> Ao serem introduzidas nos processos do comportamento, as ferramentas psicológicas alteram todo o curso e estrutura das funções mentais. Fazem-no, determinando a estrutura de um novo ato instrumental, tal como uma ferramenta técnica altera o processo de adaptação natural determinando a forma das operações de trabalho. (Vygotsky, 1979b, p. 137)

Para Vygotsky junto com os atos naturais é necessário reconhecer funções e formas de comportamento artificiais, ou instrumentais, únicas dos humanos e que são um produto do desenvolvimento histórico. Para clarificar a relação entre processos naturais e instrumentais Vygotsky utilizou o seguinte esquema triangular:

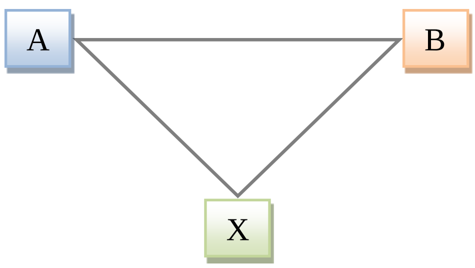


Figura 1 – Ilustração do método instrumental Vygotskyano.

Em vez da conexão direta A – B (reflexo condicionado, no processo natural), são estabelecidas duas novas conexões A – X e B – X, com a ajuda da ferramenta psicológica X: "o que é novo, artificial, e instrumental acerca desta nova conexão é o facto de se substituir uma conexão, A – B, por duas conexões, A – X e X – B […]. Esta nova direção artificial é fornecida por meio de um instrumento" (Vygotsky, 1979b, p. 138). Segundo Vygotsky, a introdução de uma ferramenta psicológica no processo de comportamento conduz a uma reestruturação dos vários processos mentais, nomeadamente, (i) introduz uma série de novas funções ligadas ao uso e controlo da ferramenta; (ii) elimina e torna desnecessários certos processos naturais, que são realizados pela ferramenta e, (iii) altera as características individuais de todos os processos mentais (intensidade, duração, sequência, etc.), substituindo umas funções por outras. Vygotsky denomina de *ato instrumental* o resultado final desta reestruturação:

> Os processos mentais, vistos como um todo, formam uma unidade estrutural e funcional complexa. São dirigidos para a solução de um problema colocado por um objeto. Esses processos mentais são coordenados, e no curso [da atividade] ajudados pela ferramenta, ditam a forma de um novo todo – um ato instrumental. (Vygotsky, 1979b, p. 139-140)

Tanto as ferramentas psicológicas como as técnicas são inseridas como uma ligação intermediária entre a atividade humana e os objetos externos, a principal diferença entre elas reside no facto de que as ferramentas psicológicas são dirigidas para a mente e para o comportamento, enquanto as técnicas são dirigidas para produzirem um conjunto de transformações no próprio objeto. Para Vygotsky um estímulo torna-se uma ferramenta psicológica quando é utilizado como um modo de influenciar a mente e o comportamento. Nesse sentido, todas as ferramentas são estímulos pois têm a capacidade de influenciar o comportamento, no entanto, nem todos os estímulos podem ser considerados ferramentas. O método instrumental proposto por Vygotsky é por ele definido como um método histórico-genético pois introduz o ponto de vista histórico na investigação do comportamento: "o uso de ferramentas psicológicas aumenta e estende imensuravelmente as possibilidades do comportamento, fazendo com que o resultado do trabalho de génios se torne acessível a todos (veja-se a história da matemática e das outras ciências) " (Vygotsky, 1979b, p. 141).

Um dos temas centrais dos trabalhos de Vygotsky pode ser enunciado no que ele chamou a lei genética geral do desenvolvimento cultural: “Qualquer função no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos. Primeiro aparece no plano social, e depois no plano psicológico” (Vygotsky, 1979a, p. 163). Para Vygotsky o termo “social”, no seu sentido mais lato, significa que tudo o que é cultural é social – a cultura é o produto da vida social e da atividade social humana. Qualquer função mental superior passa necessariamente por uma etapa externa por ter sido inicialmente uma função social. Vygotsky ilustra com um exemplo, o desenvolvimento do gesto indicador. Imaginemos uma criança tentando chegar a um objeto que se encontra longe, as suas mãos agitam-se em direção ao objeto e os seus dedos movimentam-se, quando a mãe vem em ajuda da criança e compreende o seu movimento como indicador, a situação muda significativamente: esse gesto torna-se um gesto para os outros, a resposta surge não da parte do objeto mas da parte de outro humano. Outra pessoa dá sentido ao movimento e só mais tarde a criança começa a usar o movimento como indicação. As próprias funções do movimento mudam, deixam de ser dirigidas para o objeto e passam a ser dirigidas para a outra pessoa, convertendo-se numa indicação. O movimento é abreviado e é elaborada a forma do gesto indicador. A criança é a última a ter consciência desse gesto, o seu significado e função é em primeiro lugar criado pela situação e depois pelas pessoas que rodeiam a criança: “podemos dizer que é através dos outros que nos desenvolvemos em nós próprios” (Vygotsky, 1979a, p. 161).

Em contraste com Piaget, Vygotsky considera que o desenvolvimento não avança com a socialização, mas através da conversão das relações sociais em funções mentais: “todas as funções mentais superiores são relações sociais internalizadas” (Vygotsky, 1979a, p. 164). Ao analisar as funções mentais superiores, Vygotsky enuncia quatro postulados: (i) a cultura não cria nada, modifica simplesmente o ambiente natural de acordo com os objetivos humanos; (ii) no processo de desenvolvimento cultural um conjunto de funções da criança é substituído por outro e, emergem novos caminhos indiretos; (iii) a atividade mediada ou uso de signos externos são os alicerces para a estrutura das formas culturais de comportamento; e (iv) o desenvolvimento das funções mentais superiores depende da capacidade do domínio da criança no seu próprio comportamento (Vygotsky, 1979a).

Vygotsky rejeita a noção de que o desenvolvimento consista num simples processo gradual de acumulação quantitativa, em contraste, afirma que a ligação entre o desenvolvimento comportamental natural baseado na maturação orgânica e os tipos de desenvolvimento com que temos que lidar se faz de forma revolucionária e não evolucionária.

Vygotsky fala de "enraizamento interno" quando se dá a transição de uma operação externa para interna. Com base nos seus estudos empíricos na área da aritmética, fala e memória em particular, considerou três tipos básicos de enraizamento: o primeiro, denominado "enraizamento do tipo articulação" – corresponde à internalização por meio da articulação – é a articulação que junta um estímulo com a resposta, esta articulação vai desaparecendo gradualmente e forma-se uma ligação direta entre o estímulo e a resposta, uma vez que o caminho é "abreviado", a resposta é mais rápida quando a operação deixa de ser mediada para ser direta; o segundo, denominado "enraizamento indiferenciado" – corresponde à internalização de um conjunto indiferenciado de estímulos externos, a internalização da operação consiste numa suavização da diferença entre um estímulo externo e interno; e, finalmente, o terceiro e mais importante tipo de internalização da operação consiste no domínio da criança relativamente à própria estrutura do processo.

Vejamos o exemplo dado por Vygotsky relativamente a uma operação aritmética levada a cabo por uma criança que já começou a compreender o que significa contar, mas que ainda conta através de signos externos. Quando se lhe coloca o problema "aqui existem sete maçãs. Se tirarmos duas, quantas ficam?", a criança resolve o problema mas através de signos externos, desempenhando os dedos o papel de signos, no entanto, ao proibir a criança de mexer as mãos ela deixa de ser capaz de responder ao problema. Com o tempo a criança facilmente deixa de contar pelos dedos para contar mentalmente, nesse caso exibe dois tipos básicos de enraizamento, por um lado, a contagem mental é um tipo de enraizamento indiferenciado e, por outro lado, o enraizamento do tipo articulação ainda está presente. No entanto, num dado ponto, após a prática, a criança deixa de precisar das operações mediadoras e o resultado é dado diretamente.

Para Vygotsky cada criança tem um *nível de desenvolvimento real*, que determina até onde ela consegue chegar individualmente, e um *nível de desenvolvimento potencial*, que determina o que consegue fazer sob a orientação de um adulto ou de um companheiro mais experiente. A partir destes dois níveis Vygotsky apresentou a noção revolucionária de zona de desenvolvimento proximal (ZDP):

> A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão mais tarde mas que estão correntemente num estádio embrionário. Essas funções podem ser chamadas de "flores" do desenvolvimento em vez de "frutos" do desenvolvimento. (Vygotsky, 1978, p. 86)

Em termos da instrução este conceito é bastante importante pois as aprendizagens orientadas para níveis de desenvolvimento que já foram atingidos são ineficazes, sendo necessário definir níveis no desenvolvimento da criança de modo a perceber a relação entre o seu processo de desenvolvimento e as possibilidades de instrução. Para Vygotsky (1978) existem dois pontos essenciais: (i) os processos de desenvolvimento não coincidem com os processos de aprendizagem ficando antes "atrás" destes, o que resulta nas zonas de desenvolvimento proximal, e (ii) apesar da aprendizagem se encontrar diretamente relacionada com o curso do desenvolvimento da criança, os dois não são nunca acompanhados em igual medida ou em paralelo.

2.1.2. Teoria da atividade

Leontiev seguiu as ideias de Vygotsky tendo contribuído para o desenvolvimento da teoria da atividade e para a conceptualização da noção de artefacto na sua relação com o desenvolvimento da mente humana (Rabardel, 2002).

Um dos pontos centrais da teoria de Leontiev é a fixação do capital cultural da espécie humana: cada pessoa adquire capacidades verdadeiramente humanas através da apropriação desse capital cultural. A distinção entre objetos naturais e artefactos não é necessária para uma elaboração teórica acerca do desenvolvimento da mente dos animais mas, o mesmo não acontece no caso dos seres humanos. Os artefactos humanos são produzidos pela cultura humana, não são apenas objetos com forma específica e determinadas propriedades físicas, são objetos sociais que refletem experiências dos que antes tentaram resolver problemas semelhantes e os modificaram de modo a torná-los mais eficientes (Rabardel, 2002).

> Durante a história da sociedade humana o homem percorreu um imenso caminho na evolução das suas capacidades psíquicas. Os milhares de anos da história social fizeram muito mais a este respeito do que centenas de milhões de anos na evolução biológica animal. (…) A partir desse momento [em que a sociedade humana passou da pré-história para o desenvolvimento histórico] as realizações do homem no desenvolvimento do poder psíquico foram fixadas e transmitidas de geração em geração de uma forma especial, designadamente de uma forma externa, objetiva e exotérica. Essa nova forma de acumulação e transmissão de experiência filogenética (ou antes, histórica) deu-se porque a atividade característica do homem é produtiva, construtiva. É, acima de tudo, a atividade básica humana – labor, trabalho. (Leontiev, 1981, p. 116)

O indivíduo tem que desempenhar uma atividade evidente sobre os objetos que o rodeiam, sejam materiais ou ideais, para que se possa apropriar dos aspetos humanos neles "cristalizados". Essa é apenas uma condição do processo a que Leontiev (1981) chama "assimilação, apropriação ou domínio" (p. 117), uma outra condição, refere-se à mediação da relação do indivíduo com os objetos por outros seres humanos. Tal como Vygotsky, Leontiev atribui bastante importância à mediação da relação da criança com os objetos pelas pessoas que a rodeiam.

Para Leontiev a atividade humana é a chave para compreender o nosso conhecimento sobre o mundo: "num sentido estrito (ou seja, ao nível psicológico) [a atividade] é a unidade da vida que é mediada pela reflexão mental. A função real desta unidade é orientar o sujeito no mundo dos objetos" (Leontiev, 1979, p. 46). A introdução da categoria da atividade na psicologia vem, segundo Leontiev, mudar todo o seu quadro conceptual: "a psicologia humana diz respeito à atividade dos indivíduos concretos, que toma lugar ou num coletivo – isto é, juntamente com outras pessoas – ou numa situação em que os sujeitos lidam diretamente com os objetos do mundo que os rodeia" (Leontiev, 1979, p. 47). O autor considera a atividade como um sistema, com uma estrutura própria, com as suas próprias transformações internas e com o seu próprio desenvolvimento, no entanto, esse sistema só poderá existir dentro do sistema das relações sociais e da vida social.

Segundo Leontiev (1979) a principal característica que distingue uma atividade de outra é o seu objeto. O objeto de uma atividade é o seu real motivo, que tanto pode ser material como ideal. A necessidade está sempre por detrás da atividade e, portanto, os conceitos de atividade e motivo estão necessariamente ligados. Os "componentes" básicos das várias atividades humanas são as ações que as traduzem em realidade. Leontiev define uma ação como sendo um processo que está subordinado a um objetivo consciente. Assim como a noção de atividade está ligada à noção de motivo, também a noção de objetivo está ligada à noção de ação.

> A emergência na atividade de processos dirigidos por objetivos ou ações foi historicamente a consequência da transição dos humanos para a vida em sociedade. A atividade dos participantes do trabalho coletivo é induzida pelo seu produto, o qual inicialmente servia diretamente a necessidade de cada participante. Contudo a emergência da mais simples técnica de divisão de trabalho conduz necessariamente ao isolamento de resultados parciais separados, os quais são realizados pelos participantes separadamente na atividade de trabalho coletivo, mas por eles próprios não satisfazem as suas necessidades. (Leontiev, 1979, p. 60)

As ações que constituem a atividade são estimuladas pelo seu motivo, contudo, são dirigidas para um objetivo que pode não coincidir diretamente com o motivo: "quando um processo completo – externo ou interno – se desenvolve perante nós, do ponto de vista do seu motivo, é atividade humana, mas em termos de subordinação a um objetivo, é uma ação ou uma cadeia de ações" (Leontiev, 1979, p. 61). Leontiev ilustra com um exemplo, imaginemos que temos o objetivo de chegar ao ponto N, essa ação pode ter tido motivos completamente diferentes e, portanto, realizar diferentes atividades, por sua vez, o recíproco também é verdadeiro pois, o mesmo motivo pode dar origem a diferentes objetivos e, portanto, pode produzir diferentes ações.

Numa atividade bem desenvolvida devem ser atingidos vários objetivos concretos, alguns dos quais rigidamente ordenados, ou seja, "uma atividade é, usualmente, desenvolvida por algumas ações agregadas subordinadas a objetivos parciais, que se podem distinguir do objetivo global" (Leontiev, 1979, p. 61). Para além dos aspetos intencionais, a ação é caracterizada pelos aspetos operacionais que não são definidos pelo próprio objetivo mas pelas circunstâncias em que a ação é desenvolvida. Leontiev denominou os meios pelos quais uma ação é levada a cabo por operações.

> A diferença entre ações e operações surge muito claramente no caso de ações que envolvem ferramentas. Afinal, uma ferramenta é um objeto material no qual estão cristalizados métodos ou operações, em vez de ações ou objetivos. Por exemplo, podemos fisicamente desmembrar um objeto com uma

> variedade de ferramentas, cada uma das quais define um método para a realização da tarefa. Nalguns casos a operação de corte será melhor, e noutros, a operação de serragem. Em ambos os casos assume-se que a pessoa é capaz de comandar a ferramenta apropriada, tal como uma faca, serra, etc. (Leontiev, 1979, p. 63)

Segundo Leontiev “ações e operações têm diferentes origens, diferentes dinâmicas, e diferentes destinos” (Leontiev, 1979, p. 64). As operações são o resultado da transformação de uma ação devido à sua inclusão noutra ação, resultando no que o autor denominou de “tecnização”. Leontiev (1979) dá um exemplo ilustrativo – a formação de operações requeridas para conduzir um automóvel – inicialmente a troca de mudanças, por exemplo, aparece como uma ação subordinada a um objetivo mas, subsequentemente tal ação é incluída numa ação mais complexa, por exemplo, a mudança de velocidade do automóvel, nesse caso torna-se um dos métodos para desempenhar essa ação, ou seja, torna-se uma operação:

> O condutor já não distingue esse objetivo (…) é como se trocar de mudanças sob condições normais não existisse. (…) Sabemos que esta operação pode “sair” completamente da atividade do condutor e ser desempenhada automaticamente. Isto é geralmente o destino das operações que, mais tarde ou mais cedo, se tornam uma função de uma máquina. (Leontiev, 1979, p. 64)

Em resumo, Leontiev propõe que na análise da atividade dos seres humanos sejam consideradas várias “unidades”: em primeiro lugar, atividades distintas (particulares), que têm como critério o motivo que as impulsiona; em segundo lugar, ações, ou seja, processos subordinados aos objetivos conscientes; e, finalmente, operações, que dependem diretamente das condições em que os objetivos concretos são atingidos. Existe uma relação dinâmica entre estas unidades pois atividades, ações e operações estão constantemente em processo de transformação, podendo uma ação tornar-se uma operação e vice-versa, assim como uma atividade pode tornar-se uma ação caso o motivo mude. O esquema da Figura 2, apresentado em Rogers e Scaife (1997), pretende interpretar a estrutura e dinâmica das unidades da atividade.

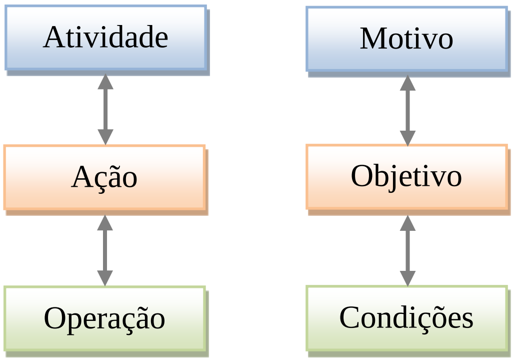


Figura 2 – Estrutura dos níveis da atividade.

Com Leontiev a unidade de análise da teria da atividade deixou de ser individualmente focada e, embora o autor não tenha expandido graficamente o modelo triangular de Vygotsky para um modelo de um sistema coletivo de atividade, a sua teoria poderia ser representada pelo modelo da Figura 3 (Engeström, 2001). Tal modelo representa os componentes da atividade humana e as suas relações.

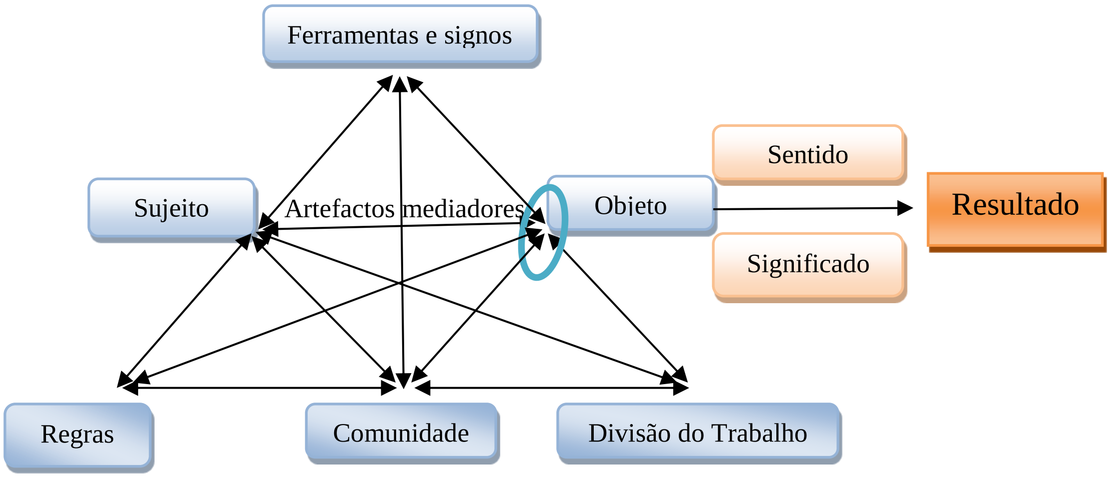


Figura 3 – Estrutura de um sistema de atividade humana.
(Adaptado de Engeström, 2001, p. 135)

Segundo Engeström (2001), “quando a teoria da atividade se tornou internacional, as questões relativas à diversidade e o diálogo entre diferentes tradições ou perspetivas tornaram-se sérios e crescentes desafios” (p. 135). A teoria da atividade necessitava de ser desenvolvida, nomeadamente, era necessário desenvolver ferramentas conceptuais para compreender o diálogo, as múltiplas perspetivas, e as redes de interação dos sistemas de atividade. Esse desenvolvimento conduziu ao que Engeström (2001) denominou de terceira geração da teoria da atividade.

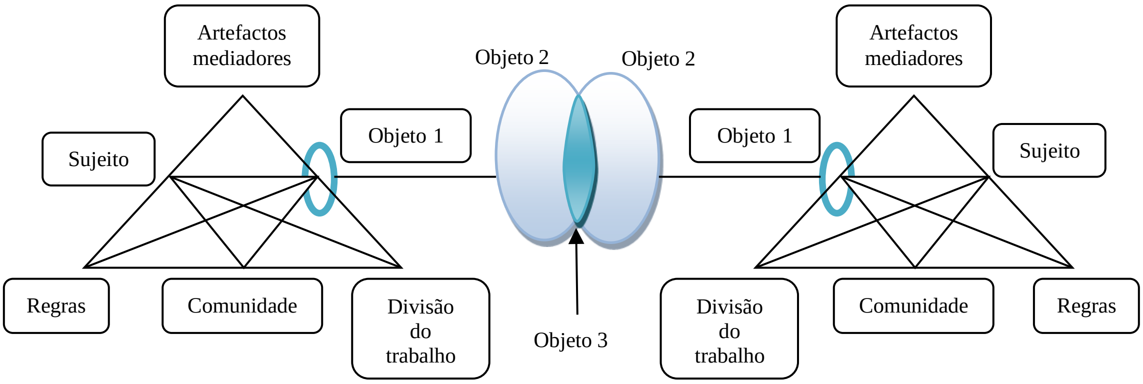


Figura 4 – Interação de dois sistemas de atividade como modelo mínimo para a terceira geração da teoria da atividade.
(Adaptado de Engeström, 2001, p. 136)

A teoria da atividade, correntemente, pode ser resumida por cinco princípios: (i) a unidade primária de análise é um sistema coletivo de atividade, mediado por artefactos e orientado para o objeto, considerado na sua rede de relações com outros sistemas de atividade; (ii) um sistema de atividade é sempre uma comunidade de múltiplos pontos de vista, tradições e interesses; (iii) um sistema de atividade toma forma e é transformado durante longos períodos de tempo; (iv) as contradições desempenham um papel central como fontes de mudança e de desenvolvimento; e (v) os sistemas de atividade podem sofrer transformações expansivas (Engeström, 2001).

2.1.3. Noção de esquema

A noção de esquema é absolutamente central na teoria de Piaget. Para este autor os esquemas constituem os meios que permitem ao sujeito assimilar as situações e os objetos com os quais é confrontado (Rabardel, 2002). Vergnaud adaptou as ideias de Piaget e desenvolveu a teoria dos campos conceptuais, onde o conceito de esquema é também essencial: "sem esquemas e sem situações não se pode compreender o desenvolvimento do pensamento" (Vergnaud, 2007, p. 288). Vergnaud (2007) refere: "redefini o conceito de esquema de maneira mais rigorosa e mais analítica, sem afastar-me, creio, das ideias que Piaget tinha na cabeça" (p. 291).

De acordo com Vergnaud, um esquema: (i) é uma totalidade funcional dinâmica; (ii) é uma organização invariante da atividade para uma classe definida de situações;

(iii) compreende necessariamente quatro categorias de componentes – um objetivo (ou vários), sub-objetivos e antecipações; regras de ação, de tomada de informação e de controlo; invariantes operatórios (*conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação*) e possibilidade de inferência; e (iv) é uma função num espaço temporalizado de dimensão *n*, que toma valores num espaço igualmente temporalizado de dimensão *n'* (com *n* e *n'* muito grandes) (Vergnaud, 2007). Vergnaud considera que a primeira definição corresponde às reflexões de Piaget enquanto a segunda vai um pouco mais longe. Esta foi-lhe sugerida pela noção de algoritmo – uma regra que permite tratar todos os problemas dentro de uma classe de situações – tal regra permite chegar a um resultado num número finito de passos, caso exista solução, ou possibilita provar que não existe solução. A terceira definição é analítica e nas palavras do autor "vai mais longe do que Piaget, Vygotsky, e Bruner poderiam escrever" (Vergnaud, 2007, p. 292), pressupõe que são necessárias categorias para reconhecer a informação e selecionar o que é pertinente – os *conceitos-em ação* são centrais na organização dos esquemas e os *teoremas-em-ação* (proposições tidas como certas sobre o real) são os meios para inferir os objetivos e as regras de modo a adaptar a atividade à situação. Em relação à quarta definição Vergnaud diz "não sei dar-lhe hoje um conteúdo concreto; contudo, conservo-a porque expressa bem a ideia de que se trata de uma função complexa" (Vergnaud, 2007, p. 292).

Para Vergnaud, a maior parte da nossa atividade cognitiva é feita de esquemas: "metaforicamente, pensar é um gesto, com o sentido amplo de produzir uma sequência de ações ou operações sobre certas circunstâncias; com objetivos, sub-objetivos, recolha e tratamento de informação, controlo, prazer ou desagrado" (Vergnaud, 1998, p. 172). A ideia de esquema serve para descrever comportamentos familiares mas também para descrever e compreender o processo de resolução de problemas, sendo para tal necessário analisar os diferentes componentes dos esquemas. Segundo Vergnaud (1998) o problema da conceptualização, aspeto central na aprendizagem, deve ser considerado como a chave da cognição e, por isso, o autor introduziu as ideias dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação.

> Conceitos-em-ação: em cada ação, nós escolhemos uma pequena parte da informação disponível. Apesar disso necessitamos de uma variedade de categorias para que essa seleção tome lugar, se tomarmos a palavra "categoria" para figurar o sentido largo de objeto, classe, predicado, condição,

> etc. Os conceitos-em-ação são relevantes, ou não relevantes, ou mais ou menos relevantes para identificar e selecionar a informação. (Vergnaud, 1998, p. 173)

Os conceitos-em-ação podem ser mais ou menos relevantes mas não faz sentido classificá-los de verdadeiros ou falsos, já os teoremas-em-ação podem ser verdadeiros ou falsos. Vergnaud (1998, 2007) considera que existe uma relação dialética entre os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação (Figura 5), no entanto, salienta que estes conceitos não devem ser confundidos.

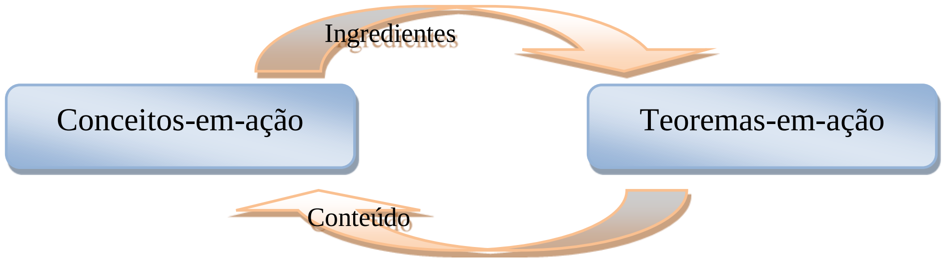


Figura 5 – Relação dialética entre conceito-em-ação e teorema-em-ação.

Vergnaud (1998) dá exemplo de quatro problemas onde os conceitos relevantes envolvidos são os mesmos mas cujo grau de dificuldade é diferente, sendo um teorema-em-ação que faz a diferença:

> A: A Janet tem 7 berlindes. Ela ganha 5. Com quantos berlindes fica?
> B: O Paul tem 12 berlindes. Ele perde 5. Com quantos berlindes fica?
> C: O Hans tem 9 berlindes. Ele joga ao berlinde com a Ruth. Ele tem agora 14 berlindes. O que aconteceu durante o jogo?
> D: A Ruth acabou de jogar ao berlinde com o Hans, e perdeu 5 berlindes. Ela agora tem 7 berlindes. Quantos berlindes tinha antes de jogar com o Hans? (p. 174)

Apesar dos conceitos relevantes envolvidos serem os mesmos, os problemas A, B e C são resolvidos mais facilmente do que o problema D que, segundo o autor, muitos alunos com idades entre os sete e oito anos, erram. No problema D o raciocínio necessário para encontrar o estado inicial assenta num "forte teorema-em-ação: $I = T(F) \Rightarrow F = T^{-1}(I)$, onde I é o estado inicial, F o estado final, T a transformação direta e T^{-1} a transformação inversa" (p. 174). Os teoremas-em-ação são algo mais do que os conceitos necessários para os expressar e ao serem usados para resolver tarefas permitem enriquecer os significados dos conceitos-em-ação.

Para Vergnaud (2007) “a conceptualização pode ser definida como a identificação dos objetos do mundo, das suas propriedades, relações e transformações; esta identificação pode ser direta ou quase-direta, ou pode resultar de uma construção” (p. 299). O autor considera que os invariantes operatórios formam um conjunto que engloba os vários tipos de conhecimento (Figura 6). É a observação da atividade em situação que permite detetar os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação utilizados pelo sujeito conscientemente ou não.

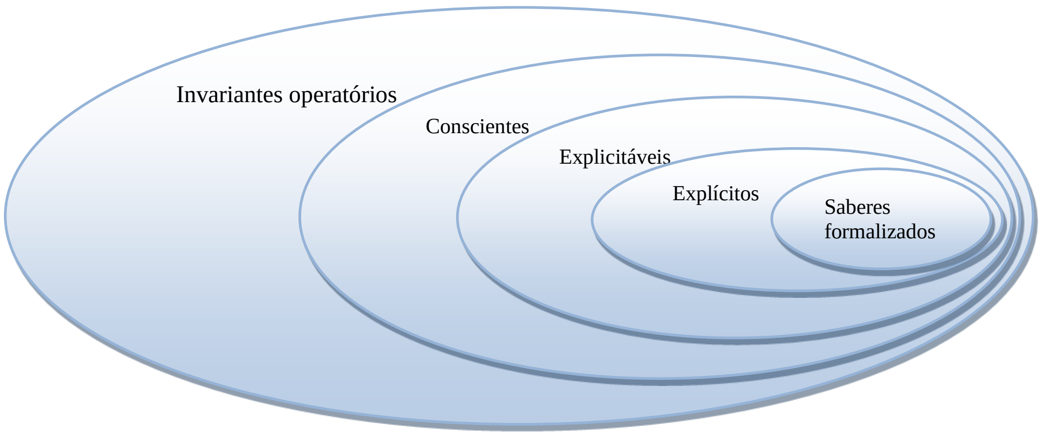


Figura 6 – Diagrama invariantes operatórios, conhecimento consciente explicitável, explícito e formalizado. (Adaptado de Vergnaud, 2007, p. 299)

2.2. Esquemas de utilização

Na ótica da perspetiva instrumental, a análise dos invariantes operatórios permite identificar as características das situações em que os indivíduos se envolvem, que tanto podem ser situações familiares para as quais já foram constituídos os invariantes operatórios, como situações em que a sua elaboração está em curso (Rabardel, 2002).

Vérillon e Rabardel (1995) denominam os esquemas associados à utilização de artefactos de *esquemas de utilização* – “os esquemas de utilização podem ser considerados como representativos e invariantes operatórios, correspondentes a classes de situações da atividade instrumentada” (p. 12). Para Rabardel (2002), os esquemas de utilização pertencem a duas dimensões da atividade: (i) atividades relacionadas com tarefas "secundárias" – gestão das características e propriedades próprias do artefacto; e (ii) atividades primárias ou principais – orientadas para o objeto da atividade e para as quais o artefacto é um meio para as desempenhar.

Os esquemas de utilização podem ser divididos em vários níveis:

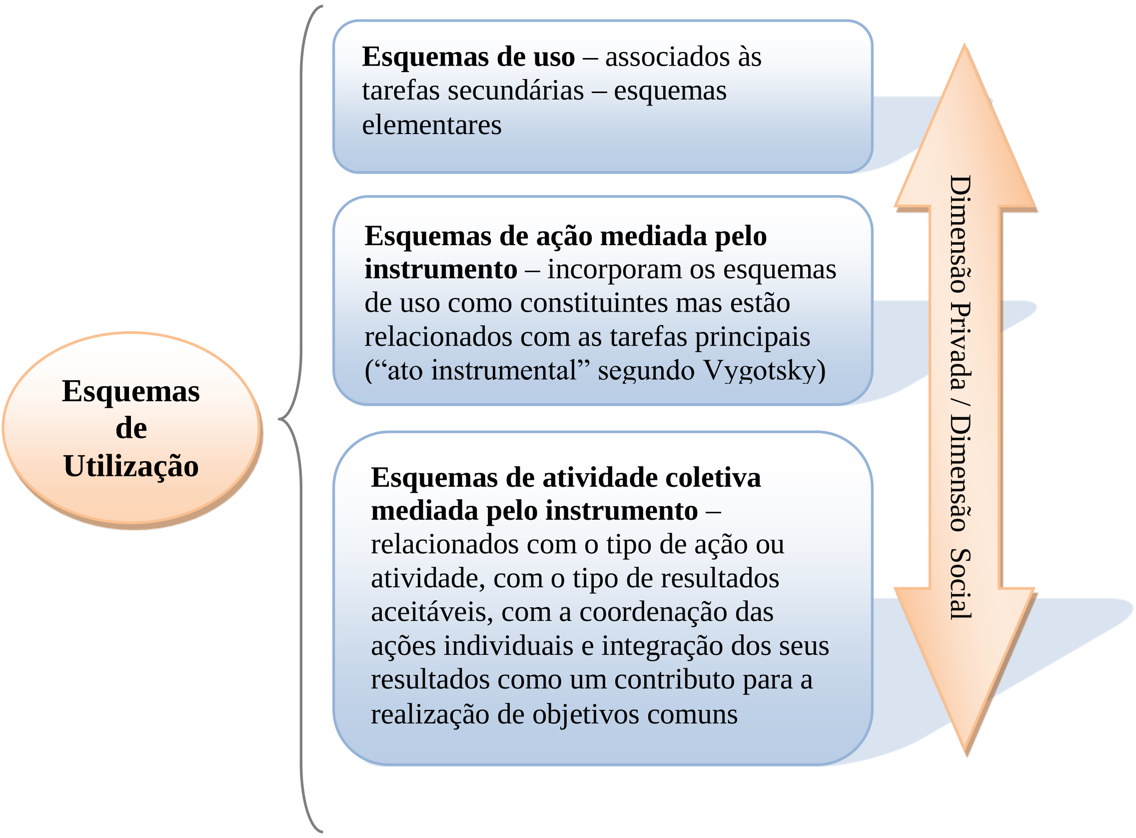


Figura 7 – Esquemas de utilização.

Estes níveis não se referem a uma propriedade dos próprios esquemas mas sim ao papel que desempenham na atividade do sujeito (Rabardel, 2002). O mesmo esquema, dependendo da situação, pode ser considerado um esquema de uso ou um esquema de ação mediada pelo instrumento, por exemplo, a edição da expressão analítica de uma função para um aluno com experiência é um esquema de uso, enquanto para um aluno que está a aprender o que é necessário para editar uma expressão, corresponde a um esquema de ação mediada pelo instrumento. Podemos ver a semelhança entre este exemplo e o de Leontiev (1979) relativamente à definição de operação e de ação.

Para Rabardel (2002) estes tipos de esquemas são mutuamente dependentes:

> Com base nos esquemas de uso e nos esquemas de ação mediada pelo instrumento, os esquemas de atividade coletiva mediada pelo instrumento podem surgir, ganhar forma e serem generalizados. Por outro lado, os esquemas coletivos mediados pelo instrumento são a fonte a partir da qual os esquemas de uso e os esquemas de ação mediada pelo instrumento se podem desenvolver e ganhar forma, etc. (p. 84)

Os esquemas de utilização permitem organizar a ação de modo a utilizar o artefacto, e como tal, dependem das propriedades do próprio artefacto. Porém, não podem ser aplicados diretamente, têm que ser adaptados à especificidade de cada situação. No caso de situações familiares, os esquemas de utilização são fáceis de mobilizar, estando ao nível da automação. Em situações novas mas semelhantes os esquemas passam por uma generalização e diferenciação. Em situações novas são produzidos novos esquemas (Figura 8).

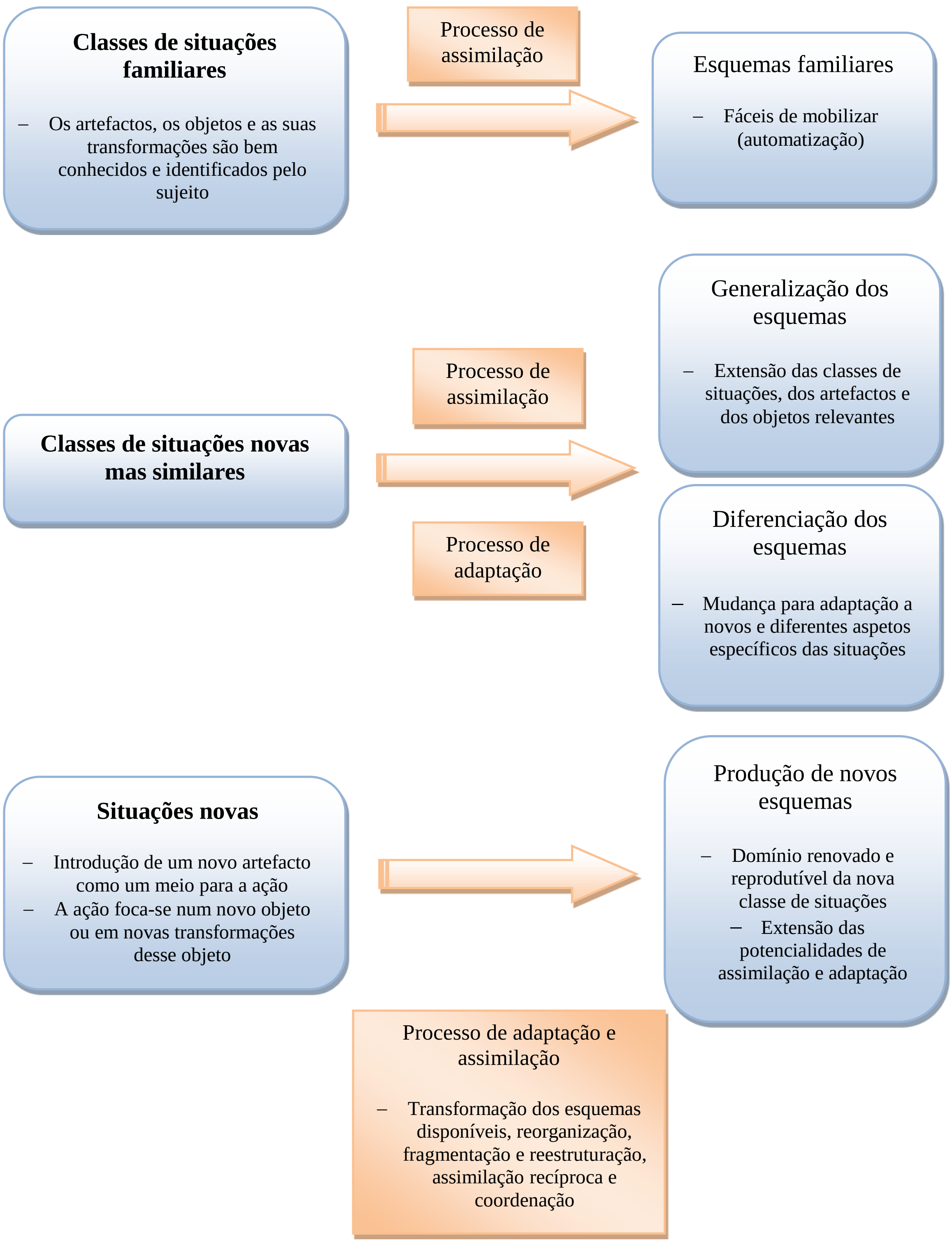


Figura 8 – Implementação dos esquemas de utilização de acordo com a particularidade das situações.

2.3. Definição psicológica de instrumento

A distinção entre artefactos e instrumentos é de grande importância na abordagem instrumental. Em antropologia a palavra artefacto designa algo que sofreu transformação, ainda que mínima, de origem humana, não se restringindo a algo material (físico), podendo também ser aplicado a sistemas simbólicos. Para Rabardel (2002) o termo artefacto é um termo "neutro", uma vez que, não especifica nenhum tipo particular de relação com o "objeto" e é nesse sentido que o termo é usado na abordagem instrumental. Vérillon e Rabardel (1995) salientam a diferença entre artefacto e instrumento, considerando que um instrumento é um constructo psicológico:

> A questão é que nenhum instrumento existe por si próprio. Uma máquina ou um sistema técnico não constituem imediatamente uma ferramenta para o sujeito. Mesmo construído explicitamente como uma ferramenta, não é, como tal, um instrumento para o sujeito. Torna-se [um instrumento] quando o sujeito é capaz de se apropriar dele para si próprio – é capaz de subordiná-lo como um meio para o seu fim – e, nesse sentido, integrá-lo na sua atividade. (p. 10)

Os autores propuseram um modelo para caracterizar situações de atividade instrumentada (IAS) que destaca a característica intermediária do instrumento e tem em conta as múltiplas relações que se podem estabelecer entre os três elementos constitutivos da situação de atividade instrumentada (Figura 9). Para além da relação direta sujeito – objeto, outras relações são consideradas: interações entre o sujeito e o instrumento, entre o instrumento e o objeto da ação e interações entre o sujeito e o objeto mediadas pelo instrumento. Apesar do modelo IAS não cobrir todas as características de situações onde a atividade é instrumentada, por exemplo, não inclui a dimensão coletiva, coloca em destaque as múltiplas interações que se podem estabelecer entre os três polos que estão sempre presentes no uso de um instrumento.

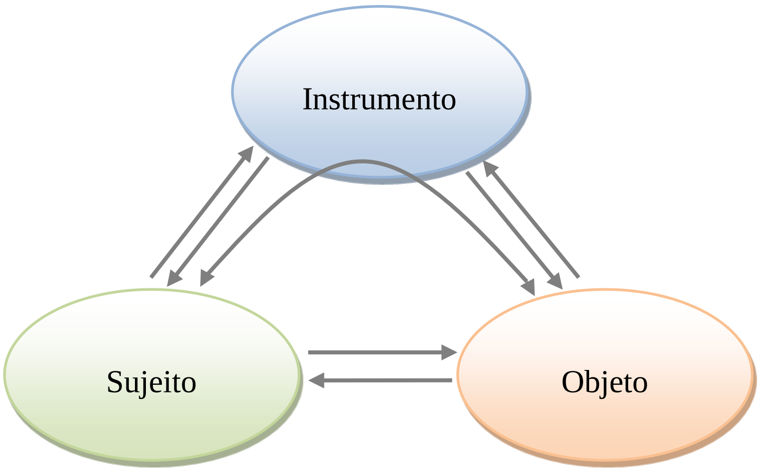


Figura 9 – Modelo IAS.
(Adaptado de Vérillon & Rabardel, 1995, p. 11)

O modelo pode ser ilustrado com um exemplo simples, no caso da calculadora gráfica: a visualização da representação gráfica de uma função quadrática. O aluno necessita ter alguns esquemas que lhe permitam visualizar a representação gráfica de uma função na calculadora (interação sujeito – instrumento). Ao usar a calculadora gráfica para visualizar uma função quadrática, o aluno tem que desenvolver esquemas que lhe permitam visualizar aquele tipo de função (interação instrumento – objeto). Nesse processo o aluno adquire conhecimentos sobre o comportamento das funções quadráticas (interação sujeito – objeto mediada pelo instrumento), e esse conhecimento pode levá-lo a escolher uma janela mais apropriada numa próxima ocasião (modificação da forma de interação anterior sujeito – instrumento), e assim sucessivamente.

Um instrumento é um meio para a ação e, mais geralmente, para a atividade. Na ação o instrumento é um operante, uma vez que ele desempenha uma tarefa, estando a natureza da tarefa obviamente relacionada com o objeto da atividade e podendo ser, portanto, bastante variável. O instrumento tem, no entanto, um aspeto ainda mais geral, pois para além das especificações do presente ele pertence a uma classe de ações e situações, podendo ser utilizado no futuro em situações que pertencem à mesma classe. Através desta preservação, o instrumento pode ser visto como uma capitalização de experiências acumuladas (cristalizadas) e, nesse sentido, todo o instrumento é conhecimento. Esse conhecimento é capitalizável nas transformações materiais que constituem o artefacto e nos usos associados, formando uma entidade mista composta pelo artefacto e pelos seus modos de uso (Rabardel, 2002).

O ponto central da abordagem instrumental prende-se com o facto de um instrumento não poder ser reduzido ao artefacto, sendo antes visto como uma entidade mista, nascida do sujeito e do objeto:

> O instrumento é uma entidade composta constituída por um componente artefacto (um artefacto, uma fração de um artefacto ou um conjunto de artefactos) e um componente esquema (um ou mais esquemas de utilização, muitas vezes ligados com esquemas de ação mais gerais). Um instrumento portanto consiste em dois tipos de entidades: - um artefacto material ou simbólico produzido pelo sujeito ou por outros; - um ou mais esquemas de utilização, resultantes de uma construção autónoma específica do sujeito, ou de um esquema de utilização social anteriormente formado fora do sujeito. (Rabardel, 2002, p. 86)

Um instrumento não é apenas algo que faz parte do mundo exterior do sujeito ou que está disponível para este realizar uma certa tarefa, é também uma produção ou construção do próprio sujeito.

Os dois componentes de um instrumento estão associados entre si mas têm também uma relação de relativa independência, uma vez que, por um lado, o mesmo esquema de utilização pode ser aplicado a uma gama de artefactos pertencentes à mesma classe ou até a classes diferentes (por exemplo, os esquemas de utilização associados à janela de visualização de uma calculadora gráfica podem ser transpostos de uma máquina para outra) e, reciprocamente, um artefacto pode ser integrado numa gama de esquemas de utilização em que lhe é atribuído um significado ou funções diferentes (por exemplo, uma chave de fendas pode ser utilizada como um martelo).

O instrumento pode ter uma natureza mais efémera, devido a circunstâncias particulares da situação com que o sujeito é confrontado, ou mais permanente, sendo retido como um todo que ficará disponível para futuras ações. Esse todo dinâmico desenvolve-se à medida que o sujeito o envolve nas ações.

Para os autores da abordagem instrumental, esta definição de instrumento permite, por um lado, que este seja visto como uma forma de acumulação de experiências, ou de conhecimento, no sentido referido por Leontiev e, por outro lado, reconhecer o seu papel de mediação, que pode ser visto na relação entre o instrumento e a ação, uma vez que o sujeito escolhe certos componentes do seu ambiente como instrumentos para atingir o seu objetivo, ou seja, como um meio para a sua ação (Rabardel, 2002).

Um artefacto não é um instrumento ou um componente de um instrumento por si próprio, é instituído como instrumento pelo sujeito como um meio para atingir os objetivos da ação, ou seja, os artefactos integram a atividade. Um artefacto pode, portanto, ter um estatuto instrumental muito diferente consoante a situação, diferentes momentos da situação ou consoante os sujeitos. O artefacto é enriquecido através das situações em que, circunstancialmente, o sujeito o envolve como meio para a ação – o campo instrumental do artefacto vai sendo construído pelo sujeito e inclui: "o conjunto de esquemas de utilização que podem ser introduzidos com vista a formar um instrumento; o conjunto dos objetos sobre os quais [o artefacto] permite ao sujeito atuar; o conjunto de transformações e mudanças de estado que [o artefacto] permite o sujeito executar" (Rabardel, 2002, p. 88). Os esquemas de utilização do artefacto tornam-se, por sua vez, cada vez mais ricos e variados com a evolução do seu campo instrumental.

2.4. Génese instrumental

Vérillon e Rabardel (1995) denominam o processo através do qual os sujeitos desenvolvem os seus instrumentos por génese instrumental. Uma vez que este processo diz respeito aos dois polos da entidade instrumental, o artefacto e os esquemas de utilização, também ele é constituído por duas dimensões e duas orientações distintas mas que estão muitas vezes relacionadas: instrumentalização, dirigida para o artefacto e instrumentação, orientada para o sujeito.

Os processos de instrumentalização e instrumentação resultam da atividade do sujeito, através da atribuição de função ao artefacto e da adaptação dos esquemas de utilização. Os dois processos, em conjunto, contribuem para o surgimento e evolução dos instrumentos (Figura 10).

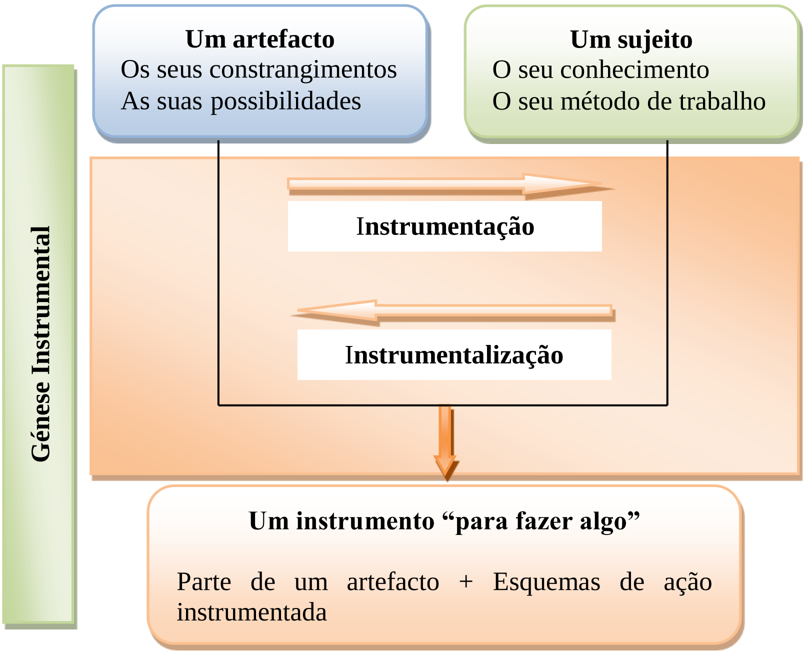


Figura 10 – Génese instrumental como combinação de dois processos.
(Adaptado de Trouche, 2004, p. 289)

Os dois processos estão intimamente relacionados. Trouche (2004) considera que é difícil distingui-los claramente, ou seja, é difícil identificar um esquema de instrumentação ou de instrumentalização: "Todas as atividades estão orientadas de acordo com alguns objetivos relacionados com a realização de tarefas específicas, portanto podemos falar sobre *esquemas de ação instrumentada*, compreendendo que têm a marca dos dois processos" (Trouche, 2004, p. 295).

No que diz respeito ao processo de *instrumentalização*, Rabardel (2002) comenta:

> O processo de instrumentalização diz respeito ao surgimento e evolução do componente artefacto do instrumento: seleção, reagrupamento, produção e instituição de funções, desvios e catacrese[5], transformação do artefacto (estrutura, funcionamento, etc.) que prolonga criações e realizações de artefactos cujos limites são, portanto, difíceis de determinar. (p. 103)

[5] Figura de estilo que consiste no emprego de termos com significado diferente do usual, por falta de termos próprios na língua. No contexto, é empregue para designar o uso de uma ferramenta em situações para as quais não foi concebida.

O processo de instrumentalização é fundamentado nas características e propriedades intrínsecas do artefacto. O sujeito dá-lhes um estatuto de acordo com a ação em curso e a situação. Essas propriedades intrínsecas podem, para além da ação em curso, reter o estatuto de função adquirida, constituindo para o sujeito uma característica e uma propriedade permanente do componente artefacto do instrumento. No entanto, a função adquirida é uma propriedade extrínseca pois é atribuída pelo sujeito (Rabardel, 2002).

Podem distinguir-se dois níveis de instrumentalização através da atribuição de função a um artefacto: (i) num primeiro nível, a instrumentalização é local, ligada a ações específicas e às circunstâncias da sua ocorrência, e (ii) num segundo nível, a função adquirida é duradouramente retida como uma propriedade do artefacto em relação a uma classe de ações, de objetos da atividade e de situações. Em ambos os casos, não existe transformação física do artefacto, sendo este apenas enriquecido com propriedades extrínsecas adquiridas momentânea ou duradouramente. Contudo, a instrumentalização do artefacto pode também implicar a sua transformação, com o seu uso, ou por antecipação, sendo o artefacto transformado para se adaptar à função (Rabardel, 2002). As conceções e preferências do utilizador podem conduzir a uma mudança ou personalização do artefacto. Por exemplo, um aluno que coloque na calculadora um programa para calcular os zeros de uma função quadrática está também a alargar o artefacto (Drijvers & Trouche, From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, 2008).

Relativamente ao processo de *instrumentação*, Rabardel (2002) refere:

> O processo de instrumentação diz respeito ao surgimento e evolução dos esquemas de utilização e da ação mediada pelo instrumento: constituição, funcionamento, evolução por adaptação, coordenação combinada, inclusão e recíproca assimilação, assimilação de novos artefactos para esquemas já constituídos, etc. (p. 103)

A descoberta progressiva das propriedades intrínsecas do artefacto é acompanhada por uma adaptação dos esquemas do sujeito e por mudanças na significação do instrumento resultantes da associação do artefacto com novos esquemas. O processo de instrumentação consiste na génese desses esquemas, na assimilação de novos artefactos em esquemas (dando novos significados aos artefactos) e na adaptação dos esquemas (mudanças em termos de significação) (Rabardel, 2002).

> Através das géneses instrumentais, o sujeito elabora os seus instrumentos dentro de um conjunto de possibilidades oferecidas pelas potencialidades dos artefactos e dos seus esquemas de utilização próprios ou dos socialmente propostos. Os instrumentos procedentes das géneses instrumentais não são nunca os únicos que poderiam ser desenvolvidos pelos sujeitos (…) Existem sempre outras potencialidades do artefacto ou esquemas que poderiam ser mobilizados e que o poderão ser mais tarde. (Rabardel, 1999, p. 9)

Para esclarecer esta ideia Rabardel (1999) introduz o conceito de *zona de valor funcional de um artefacto* que ilustra com o esquema representado na Figura 11. O artefacto é construído para permitir um conjunto de funções – *zona funcional socialmente definida*, no entanto, os valores funcionais dos artefactos reveláveis pelas géneses instrumentais não se inserem todos nessa zona, por exemplo, devido à catacrese. Num determinado momento, para um determinado sujeito, existe um conjunto de valores funcionais do artefacto que definem uma segunda zona – *zona funcional potencial*, que se sobrepõe parcialmente à primeira. Finalmente, existe uma terceira zona – *zona funcional dos instrumentos realmente desenvolvidos*, que corresponde aos instrumentos desenvolvidos pelos sujeitos no curso das géneses instrumentais.

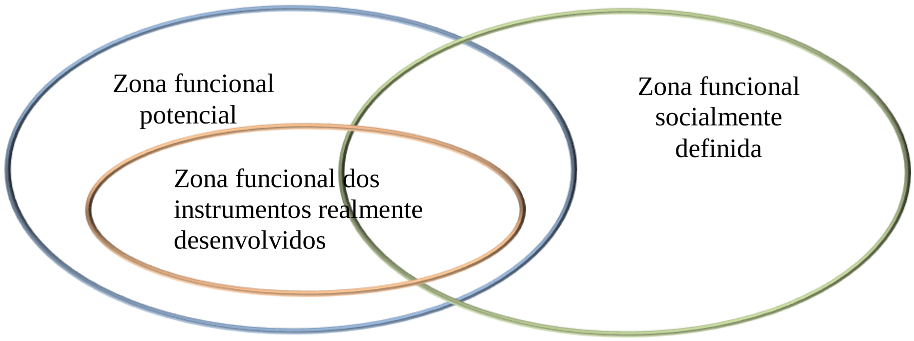


Figura 11 – Diferentes zonas de valor funcional de um artefacto.
(Adaptado de Rabardel, 1999, p. 10)

No plano da didática as diferentes zonas de valor funcional de um artefacto são de grande importância pois, “a partir dos mesmos artefactos podem ser construídos múltiplos instrumentos pelos alunos e pelos professores; instrumentos cujos efeitos no processo de aprendizagem podem ser profundamente diferentes, para o melhor … ou para o pior" (Rabardel, 1999, p. 10). O autor salienta a necessidade do professor definir a zona funcional do artefacto que pretende efetivamente desenvolver nos seus alunos tendo em conta o que eles são capazes, os esquemas construídos ou a construir e os objetivos didáticos.

Rabardel (1999) usa o conceito de *zona de desenvolvimento proximal* definido por Vygotsky para caracterizar o espaço no qual "se inscreve a construção das escolhas didáticas [do professor] quando se pretende ter em conta o papel que os instrumentos podem ter" (p. 11). Esse espaço situa-se no ponto de encontro de três zonas: (i) uma zona proximal de aprendizagem da matemática que caracteriza os objetivos em termos do desenvolvimento dos saberes matemáticos que os alunos podem alcançar com a ajuda do professor; (ii) uma zona proximal de desenvolvimento instrumental (para alunos e professores) em função dos artefactos disponíveis; e (iii) uma zona de atividades potencialmente possíveis com esses instrumentos (Figura 12).

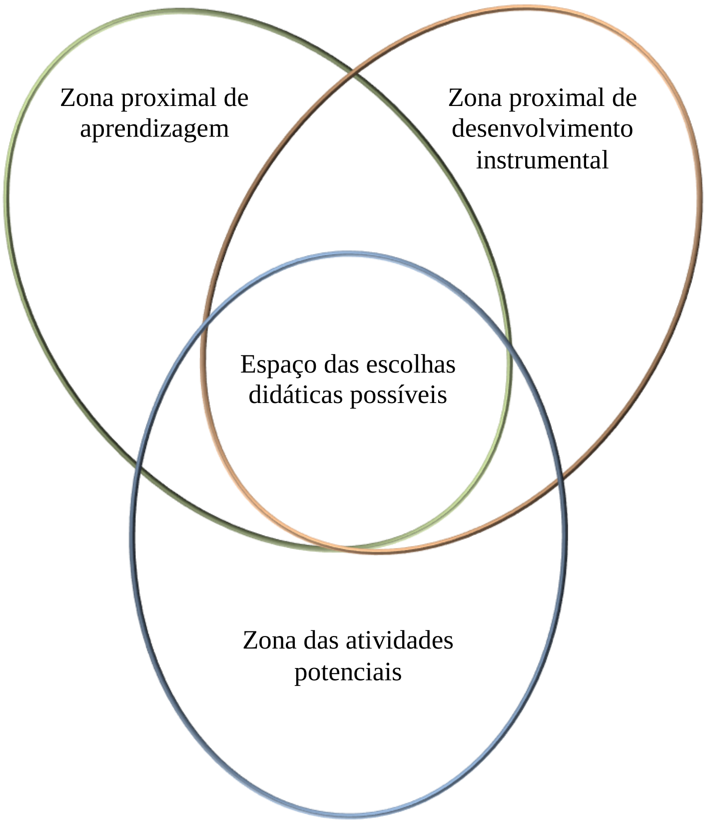


Figura 12 – Zona das escolhas didáticas.
(Adaptado de Rabardel, 1999, p. 11)

Estas ideias expressas por Rabardel realçam a importância do papel do professor no processo ensino-aprendizagem e, embora o seu foco particular diga respeito ao desenvolvimento de instrumentos, podemos ver a semelhança entre as suas ideias e as de outros autores, como por exemplo, Oliveira e Ponte (1997) que consideram três domínios decisivos na pedagogia: (i) o currículo, através dos seus objetivos e da articulação entre os diversos conteúdos; (ii) o conhecimento sobre o aluno e o processo de aprendizagem; e (iii) a instrução, ou seja, o conhecimento necessário à organização e condução das aulas.

2.5. O processo da génese instrumental e a didática da matemática

A abordagem instrumental "reflete velhas ideias" (Drijvers & Trouche, 2008, p. 375) desenvolvidas por Vygotsky, entre outros, que foram, principalmente, apropriadas pelos investigadores franceses, em pesquisas no campo da didática da matemática, envolvendo ambientes de aprendizagem onde se privilegiava o uso de tecnologias. Tal abordagem permite compreender a complexidade do uso de ferramentas na educação matemática e os obstáculos e oportunidades que surgem durante a génese instrumental (Drijvers & Trouche, From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, 2008).

Para se compreender o processo de instrumentação é necessário estudar os constrangimentos e possibilidades do artefacto. No caso de *ambientes de aprendizagem computarizados* (CLE), esses constrangimentos estão relacionados com a *transposição computacional*, ou seja, o sujeito tem que representar simbolicamente o conhecimento e implementar a representação no sistema computacional (Trouche, 2004). Guin e Trouche (2002), referidos em Trouche (2004) fizeram a distinção entre três tipos de constrangimentos: (i) *constrangimentos internos*, intrinsecamente ligados ao *hardware*; (ii) *constrangimentos de comandos*, relacionados com a existência e forma sintática dos vários comandos; e (iii) *constrangimentos de organização*, relacionados com a organização do teclado e facilidade de uso do artefacto pelo utilizador.

Trouche (2004) salienta que os constrangimentos do artefacto podem contribuir para a construção de esquemas de utilização específicos. Para o autor, a organização da calculadora gráfica favorece o estudo gráfico de funções, uma vez que, para a maioria das máquinas, as teclas que permitem o estudo numérico das funções encontram-se "debaixo" das teclas que possibilitam o estudo gráfico.

Relativamente à calculadora gráfica, um constrangimento interno bastante conhecido, prende-se com o modo como é feita a representação gráfica de uma função (Consciência, 2003). Uma vez que tal representação está totalmente dependente da *janela de visualização* os alunos necessitam de desenvolver *esquemas de enquadramento* específicos, de modo a enfrentarem eficientemente tal fenómeno, o que está longe de ser um processo imediato e espontâneo como provam vários estudos (Artigue, 2002a, 2002b; Cavanagh & Mitchelmore, 2003; Rivera, 2007).

Drijvers (2000) realizou um estudo que pretendia responder à seguinte questão de investigação: "Quais são os obstáculos que os alunos encontram enquanto trabalham com uma calculadora simbólica?" (p. 195). A partir da análise da experiência dos alunos enquanto trabalhavam com a TI-92 foram identificados cinco obstáculos: (1) diferença entre a representação algébrica fornecida pela CAS e a que os alunos concebem como "mais simples"; (2) diferença entre cálculos algébricos e numéricos e o modo implícito como a CAS lida com essa diferença; (3) limitações da CAS e a dificuldade em providenciar estratégias para ultrapassar essas limitações; (4) incapacidade para decidir quando e como é que a CAS pode ser útil; (5) flexibilidade nos conceitos de parâmetro e variável que requer o uso da CAS. Podemos identificar nestes cinco obstáculos os constrangimentos a que Trouche se refere, e que provêm da componente tecnológica própria da máquina, no entanto, para que se possa lidar adequadamente com eles é necessário a compreensão matemática. Os obstáculos que os alunos encontram durante o processo de instrumentação oferecem oportunidades de aprendizagem pois, como mostra o estudo de Drijvers (2000), aos aspetos técnicos estão também, muitas vezes, associados aspetos conceptuais. Esses aspetos técnicos e conceptuais interferem uns com os outros e "co-desenvolvem-se" (Drijvers & Trouche, From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, 2008, p. 373) durante a génese instrumental.

2.5.1. A complexidade da génese instrumental

Os instrumentos não são isolados, constituem-se em sistemas de instrumentos. Rabardel (1999) refere que a constituição dos sistemas de instrumentos é função das tarefas e dos contextos mas também, no caso da matemática, da relação que o sujeito tem com esta. Artigue (2002b) faz referência à "inesperada complexidade da génese instrumental" (pág. 252). Por um lado, de acordo com as suas características, os alunos desenvolvem diferentes relações com a tecnologia, por outro lado, têm usualmente ao seu dispor vários artefactos (papel e lápis, régua, compasso, transferidor, calculadora) que podem ser transformados em instrumentos, de acordo com várias tarefas, e a articulação desses instrumentos nem sempre é um empreendimento fácil. Como referem Kieran e Drijvers (2006), muitas vezes não é claro para os alunos como podem compatibilizar o uso das ferramentas tecnológicas com as exigidas capacidades com lápis e papel.

Guin e Trouche (1999) descrevem uma experiência de instrumentação realizada com duas turmas providas de calculadoras simbólicas (TI-92). Os resultados da experiência mostraram que, em ambientes educacionais onde a calculadora gráfica (ou simbólica) se encontra disponível, podem distinguir-se duas fases no processo da génese instrumental. Numa primeira fase dá-se a descoberta dos vários comandos, dos seus efeitos e da sua organização. Essa fase é caracterizada por uma dependência muito forte da máquina em detrimento de outras fontes de informação disponíveis (ver Figura 13). Nessa primeira fase os alunos efetuaram um trabalho associado a um amplo uso dos vários comandos disponíveis, no entanto, as observações mostraram que raramente se referiam a *ferramentas de compreensão*, apesar de revelarem um primeiro nível de instrumentação com uma diversidade de técnicas e de estratégias. Quando os comandos começaram a ganhar significado matemático, os alunos passaram a focar a sua atenção num número limitado, tendo essa segunda fase sido caracterizada por uma atitude de desbaste relativamente às técnicas e estratégias da primeira fase. Essa segunda fase ocorreu simultaneamente com a progressiva consciencialização das potencialidades e constrangimentos do uso da calculadora e com uma decrescente confiança nos resultados por ela obtidos. Os alunos passaram a organizar as suas ações de acordo com um número restrito de comandos que, conscientemente, coordenavam uns com os outros e também com outras *ferramentas de informação* por meio do que os autores denominaram *ferramentas de compreensão*. O controlo do processo pelos alunos caracteriza-se por uma atitude consciente de considerar toda a informação imediatamente disponível, obtida quer pela calculadora, quer por outras fontes, e pela procura de consistência matemática entre ela, ou seja, caracteriza-se pela propensão para escolher as estratégias relevantes e evitar as irrelevantes (Guin & Trouche, 1999).

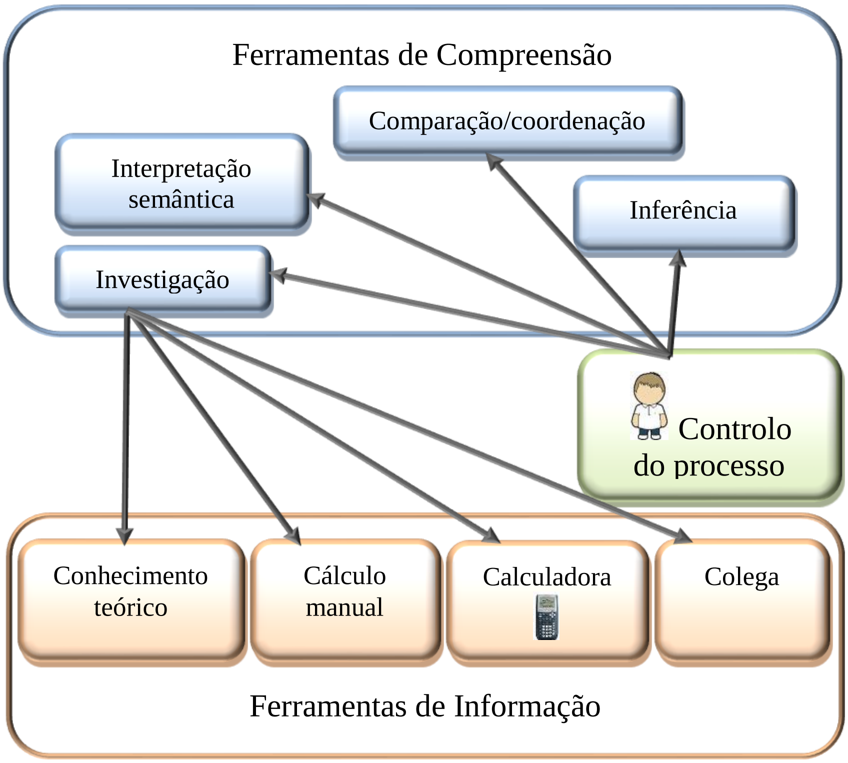


Figura 13 – Cálculo num ambiente com calculadora gráfica.
(Adaptado de Guin & Trouche, 1999, p. 216)

Os autores consideram que o perfil de comportamento matemático dos alunos determinará quanto tempo é que será necessário para ultrapassar este primeiro nível, mesmo que as situações de aprendizagem tenham sido organizadas pelo professor nesse sentido. A partir da observação dos alunos ao utilizarem a calculadora gráfica, definiram cinco perfis: (i) *método de trabalho aleatório* – caracterizado por dificuldades similares, quer num ambiente em que a calculadora está presente, quer em ambiente tradicional com papel e lápis; os alunos realizam as tarefas através do uso de estratégias de soluções anteriormente memorizadas ou de generalizações precipitadas; o controlo do processo é bastante fraco e é revelado por procedimentos de tentativa e erro com poucas referências a *ferramentas de compreensão* e sem estratégias de verificação dos resultados obtidos pela máquina; (ii) *método de trabalho mecânico* – caracterizado por fontes de informação mais ou menos restritas a pesquisas com a calculadora e a simples manipulações, mas sendo o raciocínio baseado na acumulação de resultados consistentes provenientes da calculadora; o controlo do processo permanece bastante fraco com poucas referências matemáticas; (iii) *método de trabalho engenhoso* – caracterizado por uma exploração de todas as fontes de informação disponíveis sendo o raciocínio baseado na comparação e confrontação dessa informação; o aluno tem um grau médio de controlo do processo, revelado por investigação de um elevado número de estratégias de solução imaginativas; (iv) *método de trabalho racional* – caracterizado por um reduzido uso da calculadora, sendo o principal trabalho efetuado no ambiente tradicional; o aluno tem um grande controlo no processo onde a inferência desempenha um importante papel no raciocínio; e (v) *método de trabalho teórico* – caracterizado pelo uso de referências matemáticas como uma fonte sistemática de recursos, sendo o raciocínio essencialmente baseado na analogia e na interpretação dos factos com constante verificação dos resultados produzidos pela calculadora. O resumo de cada um destes perfis encontra-se representado na Figura 14, onde a primeira linha diz respeito à *ferramenta de compreensão* mais usada; a segunda linha à *ferramenta de informação* mais usada; e a terceira linha ao método de prova mais usado.

Os autores referem que apesar de um aluno não poder ser exatamente classificado num destes cinco perfis, esta tipologia permitiu-lhes estabelecer diferentes características de comportamento dentro da turma e seguir a mudança de comportamento durante a pesquisa, concluindo que o processo de instrumentação evolui de modo diferente e durante um período variável de tempo de acordo com os tipos "extremos" de comportamentos identificados.

Esta experiência mostrou que o processo de instrumentação não conduz necessariamente a mais trabalho matemático, uma vez que, por um lado, pode "mascarar" deficiências no conhecimento matemático dos alunos e, por outro lado, pode revelar essas deficiências. No caso dos alunos mais fracos, a calculadora pode, por vezes, conduzir a comportamentos automáticos destituídos de reflexão e, noutras situações, os alunos não compreendem os efeitos dos comandos da calculadora e não conseguem encontrar consistência matemática para o resultado produzido pela máquina. Em qualquer das situações, os alunos não passam do primeiro nível de instrumentação porque é necessário conhecimento matemático específico de modo a "coordenar várias representações semióticas dos objetos matemáticos (por exemplo, a definição de função e o seu gráfico) assim como o seu manejamento (por exemplo, trabalhar com cálculos aproximados e exatos) ” (Guin & Trouche, 1999, p. 223).

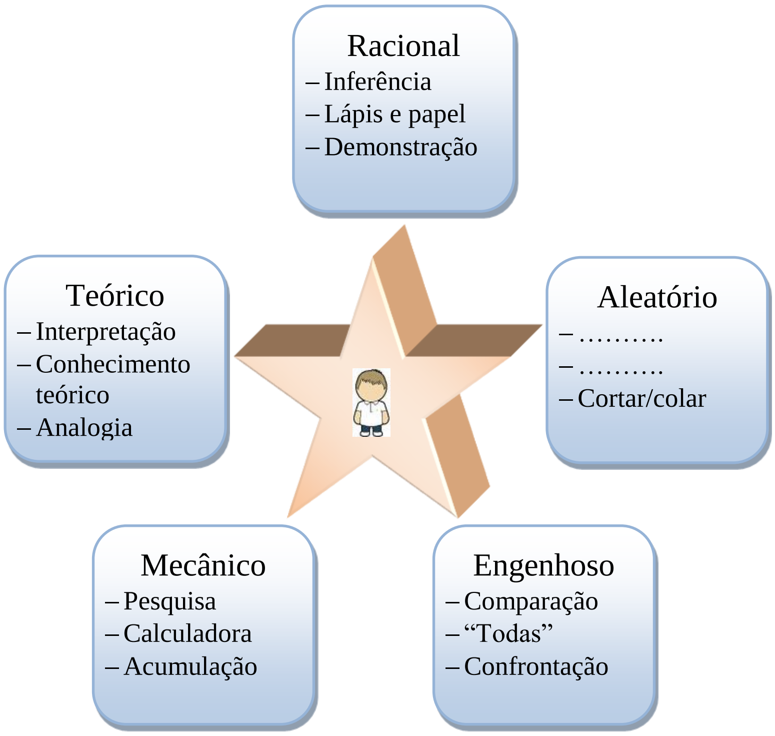


Figura 14 – Tipologia dos diferentes comportamentos dos alunos.
(Adaptado de Guin & Trouche, 1999, p. 216)

Esta pesquisa veio também mostrar que o processo de instrumentação é complexo e lento pois “requer tempo suficiente para alcançar a reorganização dos procedimentos, mesmo para os melhores alunos que estabeleceram uma relação com a máquina” (Guin & Trouche, 1999, p. 223). Contudo, os autores sublinham a vantagem da aprendizagem que tem lugar, para além da instrumentação da calculadora, através das conexões e reformulações que ela suporta, citando Noss e Noyles (1996) que referem não haver dúvida em relação ao impacto efetivo da máquina na conceptualização dos números e das funções.

Artigue (2002b) faz referência à tese de Defouad que se prende com a génese instrumental da calculadora TI-92, tendo por foco uma única tarefa – o estudo da variação de funções. Tal como no estudo de Guin e Trouche (1999), esta pesquisa veio também mostrar a complexidade do processo de instrumentação: “a génese instrumental desenvolve-se no tempo de formas que não refletem a organização temporal do ensino formal devotado ao tópico da variação de funções […] e mesmo no final do ano letivo permanece frágil" (Artigue, 2002b, p. 255). Da análise dos dados recolhidos das entrevistas aos alunos selecionados, Defouad identificou três fases na instrumentação da variação de funções. Na primeira fase, os alunos permaneceram muito agarrados à cultura do estudo das funções iniciada no ano anterior com a calculadora gráfica, em que os intervalos de variação da função eram essencialmente inferidos através da leitura da representação gráfica. O uso do cálculo formal da aplicação "HOME" da calculadora simbólica, apesar da potencial utilidade, praticamente só foi usado para definir as funções e calcular ou confirmar as suas derivadas. Numa fase intermédia, apesar da aplicação gráfica desempenhar ainda um papel essencial, a aplicação HOME começou a ser usada e os alunos desenvolveram conexões entre diferentes aplicações. Finalmente, na terceira fase – *fase do cálculo* – os alunos desenvolveram esquemas instrumentados específicos e eficientes para analisarem a variação das funções através da conexão entre as aplicações gráficas e simbólicas da calculadora, tornando-se a aplicação simbólica a principal ferramenta do processo de resolução juntamente com o papel e lápis, enquanto a aplicação gráfica foi utilizada, principalmente, como uma ferramenta heurística, para antecipação e controlo.

As estratégias económicas pensadas pelos investigadores para a TI-92 antes de cada entrevista raramente eram escolhidas pelos alunos que preferiam fazer o que Artigue chama de *Zapping*[6] entre aplicações e verificação repetida das estratégias, demorando mais tempo do que era esperado a conseguirem uma conexão eficiente entre o registo algébrico e gráfico. Mais uma vez se salienta a lentidão do processo da génese instrumental: "durante o primeiro ano da experiência, a nossa atenção foi atraída pela lentidão e pelo rodeio[7] da génese instrumental" (Artigue, 2002b, p. 259). O perfil pessoal do aluno e o desenvolvimento do conhecimento matemático desempenham um importante papel na progressiva apropriação do instrumento. Por exemplo, os esquemas de enquadramento para a calculadora gráfica, essenciais para se obter uma visualização representativa do gráfico de uma função, dependem tanto das tarefas a que os alunos são expostos, como dos esquemas matemáticos relacionados que o aluno tem à sua disposição (Ruthven, 2002). Referindo-se ao caso do aluno Frederico, descrito em Artigue (2002b), Ruthven, destaca não apenas a complexidade do desenvolvimento dos

[6] O termo foi escolhido pela analogia entre o comportamento dos alunos e o dos indivíduos que estando a ver televisão mudam rapidamente de um canal para outro, com o comando.
[7] *Circuitousness* no original.

esquemas de enquadramento mas o facto da construção "de um sistema conceptual coerente e de um conceito de enquadramento global envolver a coordenação progressiva de muitos esquemas específicos" (p. 279).

Trouche (2003) mostra que uma complexificação do artefacto, como é o caso das calculadoras simbólicas relativamente às gráficas, pode conduzir a um empobrecimento do instrumento construído pelo aluno. O autor relata o caso de um aluno que trabalhou durante três meses com calculadoras gráficas e seis meses com calculadoras simbólicas em questões do tipo "a função dada tem limite $+\infty$ quando $x \to +\infty$?" (p. 790). Enquanto trabalhava com a calculadora gráfica o aluno explicava as suas conclusões com expressões do género "se $f(x)$ é muito maior que *x*, ou se a função cresce com grande velocidade estão está bem. Por outro lado, se a função decresce ou oscila então isso não é bom" (p. 790). Para o autor este tipo de resposta permite avançar com a hipótese dos esquemas construídos pelos alunos integrarem teoremas-em-ação do tipo: "Se $f(x)$ toma valores muito maiores que *x*, então o limite de *f* é infinito" ou "se o limite de *f* é infinito então *f* é necessariamente crescente". Por outro lado, ao trabalhar com a calculadora simbólica o aluno limitou-se a usar um único comando (cálculo do limite), o que aparentemente corresponde a uma simplificação do esquema:

> Um menor esforço a manipular o artefacto (o único esforço é de sintaxe para escrever corretamente) e um menor esforço na explicação (uma vez que o *software* assegura a correção dos resultados, a justificação do resultado, mesmo quando requerida pelo professor, parece menos necessária. (Trouche, 2003, p. 790)

O processo de instrumentação, neste caso, conduz a uma simplificação do esquema e a um empobrecimento dos invariantes operatórios. O aluno, num ambiente com a calculadora gráfica, deu explicações relacionadas com o *conceito-em-ação*, no entanto, alguns meses depois, num ambiente com a calculadora simbólica, não conseguiu dar nenhuma definição – houve um "desaparecimento[8] do conceito" (Trouche, 2003, p. 790). Todavia, isso não significa que o conceito de limite tenha "desaparecido", mas sim que passou de um resultado de um processo, num ambiente

[8] *Vanishing* no original

com calculadora gráfica, para um resultado de uma operação, num ambiente com calculadora simbólica (Trouche, 2005).

Relativamente à diferenciação dos processos de instrumentação, dentro do mesmo ambiente, Trouche (2004) mostra que quanto maior é a complexidade do ambiente, maior é essa diferenciação. O autor analisa os processos de instrumentação de dois alunos no que toca ao cálculo de um limite, num ambiente com calculadora simbólica (mais complexa que uma calculadora gráfica): enquanto o aluno 1 articulou todos os artefactos disponíveis dentro do ambiente (calculadora, papel e lápis, resultados teóricos), o aluno 2 limitou-se a usar uma tecla (cálculo do limite – uma só aplicação de um só artefacto) – "quanto mais complexo é um artefacto, mais simples parece a atividade" (Trouche, 2004, p. 293). No caso do aluno 2, a complexidade do artefacto não o ajudou a construir um instrumento eficiente.

Rivera (2007) realizou uma experiência de ensino com o objetivo de os alunos desenvolverem colectivamente um processo de resolução de inequações polinomiais, usando a calculadora TI-89. A experiência teve lugar em duas fases: (1) uso da calculadora para fazer generalizações acerca do gráfico de funções polinomiais, e (2) uso do conhecimento relativo ao gráfico das funções polinomiais para resolver uma desigualdade. Rivera identifica três fases no processo de instrumentação que denomina *total apego*, *separação parcial* e *separação total*. Inicialmente os alunos usaram a máquina para estudar o comportamento dos gráficos de funções polinomiais de grau par e "as suas ações gráficas imitavam o que viam a TI-89 fazer" (p. 295). A descrição do gráfico de uma função polinomial par era um reflexo da resposta da ação instrumentada (*total apego*). O modo como os alunos resolviam inequações (em fatores) no papel, sem recurso à TI-89, refletia as ações instrumentais adquiridas – desenho do referencial cartesiano, marcação dos zeros, aplicação do que tinham aprendido relativamente ao comportamento do gráfico da função em questão no esboço da representação gráfica e escrita da solução. No entanto, no esboço do gráfico os alunos perdiam um certo tempo pois calculavam várias imagens. Quando um grupo de alunos sugeriu que não era necessário obter um esboço muito correto do gráfico da correspondente função, rapidamente outro grupo compreendeu o valor dessa sugestão e conclui que só era necessário marcar as intersecções com o eixo *Ox* – ocorreu o que o autor considera uma *separação parcial* na instrumentação:

> Esta fase é caracterizada pela reflexão sobre a motivação, para além dos esquemas que desenvolveram à medida que usavam a ferramenta, com uma ênfase na avaliação das propriedades que eram essenciais e das que não eram e que, portanto, poderiam ser dispensadas. (Rivera, 2007, p. 296)

Posteriormente um aluno sugeriu que se usasse apenas a reta real em vez do plano cartesiano, dado que o eixo *Oy* era inútil – ocorreu o que o autor considera a *separação total* – a ferramenta foi totalmente transformada e "pavimentou o caminho para a invenção de um processo teórico abstrato" (p. 296) – os esquemas foram sendo refinados e emergiu um método para resolver inequações polinomiais tendo por base apenas os elementos necessários.

Rivera (2007) alerta, no entanto, para o que classifica de *fragilidade do conhecimento na atividade instrumentada*, ilustrando como "significados mediados pela ferramenta que estão todos corretos podem gerar uma resposta incorreta" (p. 301), com o exemplo de resposta de uma aluna que considerou que a função envolvida tinha apenas um zero de acordo com a representação que obteve na janela de visualização utilizada.

Kidron (2008) realizou um estudo empírico com o objetivo de analisar os efeitos da ação combinada entre discreto e contínuo na compreensão conceptual de limite, na definição de derivada. A autora pretendia que os alunos compreendessem que em certas equações diferenciais (em particular, na equação logística) a solução contínua obtida por métodos analíticos difere totalmente da solução numérica obtida por métodos discretos. Pretendia também abalar a noção intuitiva de que *graduais causas produzem graduais efeitos*. Através da análise da fonte de erro, os alunos deveriam concluir que na solução contínua a derivada é definida como um limite, enquanto no método numérico de Euler a derivada é definida como um termo da sequência $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para um pequeno Δx. Tal como outros estudos referidos atrás, também este mostrou que o processo da génese instrumental é complexo e requer tempo. Ao trabalharem com uma CAS os alunos podem ser influenciados por outras fontes de erro, tais como, o processo de discretização e o efeito cumulativo do erro de arredondamento no processo iterativo, especialmente se em anteriores experiências encontraram tais erros (Kidron, 2008). A autora considera o processo de construção da análise do erro um processo de instrumentação e descreve esse processo no caso de uma aluna. Na sua análise conjuga duas abordagens, por um lado, a análise instrumental que lhe permite compreender "como é que o computador se torna um efetivo instrumento para o pensamento matemático da aluna" (p. 207) e, por outro lado, o modelo da abstração no contexto que a "ajuda essencialmente a discernir o processo de abstração que ocorre dentro do processo de instrumentação" (p. 207). A autora refere a lentidão do processo da análise do erro desenvolvido pela aluna até à fase em que a sua atenção deixou de ser desviada pelo efeito de acumulação do método numérico ou pelo erro de arredondamento introduzido pelo computador.

2.5.2. Orquestração instrumental

O processo da génese instrumental tem uma dimensão individual, uma vez que, diferentes alunos desenvolvem diferentes esquemas de utilização mas, tem também uma dimensão social, pois os alunos desenvolvem os esquemas no contexto da sala de aula, em conjunto com outros alunos e com a ajuda do professor. O professor tem um papel bastante complexo pois tem que manejar um conjunto de instrumentos de dois pontos de vista, por um lado, cada aluno desenvolve um conjunto pessoal de instrumentos e, por outro lado, numa sala de aula, vista como uma comunidade de prática, mobilizam-se instrumentos (que não são necessariamente os mesmos) construídos por cada aluno para cada tarefa (Drijvers & Trouche, From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, 2008).

A constituição dos sistemas de instrumentos depende fortemente da organização do ambiente que o professor estabelece. Trouche (2004) introduziu a noção de *orquestração instrumental* para salientar a necessidade do professor dirigir externamente a génese instrumental dos alunos.

> Uma orquestração instrumental é a organização sistemática e intencional pelo professor dos vários artefactos disponíveis num ambiente de aprendizagem computorizado, para uma dada situação matemática, com vista a guiar os alunos na génese instrumental. (Drijvers & Trouche, 2008, p. 377)

Uma orquestração instrumental é definida por *configurações didáticas* – disposição dos artefactos disponíveis no ambiente de acordo com as diferentes fases do tratamento matemático e por *modos de exploração* dessas configurações (Trouche L. , 2004). As configurações e os modos de exploração produzem *contas da atividade* – resultados da atividade observáveis por pessoas que não estão envolvidas nessa atividade, tais como relatórios de pesquisa, visores de calculadoras, etc. O autor considera que a socialização dessas *contas* – produção, interpretação e negociação – é essencial para o desenvolvimento e coordenação da parte social dos esquemas. Trouche (2003) define vários níveis de atuação de uma orquestração instrumental (Figura 15).

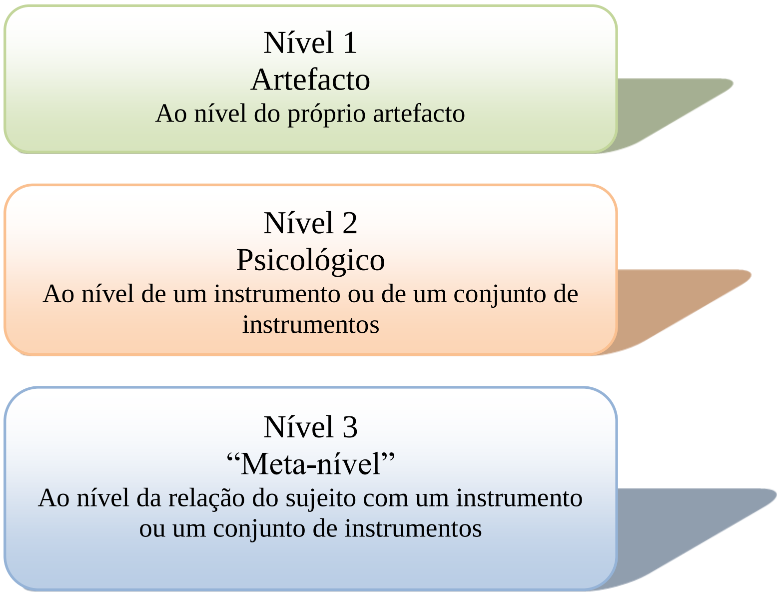
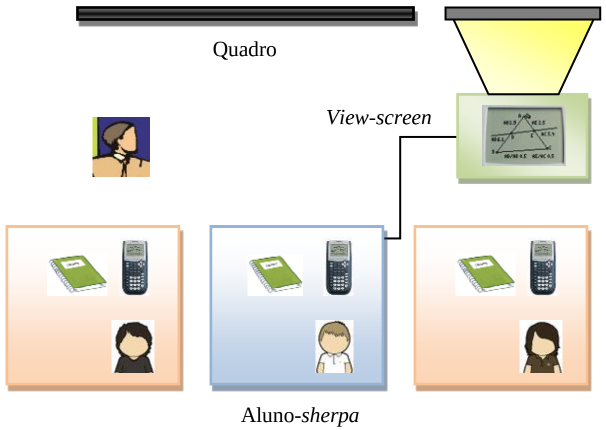


Figura 15 – Níveis de atuação da orquestração instrumental.

Existem elementos comuns aos vários tipos de orquestração instrumental: a interação entre diferentes sujeitos, a explicação dos vários passos e a publicação dos traços da atividade que, combinados, reforçam a dimensão social dos esquemas da ação instrumentada (Trouche, 2003). Na tabela 1 encontram-se exemplos de orquestrações instrumentais de cada um dos níveis.

Tabela 1 – Exemplos dos vários níveis de orquestração instrumental em ambientes de aprendizagem com calculadora.

Nível	Objetivo Principal	Configuração Didática	Modos de Exploração
1	Modificação dos esquemas de utilização relacionados com certo tipo de tarefas de modo a encorajar a construção do conhecimento de acordo com a instituição	Baseada num determinado parâmetro de configuração do *software*	Os modos de exploração podem diferir de acordo com várias variáveis: • Tempo (pode-se modificar o *software* durante a aula – versus treino); • Contexto (pode passar-se para o "*software* parametrizado" apenas durante a realização da tarefa considerada ou deixar esse modo permanentemente); • Acesso (pode deixar-se o aluno livre para explorar a tarefa, escolher ou não o modo de "*software* parametrizado").
2	Socialização (extensão) da génese instrumental dos alunos	Baseada na atribuição de um papel particular a um aluno, denominado aluno-*sherpa*, que manipula a calculadora que se encontra ligada ao *view-screen*. Este aluno desempenha o papel de referência, guia, assistente e mediador. Esta orquestração favorece a administração coletiva de uma parte dos processos de instrumentalização e instrumentação. O professor tem o papel de orientar, através da calculadora do aluno-*sherpa*, todas as calculadoras da turma, assumindo a função de *condutor*	O professor pode organizar fases de trabalho de diferente natureza: • Calculadoras desligadas (assim como o projetor) – ambiente de trabalho com papel e lápis; • Calculadoras ligadas e projetor ligado sendo o trabalho estritamente orientado pelo aluno-*sherpa*, com a supervisão do professor – os processos de instrumentalização e instrumentação

		da orquestra em vez de *um homem da banda*. O professor, enquanto ensina, pode combinar os resultados obtidos manualmente, no quadro, com os resultados obtidos pelo aluno-*sherpa* (esquema representado abaixo).  Figura 16 – O aluno-*sherpa*, parte de uma orquestração instrumental. (Adaptado de Trouche, 2003, p. 794)	estão *fortemente constrangidos*; • Calculadoras ligadas e projetor desligado sendo o trabalho livre durante um certo período de tempo (para um exercício, formulação de conjeturas, enquanto observam um novo objeto, testam um novo comando, etc.) – os processos de instrumentalização e instrumentação estão *relativamente constrangidos*.
3	Desenvolvimento da autoanálise da própria atividade de cada aluno	Baseada num dispositivo denominado: *espelho de observação*. Os alunos trabalham em pares em trabalho de pesquisa. Metade dos pares resolve a tarefa matemática e a outra metade observa e toma nota das ações desempenhadas pelos pares observados com a ajuda de dois artefactos: • Uma placa de projeção que torna possível capturar o visor da calculadora de um dos alunos do par (do que não está	Esta disposição oferece a possibilidade de uma autoanálise da ação e a construção de uma mediação reflexiva. De acordo com o estudo referido pelo autor, para a maioria dos alunos a organização da ação revelada pela síntese cronológica causa uma enorme surpresa, existindo uma grande diferença entre o que os alunos se lembram de

encarregado da escrita do relatório de pesquisa);

- Folhas de observação que são usadas para tomar nota, cada 15 segundos[9], de todas as ações dos alunos (nessas folhas aparecem linhas onde se localizam diferentes tipos de tarefas: *papel e lápis*, *calculadora* (com distinção de diferentes aplicações envolvidas), *interações* (com o professor, com outros alunos, ou com o próprio: *olhar vago*) e, *outras* (ações que não têm a ver com o problema em que estão a trabalhar).

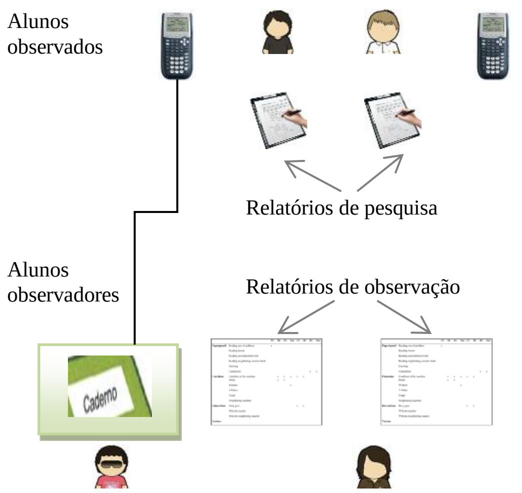


Figura 17 – O "espelho de observação".
(Adaptado de Trouche, 2003, p. 796)

fazer e o que realmente fizeram. Também se regista uma diferença entre os registos escritos nos relatórios de pesquisa e os das folhas de observação, o que permite que se faça uma reflexão profunda sobre as formas da atividade, com consequente compreensão de possíveis falhas e posterior correção.

[9] Nota do autor – Meinadier (1991), estima assim o tamanho para uma “unidade de tarefa” no contexto do uso do computador.

A introdução deste tipo de orquestrações na sala de aula requer que o professor consiga gerir todo o processo a vários níveis: (i) ao nível matemático – novos ambientes requerem novas tarefas matemáticas; (ii) ao nível tecnológico – de modo a compreender as limitações e potencialidades dos artefactos e, (iii) ao nível psicológico – de maneira a compreender e orientar os processos de instrumentação e a sua variabilidade (Trouche, 2003).

A escolha das tarefas é determinante para que o aluno possa "manejar juntamente e coerentemente ambos os conhecimentos: matemático e instrumental" (Artigue, 2005, citada em Drijvers & Trouche, 2008). Guin e Trouche (1999) salientam a importância de desenvolver situações matemáticas que fomentem o trabalho experimental – antecipação e investigação, com interações entre as observações gráficas e cálculos teóricos, e comparação de resultados em diferentes registos.

Alunos e professores desempenham novos papéis que dependem fortemente da configuração didática e dos modos de exploração escolhidos: "seguindo a metáfora da orquestra, as relações entre os músicos e entre o maestro e os músicos não são as mesmas numa banda de jazz ou numa orquestra sinfónica" (Drijvers & Trouche, 2008, p. 380). Assim, a metáfora da orquestração deve ser compreendida no contexto de um líder de uma banda de jazz e não no contexto de uma orquestra sinfónica com um maestro clássico (Trouche & Drijvers, 2010), ou seja, embora as orquestrações tenham em parte que ser preparadas com antecedência, o professor não pode negligenciar a criatividade do aluno, e, portanto, elas não devem ser aplicadas de um modo rígido. Drijvers e Touche (2008) salientam que o papel de "maestro" que o professor desempenha combina os vários papéis apontados por Zbiek e Hollebrands (2008): *Distribuidor de tempo* – o professor tem que trabalhar com os requisitos de tempo da escola e simultaneamente orquestrar o tempo para responder às necessidades individuais dos alunos; C*atalisador e facilitador* – o professor facilita a introdução de um novo problema ou de um contexto do mundo real e a discussão das várias soluções; *Colaborador* ou *companheiro de investigação* – o professor não está inicialmente familiarizado com o problema nem com a solução sendo assim um verdadeiro participante na aprendizagem matemática; *Conselheiro* – o professor está familiarizado com o problema e é capaz de aconselhar ou assistir os alunos quando estes pedem ajuda; este papel inclui a contra-argumentação, encorajamento, e diagnóstico; *Avaliador da aprendizagem do aluno* – o professor usa instrumentos de avaliação de diferentes tipos para descrever o surgimento da compreensão individual dos alunos (com e sem tecnologia); *Explicador* – o professor serve de fonte de conhecimento, apresentando regras, fazendo demonstrações e estabelecendo o contexto; *Gestor* – o professor serve de gestor tático, diretor e autoridade; *Planeador e condutor* [das atividades na sala de aula] – o professor planifica e implementa as tarefas escolhendo entre toda a turma, pequenos grupos, ou configurações individuais; este papel inclui seleção, cronologia e criação de materiais curriculares e ferramentas tecnológicas; *Recurso* – o professor representa um recurso a que os alunos podem recorrer para obterem informações (através de questões apropriadas); *Controlador de tarefas* – o professor é um interlocutor, tomando decisões quanto aos exemplos e estratégias; *Assistente técnico* – o professor ajuda os alunos quando estes têm dificuldades com o *hardware* e o *software*.

Trouche (2004) relata uma experiência realizada com uma turma do 12.º ano, que decorreu num ambiente com calculadoras simbólicas, envolvendo uma tarefa com um certo grau de complexidade. Os alunos necessitavam de conjugar vários instrumentos (resolução de equações, estudo da variação de funções, cálculo de limites, estudo da variação de sequências), cuja génese ainda se encontrava em processo de desenvolvimento e, para fazerem uso desses instrumentos era necessário um forte *controlo do processo*: com o comando *"Solve"* apenas obtinham duas soluções para a equação envolvida (que teria três soluções) e o comando *"graph"* sugeria que existiam, realmente, apenas duas soluções – "não se trata de usar esses instrumentos separadamente mas pelo contrário, articulá-los, ou seja construir sistemas de instrumentos coerentes a partir de um conjunto de artefactos" (Trouche, 2004, p. 303). Para o investigador a experiência resultou devido a vários fatores, tais como, um professor experiente que fazia parte da equipa de pesquisa, alunos inteligentes e fortemente motivados para participarem na experiência piloto. Contudo, a transposição daquele tipo de atividade para "turmas normais" tem sido, nas palavras do autor, impossível, o que se deve, na sua opinião, à fraca reflexão acerca das orquestrações instrumentais que têm necessariamente que acompanhar tarefas daquele tipo:

> A sua organização deve ser precedida de um estudo da sua estrutura e decomposição em diferentes fases: uma primeira fase que permite aos alunos compreender o problema e apropriar-se dele, uma segunda fase para a exploração de alguns exemplos particulares, uma terceira fase para discussão das várias conjeturas. Cada uma destas fases necessita de uma orquestração particular. (Trouche, 2004, p. 303)

A orquestração instrumental deve ser desenhada tendo em conta o ambiente e a situação matemática. Drijvers e Trouche (2008) consideram que, para um dado ambiente e para cada situação matemática, deve ser elaborado um *cenário de exploração didática* que deve conter: (i) o tratamento matemático das diferentes etapas da situação matemática, e (ii) uma orquestração instrumental, com as sucessivas configurações e respetivos modos de exploração, de acordo com o tratamento matemático e os objetivos pedagógicos do professor.

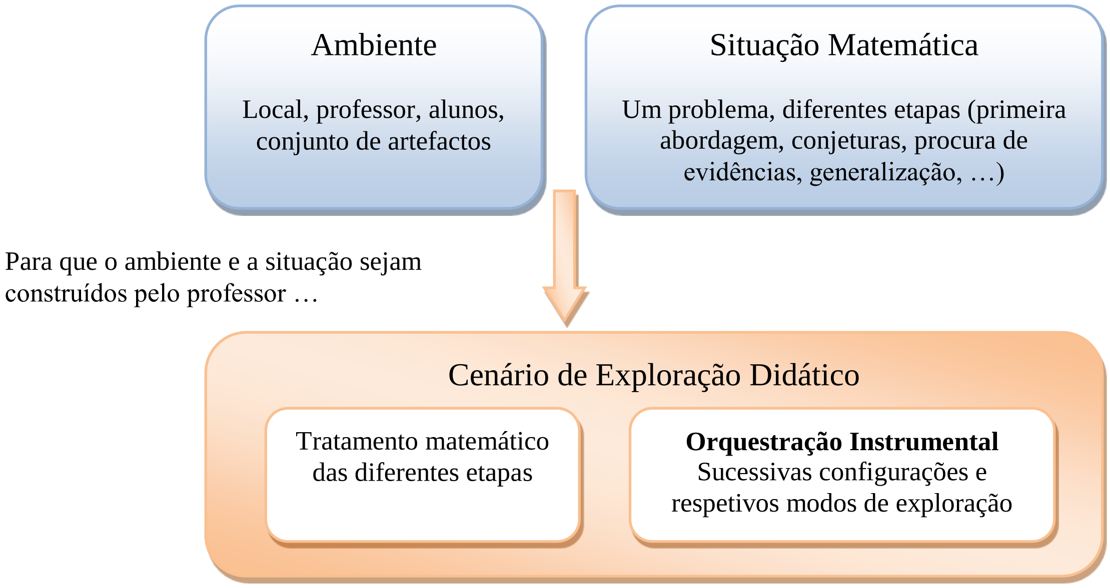


Figura 18 – Cenário de exploração didático.
(Adaptado de Drijvers & Trouche, 2008, p. 382)

Drijvers, Doorman, Boon, Gisbergen e Reed (2009) sentiram necessidade de acrescentar um terceiro elemento na composição de uma orquestração instrumental – *desempenho didático* – este elemento refletirá o desempenho "real", já que uma orquestração instrumental é parcialmente preparada com antecedência e parcialmente criada no local, enquanto se ensina. Envolve as decisões tomadas no momento: que questões se colocam perante determinada situação, como se reage a uma intervenção de um aluno ou como se lida com um aspeto inesperado de uma tarefa matemática ou de uma ferramenta tecnológica. Estes autores investigaram os diferentes tipos de orquestrações instrumentais usados por professores e identificaram seis tipos: *Demonstração técnica*; *Explicação do visor*; *Ligação visor-quadro*; *Discussão do visor*; *Marcação e exibição*; e *Aluno-Sherpa*. Os primeiros três são predominantemente centrados no professor, enquanto os restantes três pressupõem uma maior interação entre os vários intervenientes. Na Tabela 2 encontra-se um resumo de cada um destes tipos de orquestração instrumental.

O tempo disponível e a tecnologia utilizada podem condicionar a escolha e os modos de exploração das orquestrações (Drijvers *et al.*, 2009). Por exemplo, a orquestração *marcação e exibição* é possível quando o professor consegue ter acesso *online* ao trabalho digital do aluno. Estes autores investigaram também a possível relação entre as orquestrações utilizadas pelos professores e a sua visão relativa ao ensino e aprendizagem da matemática, tendo concluído que, no caso das três professoras que participaram no estudo, essa relação é bastante forte. O estudo aponta ainda para o facto de que os próprios invariantes operatórios desenvolvidos pelas professoras sejam parcialmente determinados pela sua visão relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática.

Em síntese, a calculadora gráfica pode funcionar como um importante instrumento de mediação na aprendizagem. Dos vários estudos analisados podem salientar-se dois aspetos relevantes, por um lado, o processo de converter a calculadora num instrumento requer tempo e, por outro lado, está associado ao desenvolvimento da compreensão conceptual. O processo da génese instrumental envolve o desenvolvimento de esquemas em que os aspetos conceptuais e técnicos interagem e desenvolvem-se simultaneamente (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Esses esquemas têm uma dimensão individual mas também têm uma dimensão social, e o seu desenvolvimento depende fortemente das tarefas em que os alunos se envolvem e da reflexão que fazem acerca da sua atividade.

Tabela 2 – Diferentes tipos de orquestrações instrumentais.

Tipo de Orquestração Instrumental	Configuração Didática	Modos de Exploração
Demonstração técnica – demonstração de técnicas pelo professor	Acesso à tecnologia; facilidade de projeção; arranjo do espaço de modo que os alunos sigam a demonstração	O professor trabalha a técnica numa nova situação ou tarefa e adiciona novas técnicas ao trabalho do aluno, antecipando o que se segue
Explicação do visor – explicação do professor para toda a turma acerca do que se passa no visor, no entanto, a explicação vai para além da técnica envolvendo os conteúdos matemáticos	Similar às da *demonstração técnica*	O professor usa o trabalho de um aluno como ponto de partida para a explicação ou começa com uma solução sugerida por si próprio
Ligação visor-quadro – o professor salienta a relação entre o que se passa no ambiente tecnológico e o modo de representação da matemática convencional	Acesso à tecnologia; facilidade de projeção; quadro; arranjo do espaço de modo que tanto o visor como o quadro sejam visíveis	O professor usa o trabalho de um aluno como ponto de partida para a explicação ou começa com uma tarefa sugerida por si próprio
Discussão do visor – tem como objetivo reforçar a génese instrumental coletiva, pelo que, a discussão acerca do que acontece no visor é feita com toda a turma	Acesso à tecnologia; facilidade de projeção; acesso ao trabalho dos alunos; arranjo do espaço favorável à discussão	O professor usa o trabalho de um aluno como ponto de partida para a discussão ou propõe uma tarefa para discussão
Marcação e exibição – o professor identifica interesse digital no trabalho de algum aluno durante a preparação da aula e usa-o deliberadamente para discussão	Acesso à tecnologia; facilidade de projeção; acesso ao trabalho dos alunos na preparação das aulas; arranjo do espaço favorável à discussão	O professor pede ao aluno cujo trabalho serve de discussão para explicar o seu raciocínio, pede reação aos restantes alunos ou dá ele próprio feedback
Aluno-Sherpa – o aluno usa a tecnologia para apresentar o seu trabalho ou para efetuar as operações pedidas pelo professor	Similar às da *discussão do visor*; o arranjo do espaço é feito de modo que o *aluno-sherpa* possa manejar a tecnologia com facilidade	O professor pede ao *aluno-sherpa* que apresente ou explique o seu trabalho ou coloca-lhe questões e pede-lhe que efetue determinadas operações

Capítulo 3

Funções e representações

3.1. Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática (Hollar & Norwood, 1999) e tem sido foco de grande atenção pela comunidade de pesquisa em educação matemática (DeMarois & Tall, 1996). Os conhecimentos sobre funções são, tal como diz o programa da matemática A, "indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos" (DES, 2001, p. 26), no entanto, os alunos "enfrentam vários obstáculos a tentarem compreender as funções" (Sajka, 2003, p. 229), o que, em parte, se deve à necessidade de coordenar múltiplas representações (Elia et al., 2007). As novas tecnologias, em particular, as calculadoras gráficas, permitem conjugar várias das representações de uma função (numérica, gráfica e simbólica) mas, tal como referem Dick e Edwards (2008), o facto de os alunos terem acesso a múltiplas representações de um objeto matemático não conduz, automaticamente, a uma compreensão conceptual mais profunda nem a uma flexibilidade em determinar qual a representação mais adequada perante um problema particular.

3.1.1. Evolução do conceito de função

A evolução do conceito de função remonta há 4000 anos atrás, sendo que 3700 destes consistiram em antecipações (Kleiner, 1989). Por exemplo, a ideia de contagem desenvolvida pelas civilizações antigas implica a noção de correspondência entre um conjunto de objetos e uma sequência de números de contagem; as tábuas de quadrados, cubos e raízes quadradas dos Babilónios, as leis que pretendiam estabelecer relações entre duas grandezas no domínio da acústica e da geometria deduzidas pelos Gregos da antiguidade, as tabelas astronómicas desenvolvidas por Ptolomeu, tocam também aspetos da noção de função (Kleiner, 1989; Ponte, 1992). No entanto, a grande evolução do conceito ocorreu nos últimos 300 anos, ligada a problemas de cálculo e análise (Kleiner, 1989). Segundo este autor, a evolução do conceito de função pode ser vista como uma "competição" entre dois elementos, o geométrico e o algébrico, correspondendo a duas imagens mentais, uma curva e uma fórmula (expressão analítica), respetivamente, tendo aparecido mais tarde um terceiro elemento, o lógico, associado à imagem mental de função como uma máquina (entrada/saída).

A noção de função emergiu de uma forma explícita no início do século XVIII. Para Kleiner (1989), as principais razões que contribuíram para que o conceito de função não tenha surgido antes foram a falta de requisitos algébricos (a consciencialização do contínuo dos números reais e o desenvolvimento da notação simbólica) e a falta de motivação (não existia a necessidade de se definir de forma abstrata o conceito de função). Este autor refere, também, que no período de 1450 a 1650 ocorreu um conjunto de progressos fundamentais para o aparecimento do conceito de função, nomeadamente, a extensão do conceito de número (real e complexo, por Bombelli, Stifel), a criação da álgebra simbólica (associada a Viète e Descartes), o estudo do movimento como problema central da ciência (associado a Kepler e Galileo) e o "casamento" da álgebra e da geometria (atribuído a Fermat e Descartes). Realça, ainda, o facto de que a matematização das ciências e a invenção da geometria analítica permitiram uma visão dinâmica e contínua das relações funcionais em oposição à visão estática e discreta sustentada pelos antigos.

Os principais objetos de estudo do cálculo, no séc. XVII, foram as curvas (geométricas), como por exemplo, o caso da cicloide, cujo estudo foi bastante aprofundado antes de se obter a sua equação. No campo da análise foi desenvolvido um conjunto de métodos para a resolução de problemas com curvas que incluíam, por exemplo, determinar tangentes, comprimentos de curvas, velocidades de pontos móveis ao longo de uma curva.

A reorientação do cálculo para uma forma predominantemente algébrica foi resultado de um longo processo de reflexão. Em 1692, Leibniz (1646-1716) usou, pela primeira vez, a palavra "função" para designar um objeto geométrico associado a uma curva, dizendo por exemplo que "a tangente é uma função da curva" (Leibniz, citado em

Kleiner, 1989, p. 283). Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável que houvesse um termo que representasse quantidades dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra “função” foi adotada na correspondência trocada (1694-1698) entre Leibniz e Jean Bernoulli (1667-1748). A primeira definição formal de função foi apresentada por Bernoulli, em 1718, do seguinte modo: “Chamamos função de uma [quantidade] variável a uma quantidade composta de qualquer modo a partir desta variável e de constantes” (citado em Kleiner, 1989, p. 284), não referindo, contudo, como realça o autor, o que pretendia dizer com a expressão “de qualquer modo”. Como refere Jones (2006), “esta vaga definição marca o início da evolução de função para o multifacetado conceito que existe atualmente” (p. 3).

Em 1748, numa época em que se assistiu ao processo de “desgeometrização da análise” um antigo aluno de Bernoulli, Euler (1707-1793), no seu livro intitulado “*Introductio in Analysin Infinitorum*” apresenta a análise como a ciência geral das variáveis e das suas funções, definindo o conceito de função da seguinte forma: “função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo a partir desta quantidade variável e por números ou por quantidades constantes” (citado em Kleiner, 1989, p. 284). Euler substituiu, na definição de Bernoulli, o termo “quantidade” por “expressão analítica” na segunda ocorrência da mesma e, embora não tenha definido o termo “expressão analítica”, explicou que esta envolvia, para além das constantes e variáveis, as quatro operações algébricas, raízes, exponenciais, logaritmos, expressões trigonométricas, derivadas e integrais (Kleiner, 1989).

Até ao final do século XVIII a identificação de função com expressão analítica permaneceu inalterada, mas no século XIX a noção de função passou por sucessivas clarificações e alargamentos que mudaram profundamente a sua natureza e o seu significado (Ponte, 1992). Alguns problemas práticos, como por exemplo, o problema da *corda vibrante* e o trabalho de Fourier (1768-1830) sobre fluxo de calor em corpos materiais foram importantes contribuições para a evolução do conceito de função. Começava assim a formar-se um novo tópico onde o conceito de função era central – a análise (Kleiner, 1989).

Dirichlet (1805-1859) desenvolveu o trabalho de Fourier acabando por formular as condições suficientes para que uma função possa ser representada por uma serie de

Fourier, o que também contribuiu para que reformulasse a definição de função, de modo a separá-la da representação analítica:

> *y* é uma função de variável *x*, definida no intervalo $a < x < b$, se para qualquer valor da variável *x*, neste intervalo, corresponde um valor definido da variável *y*. Também, é irrelevante de que forma esta correspondência é estabelecida. (citado em Kleiner, 1989, p. 291)

Para Kleiner (1989) a novidade desta noção de função de Dirichlet como uma "correspondência arbitrária" assenta não tanto "na definição como na sua aplicação" (p.291), ou seja, proporcionou o surgimento de novas classes de funções como, por exemplo, a função de Dirichlet, $D(x) = \begin{cases} c, & \text{se } x \text{ é racional} \\ d, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$, que contribuíram para o desenvolvimento da análise, uma vez que, desde o início do século XVII os processos da análise, supostamente, serviriam para "todas" as funções.

Bourbaki[10] deu a seguinte definição de função em 1939 (mais tarde definiu também função como um conjunto de pares ordenados), baseada na teoria dos conjuntos, correspondendo à definição que hoje em dia se tornou standard:

> Sejam E e F dois conjuntos, não necessariamente distintos. Uma relação entre um elemento variável *x* de E e um elemento variável *y* de F é chamada uma *relação funcional* em *y* se, para todo o $x \in \mathrm{E}$, existir um único $y \in \mathrm{F}$ que esteja numa dada relação com *x*.
> Damos o nome de *função* à operação que a cada elemento $x \in \mathrm{E}$ associa o elemento $y \in \mathrm{F}$ que está na relação dada com *x*; *y* é chamado o *valor* da função no elemento *x*, e a função diz-se *determinada* pela dada relação funcional. Duas relações funcionais equivalentes determinam a *mesma* função. (citado em Kleiner, 1989, p. 299)

Kleiner (1989) faz referência à teoria das categorias, surgida nos anos quarenta, onde o conceito de função assume um papel fundamental, podendo ser descrito como uma "associação" de um "objeto" A para outro "objeto" B, objetos esses que não precisam de ser conjuntos e que podem, inclusivamente, ser dispensados: "uma "categoria" pode ser definida como consistindo em funções (ou "mapas"), *que são*

[10] Grupo de jovens matemáticos, maioritariamente franceses, que escreveu uma série de livros de matemática avançada. O objectivo do grupo era fundamentar toda a matemática na teoria dos conjuntos.

tomados como conceitos indefinidos (primitivos) satisfazendo certas relações ou axiomas" (p. 299).

Atualmente, ao nível da educação matemática, a definição generalizada é a de correspondência entre dois conjuntos, como podemos observar, por exemplo, numa enciclopédia de matemática: "modo de associar únicos objetos a cada ponto de um dado conjunto. Uma função de A para B é um objeto f tal que para cada $a \in \mathrm{A}$, existe um único objeto $f(a) \in \mathrm{B}$" (Weisstein, 1999, p. 683), ou nos atuais manuais escolares portugueses do ensino secundário: "Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chama-se função definida em A com valores em B a toda a correspondência que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B" (Jorge, Alves, Fonseca & Barbedo, 2007, p. 18).

3.1.2. Teorias sobre conceções dos alunos acerca do conceito de função

A formação dos objetos matemáticos tem sido alvo de grande interesse por parte da comunidade de pesquisa. Para Tall, Davis, Gray e Simpson (1999) à medida que a maturidade matemática se desenvolve aumenta o número de objetos matemáticos acessíveis que se encontram intimamente relacionados com outros objetos matemáticos. Como é que são construídos tais objetos matemáticos? Em particular, como é construído o conceito de função?

Existem várias teorias sobre o desenvolvimento do conceito de função, embora praticamente todas tenham por base diferenças entre uma conceção orientada para a ação ou operacional e uma conceção orientada para o objeto (Slavit, 1997).

São aqui abordados alguns aspetos de algumas dessas teorias que, do meu ponto de vista, poderão ser adequados para analisar a aprendizagem das funções que toma lugar no ensino secundário, num ambiente em que a calculadora gráfica está presente, e consequentemente, onde é dada alguma relevância à representação gráfica.

As ideias de *conceito imagem* e *conceito definição* propostas por Tall e Vinner (1981) parecem essenciais para analisar a compreensão do conceito de função, que envolve bem mais do que a sua definição formal. A teoria da reificação de Sfard (1991) dá particular destaque à natureza dual do conceito, e à sua evolução, de uma visão operacional para uma visão estrutural, sendo esta indispensável para compreender determinadas operações e transformações de funções. A abordagem orientada pelas propriedades exposta em Slavit (1997) é, tal como o autor refere, um modo de se atingir a reificação quando o ensino envolve preferencialmente tecnologias gráficas, não pretendendo substituir a teoria da reificação mas estendê-la. A teoria do *procept*, poderá contribuir para a análise da aprendizagem das funções, tomando em consideração a maior ou menor flexibilidade dos alunos em termos da interpretação do simbolismo matemático consoante a situação.

3.1.2.1. Conceito imagem e conceito definição em matemática

Tall e Vinner (1981) apresentam algumas ideias com o objetivo de distinguir a definição formal de um conceito matemático e os processos cognitivos através dos quais o conceito é concebido.

> Muitos conceitos que usamos usualmente não são, de todo, definidos formalmente, aprendemos a reconhece-los através da experiência e do uso em contextos apropriados. Mais tarde esses conceitos podem ser refinados nos seus significados e interpretados com crescente subtileza com ou sem o luxo de uma definição precisa. (Tall & Vinner, 1981, p. 151)

Para os autores a estrutura cognitiva que dá significado a um conceito é mais do que uma imagem mental, seja pictórica, simbólica ou de outro tipo, pois, durante os processos de recordação ou manipulação do conceito, são vários os processos associados que consciente ou inconscientemente afetam o seu significado e uso. Tall e Vinner (1981) utilizam o termo *conceito imagem* para descrever toda a estrutura cognitiva que está associada a um conceito, o que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. O conceito imagem é construído ao longo do tempo através de experiências de vários tipos, alterando-se de acordo com os novos estímulos que o indivíduo vai encontrando e à medida que o indivíduo amadurece. Segundo os autores, os diferentes estímulos que o indivíduo vai recebendo ativam certos “caminhos neuronais” e inibem outros, o que faz com que sejam ativadas diferentes partes do conceito imagem de um modo “que não necessitam de formar um todo coerente” (p. 152). A parte do conceito imagem que é evocada num dado momento é denominada por Tall e Vinner de *conceito imagem evocado*.

O *conceito definição*, quando existe, é visto como uma forma de expressão usada para especificar o conceito. O *conceito definição* pode ser apenas memorizado pelo aluno, ou pode ser aprendido com mais significado relacionando-se, em maior ou menor grau, com o conceito como um todo. O *conceito definição* pode ainda ser uma reconstrução da definição feita pelo próprio aluno, ou seja, a forma usada pelo aluno para explicar o seu conceito imagem (evocado):

> Quer o conceito definição seja dado ao aluno quer seja uma reconstrução feita pelo próprio, pode variar de vez em quando. Nesse sentido o conceito definição pode diferir do conceito definição *formal*, aceite pela comunidade matemática. (Tall & Vinner, 1981, p. 152)

De acordo com os autores, para cada indivíduo, um conceito definição gera o seu próprio conceito imagem, fazendo parte dele, embora, nalguns casos, possa ser “virtualmente inexistente” e, noutros, estar ou não coerentemente relacionado com outras partes do conceito imagem. Por exemplo, a definição do conceito de função é apresentada aos alunos da forma simples que vimos no último parágrafo da secção anterior, no entanto, um aluno pode não se lembrar da definição e o conceito imagem incluir muitos outros aspetos, tais como, a ideia de que uma função é dada por uma regra ou fórmula, por um gráfico ou uma tabela de valores. Os autores alertam para a possibilidade do ensino poder, em certas situações, conduzir os alunos a desenvolverem um conceito imagem inadequado. Por exemplo, se o professor dá a definição formal de função e trabalha com a noção geral por um pequeno período de tempo, passando depois um longo período a dar exemplos em que todas as funções sejam dadas por uma fórmula, o conceito imagem pode ser desenvolvido de modo restrito, envolvendo apenas fórmulas, o que poderá trazer dificuldades quando, mais tarde, o aluno for confrontado com outras funções.

Tall e Vinner (1981) denominaram de *fator de conflito potencial* uma parte do conceito imagem ou do conceito definição que pode entrar em conflito com outras partes. Estes fatores de conflito potenciais podem não chegar a causar conflitos cognitivos reais mas, caso isso aconteça, serão denominados *fatores de conflito cognitivo*. Os autores dão o exemplo de um fator de conflito potencial no caso do conceito dos números complexos – a definição de um número complexo da forma $x+yi$ como sendo um par ordenado de números reais (x,y) e a identificação de $x+0i=(x,0)$ como sendo o número real x – introduz um potencial conflito com a noção da teoria de conjuntos de que um elemento x é distinto do par ordenado $(x,0)$. No entanto, os dados de um questionário mostraram que os alunos consideravam $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}+0i$ como duas entidades distintas ou a mesma, consoante as circunstâncias, sem que isso lhes causasse conflito cognitivo (Tall & Vinner, 1981).

Por vezes os fatores de conflito cognitivo podem ser evocados inconscientemente, manifestando-se apenas por uma certa inquietação. Os autores consideram que é isso que acontece quando, na resolução de problemas ou pesquisa, se sente que alguma coisa está errada.

Um fator de conflito potencial no conceito imagem que entre em contradição com uma parte do conceito definição formal é considerado por Tall e Vinner bastante sério pois pode impedir a aprendizagem da teoria formal. Os autores descrevem alguns exemplos de problemas causados por um conceito imagem que não está coerentemente relacionado com o conceito definição e que resulta em potenciais conflitos, entre os quais o caso da continuidade de funções. Para a maioria dos alunos participantes no estudo o conceito imagem evocado envolve "o gráfico não tem lacunas" ou "o gráfico é todo pegado"; para um pequeno número envolve "a função é dada apenas por uma fórmula" e para uma minoria existem outras imagens (tais como "muda gradualmente de gradiente"). Todos esses conceitos imagem têm fatores de conflito potenciais que entram em contradição com o conceito definição formal e que podem trazer, mais tarde, dificuldades aos alunos. Por exemplo, a função definida no conjunto dos números racionais por:

$$\begin{cases} 0, \text{ se } x<0 \vee x^2<2 \\ 1, \text{ se } x>0 \vee x^2>2 \end{cases},$$

que é contínua, pode conduzir a uma situação de conflito cognitivo já que entra em contradição com as imagens evocadas pelos alunos.

3.1.2.2. Teoria da reificação de Sfard

Sfard (1991) defende que é possível encontrar na génese do conceito de função (assim como na maioria dos conceitos matemáticos) uma dualidade de pensamento matemático: (i) uma conceção operacional – em que a noção matemática é concebida como um processo ou identificada com o próprio processo; e (ii) uma conceção estrutural – onde a noção matemática é tratada como um objeto real, como uma estrutura estática permanente que se pode manipular e combinar em estruturas mais complexas. Embora aparentemente estas duas formas se excluam uma à outra, devem complementar-se e constituir um todo coerente do conceito. A autora considera que um conceito matemático é primeiramente adquirido operacionalmente, sendo a transição para a sua forma estrutural um processo realizável em três fases: interiorização, condensação e reificação. Após a reificação de um conceito, este pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. A apropriação de um objeto matemático permite que se inicie um novo ciclo, começando pela interiorização com vista à formação de um novo objeto mais abrangente, tal como é exemplificado na Figura 19.

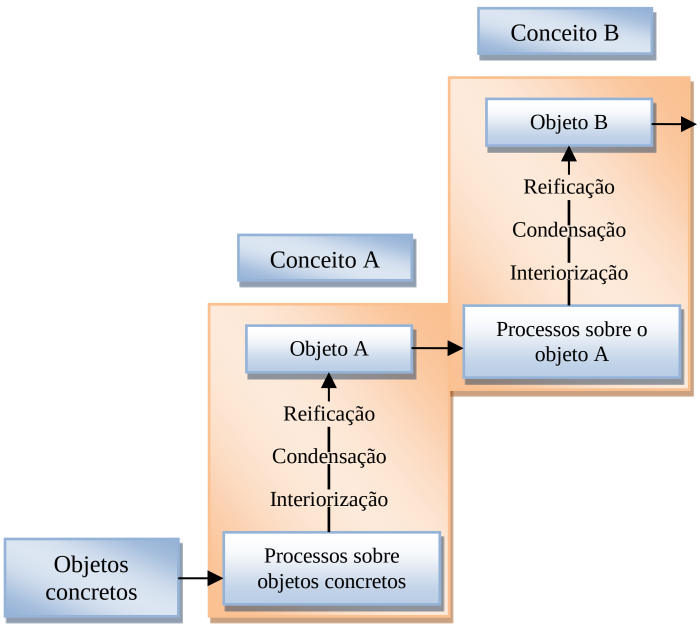


Figura 19 – Modelo geral para a formação de conceitos.
(Adaptado de Sfard, 1991, p. 22)

O processo de reificação é um processo complicado pois nele está implícito a existência de um ciclo vicioso: “por um lado, sem uma tentativa de interiorização de nível mais elevado, a reificação não ocorrerá, por outro lado, a existência de objetos sobre os quais são realizados processos de nível mais elevado, parece indispensável para a interiorização" (Sfard, 1991, p. 31). A Tabela 3 salienta as principais diferenças em termos da conceção operacional e estrutural (Sfard, 1991, p. 33).

Tabela 3 – Principais diferenças entre conceção operacional e estrutural.

	Conceção Operacional	Conceção estrutural
Características gerais	A entidade matemática é concebida como um certo processo ou é identificada com o próprio processo	A entidade matemática é concebida como uma estrutura estática – como se fosse um objeto real
Representações internas	É suportada por representações verbais	É suportada por imagens visuais
Localização no desenvolvimento do conceito	Desenvolve-se nas primeiras fases da formação do conceito	Evolui da conceção operacional
Papel no processo do desenvolvimento cognitivo	É necessária, mas não suficiente, para uma eficaz aprendizagem e resolução de problemas	Facilita todo o processo cognitivo

De acordo com este modelo a conceção operacional para o conceito de função é a primeira a surgir, na fase de interiorização o aluno estabelece contacto com certos processos que são realizados em objetos matemáticos já conhecidos, por exemplo, manipulação de expressões algébricas. Nesta fase é aprendida a noção de variável e adquirida a capacidade de usar a expressão analítica para determinar valores da variável dependente. Na fase de condensação dá-se o "nascimento oficial" do conceito, o aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo. A evolução do aluno nesta fase pode ser observada pela facilidade com que ele trabalha com uma correspondência como um todo e, segundo a autora, eventualmente, o aluno estará apto para investigar funções, representá-las graficamente e efetuar diversas operações com funções. A fase de reificação não é gradual mas instantânea e acontece quando o aluno consegue conceber a entidade matemática como um objeto completo e autónomo com significado próprio. O conceito de função foi reificado quando o aluno tiver consciência das diversas representações que uma função pode assumir; conseguir passar facilmente de uma representação para outra; conseguir resolver equações funcionais; revelar capacidade para se pronunciar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados e pela aceitação de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções. A autora considera a reificação um processo bastante complicado mas que, uma vez conseguido, facilita a realização matemática.

Domingos (2003) conclui que, no caso do conceito de função, a generalidade dos alunos do seu estudo, que frequentavam a disciplina de Análise Matemática I, do primeiro ano do ensino superior, dominavam bem alguns objetos como o conjunto dos números reias; a representação algébrica de algumas funções, nomeadamente afins, quadráticas e algumas trigonométricas (seno e cosseno); as representações gráficas dessas funções; e conceitos como o de função monótona, ou função limitada. No entanto, o mesmo não acontecia com as noções de domínio, injetividade ou invertibilidade, em particular com conceção abstrata de função, sendo que apenas cerca de metade dos alunos mostrou alguma interiorização do conceito a esse nível, essencialmente na aplicação a casos concretos.

Sfard (1991, 1992), citada em Mourão (2002), menciona que a evolução do conceito de função numa perspetiva histórica ao longo dos últimos três séculos foi, também, evoluindo gradualmente de noções concebidas operacionalmente, apresentando, atualmente, uma abordagem estrutural. Segundo a autora, as primeiras definições do conceito de função (Bernoulli e Euler) fortemente associadas a uma álgebra simbólica então recente, foram uma tentativa no sentido da reificação, que não atingiram uma posição de objeto matemático legítimo pelo facto de se basearem na noção de variável que não é reificável. No entanto, este conceito alcançou uma fase estrutural (iniciado por Dirichlet) com a definição de "conjunto de pares ordenados" de Bourbaki. Relativamente ao processo de reificação junto dos alunos, a autora sugere a sua estimulação, embora considere importante que os novos conceitos não sejam inicialmente apresentados em termos estruturais.

3.1.2.3. Teoria do procept

Gray e Tall (1994) desenvolveram uma teoria que assenta na dualidade entre processos e conceitos matemáticos. Os autores consideram que a notação matemática envolve uma certa ambiguidade, no sentido que a mesma notação pode representar um processo e o objeto, por exemplo, $f(x)=2x+3$ pode representar um processo, ou seja, um modo de calcular o valor da função para um valor específico de x ou pode representar o objeto que abrange todo o conceito de função para um x geral. A chave para o sucesso do pensamento matemático, na opinião dos autores, prende-se com a flexibilidade em interpretar o simbolismo matemático:

> Usando a notação ambiguamente para representar ou o processo ou o produto, consoante seja conveniente na altura, os matemáticos gerem (…) a possível dicotomia objeto/processo. Nós cremos que a ambiguidade em interpretar o simbolismo desta forma flexível é a raiz para o sucesso do pensamento matemático. (Gray & Tall, 1994, p. 6)

Gray e Tall (1994) fazem a distinção entre processo e procedimento, sendo o termo processo utilizado no sentido geral e o termo procedimento usado em relação a um algoritmo específico para implementar um processo. De acordo com os autores o conhecimento conceptual é bastante diferente do conhecimento referente a procedimentos inflexíveis, embora estes façam parte do conhecimento matemático. Os autores utilizam o termo "encapsulamento", atribuído a Piaget, para denominar os processos cognitivos que formam uma entidade conceptual estática a partir de processos dinâmicos (correspondendo ao que Sfard (1991) denomina de reificação).

O termo *procept* foi introduzido por Gray e Tall (1994) com o objetivo de denotar a combinação entre processo e conceito (***pro**cess /con**cept*** ⟶ ***procept***). Para definirem este novo termo os autores começaram por definir *procept elementar* – "amálgama de três componentes: um *processo* que produz o *objeto* matemático e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo como o objeto" (p. 6). Um *procept* consistirá numa coleção de *procepts elementares* referentes ao mesmo objeto. Os autores caracterizaram também *pensamento proceptual* como "a habilidade para manipular o simbolismo de forma flexível, permutando livremente diferentes simbolismos para o mesmo objeto" (p. 7).

Gray e Tall (2001) sugerem possíveis desempenhos de acordo com o nível de sofisticação do pensamento, desde o nível do pré-procedimento até ao nível do *procept* (Figura 20). Um problema cuja solução se baseie apenas num procedimento rotineiro pode passar a ser desempenhado com sucesso apenas por uma mudança do nível de pré-procedimento para o nível do procedimento. Ao nível do processo o indivíduo já se encontra munido com uma variedade de caminhos alternativos o que lhe possibilita usar vários métodos e testar possíveis erros de execução. No nível do *procept* o indivíduo estará apto para pensar em termos das relações entre símbolos de modo que transcende apenas o processo.

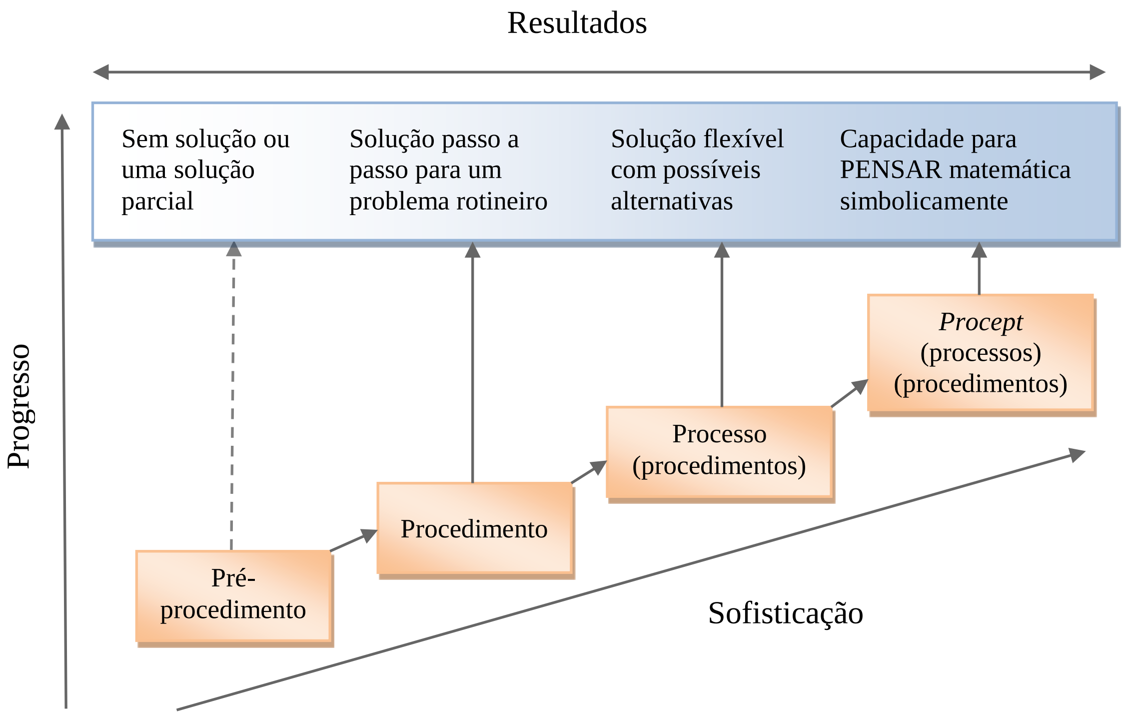


Figura 20 – Desempenho de acordo com diferentes níveis de sofisticação do pensamento.
(Adaptado de Gray & Tall, 2001, p. 69)

Como refere Domingos (2003), à medida que os alunos vão encontrando "novas tarefas, vai havendo cada vez mais tendência para o pensamento processual. Isto significa que aqueles que focam a sua atenção essencialmente no processual têm cada vez mais dificuldades em aprender novos conceitos matemáticos" (p. 56). O ensino pode acentuar a dicotomia entre procedimento e conceito, já que tendo em vista a melhoria do desempenho dos alunos, por vezes dá-se mais ênfase aos procedimentos que estes têm que realizar para completar determinada tarefa do que aos conceitos ou factos que se espera que conheçam para poderem efetuar os procedimentos (Domingos, 2003). Podemos pensar em vários exemplos, como a troca de sinal ao mudar um termo de um membro para o outro numa equação.

A teoria desenvolvida por Gray e Tall (2001), segundo os autores, diverge tanto da teoria dos objetos materializados (*embodied objects*) como da teoria do processo-objeto. Os autores consideram que existem três (ou quatro) tipos distintos de conceitos matemáticos: os *objetos materializados*, como por exemplo um gráfico, que começa com fundações físicas e que se desenvolve para uma figura mental mais abstrata; os *procepts simbólicos*, que podem alternar entre "um conceito mental para manipular" e "um processo para realizar" usando um algoritmo apropriado e os *objetos axiomáticos* relacionados com o pensamento matemático avançado, concebidos por critérios específicos (axiomas ou definições) a partir dos quais são deduzidas propriedades através de provas formais. Os autores referem que poderiam ainda introduzir um quarto tipo de conceito fazendo a distinção entre os conceitos axiomáticos desenvolvidos a partir de objetos materializados ou a partir do encapsulamento de processos. A Figura 21 ilustra o modo como os autores concebem o surgimento das diferentes entidades mentais.

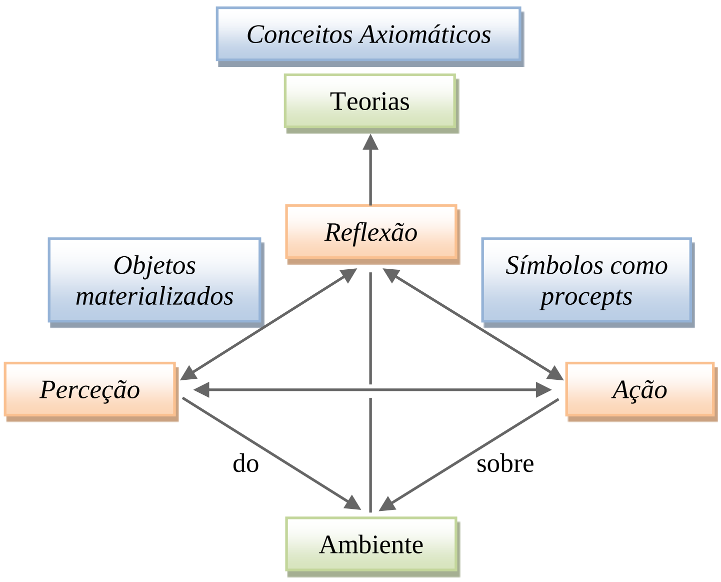


Figura 21 – Diferentes tipos de entidades mentais surgidas através da perceção, ação e reflexão. (Adaptado de Gray & Tall (2001), p. 71)

Para os autores os objetos teoricamente formados por um processo de encapsulamento já antes teriam uma existência primitiva nas configurações físicas dos objetos de base. Os objetos de base funcionam, na visão dos autores, como um trampolim para os conceitos de ordem mais elevada, embora possam ao mesmo tempo atuar como obstáculos epistemológicos que impedem "o desenvolvimento hierárquico essencial para o progresso para uma matemática mais sofisticada" (Gray & Tall, 2001, p. 71). Seguindo um exemplo dos autores, a ideia de "taxa de variação" e conceitos relacionados pode ser construída com o suporte do movimento do corpo do indivíduo. A imagem do gráfico é vista como um objeto materializado que representa o conceito de função. A ação de o desenhar, seja com lápis, seja com o dedo no ar, transmite a sensação de mudança na taxa de variação de acordo com a variação da função sem que seja necessário efetuar qualquer cálculo numérico ou simbólico, permitindo que as ideias mais formais sejam posteriormente desenvolvidas. Esta conceção é, segundo aos autores, a maior diferença entre a sua teoria e as teorias de encapsulamento processo-objeto:

> A nossa observação da atividade humana revela que os objetos encapsulados não são simplesmente produzidos por "encapsulamento" ou "reificação" dos processos em objetos mas [esse encapsulamento] é grandemente reforçado pelas configurações dos objetos de base envolvidos como precursores para uma abstração mental mais sofisticada. (Gray & Tall, 2001, p. 71)

3.1.2.4. Abordagem orientada pelas propriedades

Slavit (1997), em consonância com a teoria da reificação de Sfard, propõe uma abordagem para o desenvolvimento do conceito de função baseada nas propriedades funcionais – *visão orientada pelas propriedades*. O autor considera que a partir de exemplos e, tendo em conta as características invariantes, podem classificar-se subgrupos em termos de possuírem determinada característica. Por exemplo, as funções lineares podem ser descritas fazendo notar os aspetos que são invariantes em todas as funções lineares. Um outro modo de descrever uma função será fazendo salientar as propriedades que ela não possuiu, como por exemplo, descontinuidade ou ausência de simetria, embora, tal como refere o autor, essa negação possa também ser chamada de propriedade.

> Quando discutimos propriedades do conceito geral de função, devemos considerar todas as características associadas a um objeto que satisfaz a definição de função. Isto é claramente uma tarefa exigente, particularmente, porque diferentes indivíduos podem observar diferentes propriedades. (Slavit, 1997, p. 264)

As propriedades funcionais podem ser classificadas de acordo com a sua natureza: globais, caso envolvam uma análise da função no seu todo, ou locais, no caso de envolverem pontos individuais, contudo, existem propriedades que transcendem esta classificação. Slavit (1997) apresenta uma tabela onde as principais propriedades funcionais são distribuídas em termos da sua natureza mais global ou local (Tabela 4). A classificação utilizada pelo autor sugere que as propriedades funcionais estão mais relacionadas com os aspetos de crescimento e covariância do que com os aspetos de correspondência.

Tabela 4 – Propriedades funcionais comuns.
(Adaptado de Slavit (1997), p. 265)

Propriedades Funcionais					
	Globais				Locais
Crescimento					
	Periodicidade				Pontos de inflexão
	Simetria		Declive	Concavidade	
	Monotonia				Pontos singulares
	Assimptotas horizontais e oblíquas				Assimptotas verticais
			Contexto	Extremos	
		Limitação	Continuidade		
			Multivariáveis		
	Constante		Sinal		Intersecções
			Diferenciabilidade		
		Integrabilidade			
		Invertibilidade			
	Injetividade		Domínio		
	Sobrejetividade		Contradomínio		*Kernel*[11]
Correspondência					

O quadro teórico desenvolvido pelo autor prende-se, essencialmente, com a compreensão de função enquanto objeto matemático quando se tomam em conta certas propriedades de crescimento funcional:

> A *visão de função orientada pelas propriedades* traduz-se na gradual consciência de propriedades específicas de crescimento funcional, de natureza local e global, seguida de uma capacidade de reconhecer e analisar funções através da identificação da presença ou ausência dessas propriedades de crescimento. (Slavit, 1997, p. 266)

[11] Relação de equivalência no domínio de *f*.

A partir de vários exemplos de funções os alunos podem desenvolver um conceito imagem de função como sendo um conjunto de procedimentos e propriedades funcionais em vários sistemas de notação. À medida que os alunos vão tomando consciência que certas propriedades funcionais podem ser específicas de certas classes de funções ou generalizáveis a outras classes podem reificar a noção de função como um objeto matemático capaz de possuir ou não essas propriedades (fora do contexto dos exemplos específicos).

Uma visão orientada pelas propriedades envolve: (i) a capacidade de compreender a equivalência de procedimentos em diferentes sistemas de notação (por exemplo, resolver simbolicamente a equação $f(x)=0$ e determinar graficamente a intersecção com o eixo Ox, no sentido de determinar os zeros, são equivalentes); e (ii) a capacidade de generalizar procedimentos através de diferentes classes e tipos de funções (por exemplo, podem encontrar-se zeros de funções lineares, quadráticas e de outras). Tal conceção pode continuar a desenvolver-se enquanto o aluno for exposto a novas propriedades e ajuda a relacionar exemplos específicos de funções com os correspondentes comportamentos de crescimento: uma função quadrática, por exemplo, pode ser descrita como uma função contínua, com apenas um valor extremo, um eixo de simetria vertical e no máximo dois zeros (com crescimento de segundo grau).

O autor refere que ocorre uma forma de reificação, no sentido de Sfard, quando o aluno compreende a visão orientada pelas propriedades sem a dependência de exemplos específicos ou de tipos de funções. Nesse caso, as próprias propriedades, tais como, extremos e assimptotas, são também compreendidas como objetos matemáticos, o que se pode manifestar numa "mudança de linguagem de propriedades de processos para propriedades de objetos" (Slavit, 1997, p. 268).

A visão orientada pelas propriedades foi "apresentada para ampliar e não para substituir outras teorias" (Slavit, 1997, p. 269). Para o autor é importante que o aluno desenvolva uma visão de função orientada para o objeto pois, caso contrário, dificilmente conseguirá compreender completamente uma ação realizada sobre uma função, sendo a visão orientada pelas propriedades um caminho para o desenvolvimento do conceito de função como objeto abstrato (Figura 22).

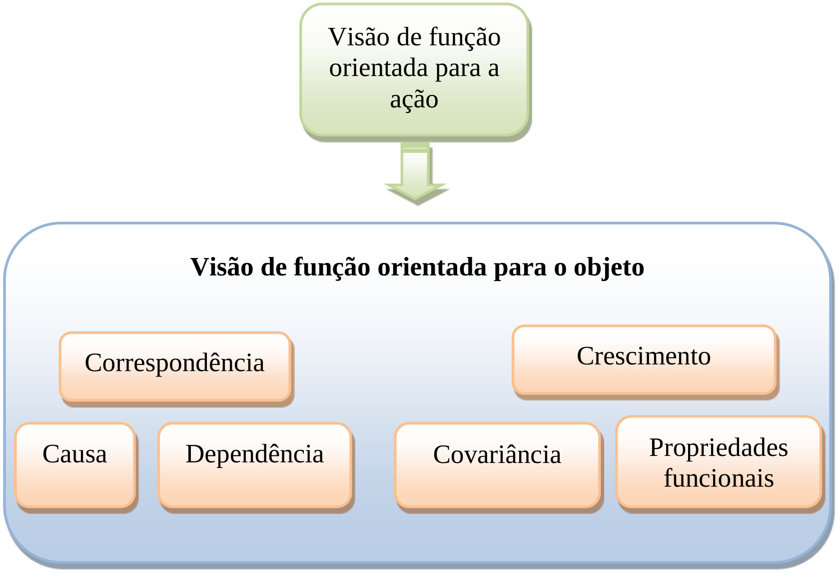


Figura 22 – Componentes de uma visão de função orientada para o objeto.

Segundo Slavit (1997) existe evidência de que os alunos obtêm uma visão de função orientada pelas propriedades, quando o estudo das funções engloba, preferencialmente, gráficos e tecnologias gráficas. A análise de dados exposta no artigo mostra que uma visão orientada pelas propriedades é apenas uma das visões que os alunos podem desenvolver sob certas circunstâncias e "veículos de instrução" (p. 277).

Bagni (2005) considera que uma visão orientada pelas propriedades pode conduzir a que os processos sejam aprendidos através de uma *particularização*: a partir do conceito geral de relação considera-se o conceito geral de função, em seguida uma classe particular de funções, e assim sucessivamente. No entanto, salienta que as experiências educacionais sugerem um caminho oposto – generalização: uma correspondência particular leva à generalização de uma classe de funções e, finalmente, ao conceito geral. Este autor sublinha ainda outra característica da abordagem orientada pelas propriedades que pode causar obstáculos na aprendizagem do conceito de função – o facto da representação gráfica ser, usualmente, a mais utilizada na abordagem do conceito geral – pois pode conduzir a um esquecimento de elementos que constituem parte da definição, como por exemplo, a indicação explícita do domínio. Os professores devem "controlar cuidadosamente, na aprendizagem e na prática diária, a independência do objeto matemático e o papel das suas representações" (Bagni, 2005, p. 214).

3.2. Representações

As representações têm um papel essencial no ensino e aprendizagem da matemática. Aliás, as representações desempenham um papel essencial na nossa vida, poi segundo Damásio: "o pensamento é feito de imagens" (2011, p. 149). Este neurocientista utiliza o termo representação "quer como sinónimo de imagem mental, quer como sinónimo de padrão neural" (2008, p. 364). O termo representação significa "*padrão consistentemente relacionado com alguma coisa*, seja uma imagem mental, seja com um conjunto coerente de atividades neurais no interior de uma região cerebral específica" (p. 364). Para Damásio não há ambiguidade no termo, sendo fácil perceber o seu significado, contudo, o problema pode colocar-se em termos da sugestão de que "a imagem mental, ou padrão neural *representam*, na mente e no cérebro e com algum grau de fidelidade, o objeto para o qual a representação remete, como se a estrutura do objeto fosse reproduzida na representação" (p. 365). Nas palavras do autor, "como o objeto é, em termos absolutos, não sabemos nem nunca viremos a saber" (p. 365).

A palavra imagem mental não diz respeito apenas a imagens "visuais", nem a objetos estáticos, inclui também imagens sonoras, e imagens somatossensoriais: "Imagens de todas as modalidades ilustram processos e entidades de todos os géneros, tanto concretos, como abstratos" (Damásio, 2008, p. 362).

No ensino e aprendizagem da matemática as representações são cruciais. Como refere Damásio (2011) se os símbolos que usamos na resolução mental de um problema matemático "não fossem imagináveis, não os reconheceríamos e não seríamos capazes de os manipular conscientemente" (p. 150). Vergnaud salienta a relevância das representações no ensino e aprendizagem da matemática não apenas pela importância do uso de sistemas simbólicos mas também por duas fortes razões epistemológicas: (i) a matemática desempenha um papel essencial na conceptualização do mundo real; e (ii) a matemática faz uso constante de homomorfismos nos quais a redução de estruturas de uns para os outros é essencial (Vergnaud, 1987, citado em Goldin, 2008).

De seguida são expostas duas teorias sobre representações desenvolvidas por investigadores na área da educação matemática. A teoria desenvolvida por Goldin permite uma visão geral sobre os sistemas de representação internos, mobilizados na resolução de problemas e na aprendizagem da matemática. Para além dos sistemas de representação mais usuais, como o sistema simbólico, o autor dá enfâse a um sistema de representação que, tradicionalmente, tem sido esquecido no âmbito da educação matemática – o sistema de representação afetivo. A teoria de Duval, ligada às representações semióticas, possibilita uma análise relativa às representações externas que são mobilizadas nos processos matemáticos, assinalando as mudanças de registo que são efetuadas, mudanças essas quem, muitas vezes, são essenciais para o sucesso na resolução de problemas.

3.2.1. Teoria das representações segundo Goldin

Goldin (2008) expõe a necessidade de se encontrar um quadro teórico unificador que sirva a pesquisa empírica e teórica relativa ao ensino da matemática e à resolução de problemas. Para o autor, um tal quadro teórico deverá incluir os seguintes constructos: representação, sistemas de representação e o desenvolvimento de estruturas representacionais durante a aprendizagem da matemática e da resolução de problemas. Nesta secção são expostas as ideias de Goldin (1998, 2008) acerca da teoria das representações.

3.2.1.1. Sistemas de representação

Uma representação é uma configuração que representa algo de algum modo:

> A configuração pode, por exemplo, atuar em vez de, ser interpretada como, estar ligada a, corresponder a, denotar, descrever, incorporar, evocar, etiquetar, estar em cadeia com, ser um meio, produzir, referir-se a, assemelhar-se, servir como metáfora para, significar, estar em vez de, ser um substituto para, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado. (Goldin, 2008, p. 179)

A relação entre a configuração de representação e a representada pode, frequentemente, ser vista como bidirecional, no sentido de que pode ser igualmente útil considerar a última como uma representação da primeira. Por exemplo, podemos considerar que uma condição está a representar um conjunto de pontos do plano e, por outro lado, podemos considerar um conjunto de pontos do plano como representação de uma condição. Na matemática as configurações e respetivas relações são estabelecidas durante um período de tempo, inicialmente através de invenções individuais ou através de convenções partilhadas que, posteriormente, acabam por se tornar normativas entre os matemáticos, encontrando-se, atualmente, codificadas nos "cérebros de milhões de pessoas que estudaram matemática" (Goldin, 2008, p. 179). Segundo o autor, é isso que nos faz interagir coerentemente uns com os outros.

As configurações individuais (palavras, números, gráficos, equações algébricas) não podem ser compreendidas isoladamente, sendo necessário incluí-las em estruturas mais amplas, os sistemas de representação:

> Quer estejamos a falar de representações matemáticas ou não matemáticas, descobrimos que elas pertencem naturalmente a sistemas mais amplos, com estrutura interna. Os algarismos, por exemplo, pertencem ao sistema de notação de base 10, Hindu-Árabe, e os gráficos cartesianos ao sistema de convenções que permite associar pares de números com pontos do plano por meio de eixos coordenados ortogonais. (Goldin, 2008, p. 179)

3.2.1.2. Componentes primitivos, configurações e estruturas

Segundo a teoria de Goldin os componentes primitivos de um sistema de representação são os caracteres ou signos. Estes podem ser entidades de um *conjunto-bem-definido*, tais como caracteres na lógica simbólica, letras de um alfabeto, marcas de pontuação. No entanto, podem também ser entidades *parcialmente-definidas* ou *ambiguamente-definidas*, tais como objetos da vida real e os seus atributos. Na matemática, os caracteres podem ser objetos concretos como os algarismos e os símbolos aritméticos ou entidades abstratas como os vetores e as matrizes. Uma importante característica destes caracteres, vistos como entidades elementares dentro do sistema de representação, é que não lhes é atribuída nenhuma interpretação ou significado anterior.

Um sistema de representação inclui também regras para combinar os caracteres em *configurações permitidas.* As configurações permitidas podem ser especificadas através de *regras-bem-definidas* ou podem também ser *ambiguamente-definidas*. Por exemplo, os números com um dígito podem ser combinados através de regras bem definidas para formar números multi-dígitos, enquanto as palavras podem ser combinadas de modo a formar frases gramaticais, envolvendo uma certa ambiguidade.

Usualmente um sistema de representação envolve ainda estruturas mais complexas, tais como configurações de configurações, relações de ordem parcial ou total na família de configurações, operações matemáticas, regras para a linguagem natural ou lógica, etc.

Os caracteres e configurações de um sistema de representação adquirem significado através das estruturas dentro do sistema – noção de significado sintático ou estrutural. Por exemplo, na lógica, os caracteres "e", "ou" e "negação" são indefinidos, e adquirem significado através dos axiomas e regras de inferência que os combinam de certos modos. Esta noção complementa-se e contrasta com a noção de significado semântico, onde o sentido é inerente ao que significa fora do sistema.

Na matemática os sistemas de representação externos começam com pressupostos ou convenções e são estruturados a partir dessas convenções, de modo que uma utilização "correta" significa que o é de acordo com essas normas convencionais. Por exemplo, não existe, nas palavras do autor, nada de "objetivamente verdadeiro" para que na expressão $3+4\times2$ seja em primeiro lugar efetuada a multiplicação e só depois a adição. Contudo, a partir do momento que são estabelecidas as regras, os padrões deixam de ser arbitrários.

3.2.1.3. Representações externas e internas

Nos sistemas de representação externos ao indivíduo é usualmente possível explicitar os caracteres, explicitar as regras para a construção das configurações e, a partir daí discutir, de modo relativamente concreto, vários tipos de estrutura do sistema. Mas, de acordo com Goldin, para se compreender a aprendizagem e a resolução de problemas na matemática é necessário considerar os sistemas de representação psicológicos internos dos indivíduos. Essa não é uma tarefa fácil pois não é possível observar diretamente as representações internas, elas podem apenas ser inferidas através dos comportamentos observáveis, os quais podem incluir interações com representações externas. O autor refere o caso dos professores que fazem continuamente inferências acerca das conceções ou equívocos dos alunos baseados nas representações externas.

Segundo o autor o ensino das configurações matemáticas externas tem tradicionalmente sido estático mas, com a introdução das calculadoras, dos computadores e outras tecnologias, existe a possibilidade de ligá-las e mudá-las dinamicamente. Contudo, as configurações externas têm também que ser processadas internamente:

> As notações matemáticas simbólicas, as linhas numéricas visuais/espaciais, os planos complexos, os gráficos, os diagramas de *Venn*, os micromundos computorizados, e assim sucessivamente, também são representados e processados internamente. É o nível interno que determina em grande parte a utilidade desses sistemas de representação externos, de acordo com a forma como os indivíduos os compreendem e interagem com eles. (Goldin, 2008, p. 181)

Por um lado, podemos considerar o externo a representar o interno (por exemplo, quando um aluno elabora um esquema para expressar as suas ideias) e, por outro lado, podemos tomar o interno para representar o externo (por exemplo, quando um aluno "visualiza" uma representação gráfica a partir de uma relação algébrica), o que mostra a perspetiva bidirecional da relação de representação.

Um aspeto muito importante desta teoria é que configurações internas de diversos tipos podem representar-se umas às outras de diferentes modos. Para Goldin "uma maneira de explorar a compreensão que um aluno tem de um conceito matemático é considerar a variedade de representações internas apropriadas (ou inapropriadas) que ele formou e analisar a relação de representação que ele desenvolveu" (p. 182).

3.2.1.4. Sistemas de representação internos

Goldin considera necessário desenvolver um quadro teórico que possibilite caracterizar o complexo processo cognitivo e afetivo dos indivíduos. Tal quadro teórico deverá permitir descrever os signos internos, as configurações internas e os elevados níveis de estruturas internas de diferentes tipos. O autor refere que o facto de se considerar um único e complexo sistema de representação com muitas estruturas internas ou dois ou mais sistemas mais simples com relações de representação entre eles é uma questão de conveniência.

O seu modelo foi desenvolvido para caracterizar a competência na resolução de problemas mas provou ser também útil no estudo da aprendizagem e do desenvolvimento conceptual. É baseado em cinco tipos de sistemas de representação internos: (i) sistemas verbais/sintáticos; (ii) sistemas imagísticos; (iii) sistemas de notação formal; (iv) sistemas de planeamento, monitorização e controlo executivo; e (v) sistemas afetivos. Para o autor todos os cinco tipos de representação interna têm que ser vistos como psicologicamente fundamentais, pois "não ocorrem apenas universalmente entre os indivíduos que resolvem problemas matemáticos e científicos, mas com a possível exceção do sistema de notação formal, ocorrem também universalmente nos seres humanos" (Goldin, 1998, p. 148).

Segundo esta teoria um sistema de representação verbal/sintático descreve a capacidade do indivíduo para processar a linguagem natural, ao nível de competências lexicográficas, associações verbais, assim como de gramática e de sintaxe. As configurações dos sistemas verbais/sintáticos podem descrever semanticamente as configurações dos outros sistemas, uma vez que, as configurações imagísticas, formais, heurísticas ou afetivas podem ser todas descritas por palavras. Existe também um poderoso referencial próprio de competências na linguagem natural pois as palavras e frases podem ser usadas para descrever outras palavras e frases.

Os sistemas imagísticos incluem sistemas de representação visuais/espaciais, auditivos/rítmicos e tácteis/cinestésicos. Para o autor o termo imagístico é usado no sentido mais amplo da palavra "imaginação".

> Os sistemas imagísticos incorporam configurações internas não verbais ao nível dos objetos, atributos, relações e transformações, codificando o que pode ser vagamente chamado de "informação semântica". Assim, a sua inclusão num modelo unificador permite a descrição de mecanismos pelos quais as estruturas semânticas influenciam a resolução de problemas. As competências para aceder e processar tais informações não verbais são *necessárias*[12] para a interpretação significativa ou perspicaz das afirmações nos problemas verbais. (Goldin, 1998, p. 149)

Apesar dos sistemas cognitivos de representação visuais/espaciais desempenharem um papel bastante relevante no domínio da matemática, de acordo com

[12] Em itálico no original.

Goldin, existem também evidências de codificação auditiva/rítmica aplicada à matemática quando, por exemplo, as crianças aprendem a contar ritmicamente ou quando acentuam os números ao utilizarem estratégias de contagem para resolver problemas.

De acordo com esta perspetiva os sistemas táteis/cinestésicos correspondem às representações internas de ações físicas imaginadas pelo indivíduo ou sobre o indivíduo. Essas ações podem ser de diferentes tipos: (i) ações que o indivíduo imagina desempenhar, tais como alcançar com a mão, tocar e sentir formas e sensações, andar ou atuar com o corpo, estimar distâncias com as mãos ou com partes do corpo, puxar e sentir pressão com a mão ou com o corpo, voar; (ii) ações que o indivíduo imagina serem exercidas em si pelo ambiente, ou seja, por outra pessoa ou objeto, por um campo de forças (gravidade, por exemplo); (iii) ações imaginadas pela ou sobre a pessoa em vez de algo externo no ambiente, tais como rodar o corpo de modo a corresponder à rotação de uma figura, imaginar as mãos pressionadas para representar as forças exercidas por dois corpos, imaginar os nossos braços a representar um ângulo; e (iv) ações físicas imaginadas pela ou sobre a pessoa, como se correspondesse a outra pessoa. Segundo Goldin (1998), a representação táctil/cinestésica é essencial para a compreensão da interação da criança com ambientes computacionais.

A compreensão de palavras e frases inclui a competência de aceder a configurações imagísticas que correspondem apropriadamente a configurações verbais/sintáticas. Também a compreensão de símbolos matemáticos formais inclui competências sofisticadas de aceder ou de construir configurações imagísticas correspondentes. Assim, os caracteres e configurações nos sistemas verbais/sintáticos ou nos sistemas de notação formal podem também funcionar como "objetos" que podem ser manipulados imagisticamente.

Os sistemas convencionais de notação formal da matemática são "sistemas simbólicos altamente estruturados" (Goldin, 1998, p. 152). Entre eles podem referir-se, por exemplo, os sistemas de numeração, os algoritmos aritméticos e as notações algébricas. Estes são essenciais para analisar eficazmente a resolução de problemas matemáticos. A estrutura destes sistemas em termos de representação externa pode ser facilmente explorada. Os sistemas de notação formal incluem as configurações internas correspondentes à aprendizagem dos sistemas simbólicos convencionais da matemática e os modos relativos à sua manipulação. A compreensão do significado de uma notação matemática ou de um procedimento matemático envolve o facto de se conseguir falar sobre isso. Envolve também correspondência entre símbolos, configurações imagísticas e palavras.

> Alguns processamentos cognitivos podem ser vistos como ocorrendo *dentro*[13] do sistema de notação formal (por exemplo, a execução de um algoritmo); mas muito do que podemos chamar conhecimento significativo em matemática tem que ver com as relações que as configurações formais dos símbolos têm com outros tipos de representação interna. (Goldin, 1998, p. 153)

O sistema de planeamento, monitorização e de tomada de decisão guia ou dirige a resolução de problemas (Goldin, 1998). Este sistema inclui competências para: (i) controlar a situação noutros e no próprio sistema; (ii) decidir os passos que deverão ser dados ou os movimentos que deverão ser feitos dentro de todos os sistemas internos de representação, incluindo no próprio; e (iii) modificar os outros sistemas – decisão de melhorar as notações formais convencionais, invenção de novas palavras, adoção de mudança nos afetos, e assim sucessivamente. Este sistema mantém uma relação metacognitiva com os restantes. Para o autor o processo "heurístico" é considerado a unidade organizacional com maior utilidade dentro deste sistema. Tal processo inclui "tentativa e erro", "pensar num problema mais simples", "explorar casos especiais", "desenhar um diagrama", etc. O autor propôs que fossem utilizadas quatro dimensões de análise para examinar e comparar os processos heurísticos: (i) razões avançadas de planeamento para uso de um processo particular; (ii) domínio de métodos específicos de aplicação de um processo; (iii) domínios e níveis onde um processo pode ser aplicado, e (iv) critérios prescritivos que sugiram a aplicação de um processo particular. Para Goldin (1998) a complexidade deste sistema de representação deve-se, em parte, devido ao facto do processo heurístico poder aceder e atuar com cada um dos outros sistemas no decurso do seu uso.

O sistema afetivo inclui não apenas o que o autor chama de "afeto global" associado às crenças e atitudes estáveis relativamente à matemática mas também os estados de mudança de sentimentos que os indivíduos experienciam e utilizam durante a resolução de problemas – "afetos locais" – curiosidade, desafio, perplexidade, frustração, ansiedade, medo, desespero, encorajamento, prazer, euforia e satisfação. O

[13] Em itálico no original.

autor refere a necessidade de considerar competências afetivas e olhar os afetos apropriados para a resolução de problemas como algo que pode ser aprendido e suscetível de ser ensinado.

Na perspetiva de Goldin a interação entre afeto e heurísticas é subtil, pois as configurações afetivas podem não apenas influenciar mas substituir decisões, com consequências que tanto podem ser benéficas como nefastas. As competências relacionadas com este sistema incluem processos de "tradução" de configurações imagísticas e heurísticas para estados de afeto que sejam desejáveis e úteis para a resolução de problemas. Os indivíduos que resolvem problemas de forma eficaz fazem uso do afeto para interpretar e avaliar o seu progresso durante a resolução de problemas (Goldin, 1998).

Para o autor o facto de se considerar o afeto como um sistema de representação significa que este deixa de ser visto apenas como um estado emocional ou uma atitude e pressupõe que pode ser configurado. O afeto funciona como uma linguagem facilitando a comunicação entre os seres humanos, sendo o contexto essencial para o estabelecimento de significação. De acordo com esta teoria é necessário "considerar as complexas relações simbólicas entre as configurações afetivas e entre estas e as cognitivas" (Goldin, 1998, p. 155).

Os sistemas de representação internos relacionam-se uns com os outros através de complexas relações de significado e simbolização:

> Os vários sistemas [de representação internos] devem ser considerados não separada ou isoladamente mas em constante interação. Estas relações internas, conjuntamente com relações de denotação e interpretação entre representações internas e externas, codificam os significados matemáticos da atividade cognitiva e afetiva dos indivíduos. (Goldin, 2008, p. 183)

3.2.1.5. Estádios de desenvolvimento

Os sistemas de representação desenvolvem-se com o tempo nos indivíduos, sendo estruturados pela presença de sistemas anteriores. Segundo o autor, este desenvolvimento é constituído por três estádios principais, aplicáveis a cada sistema: (i) estádio inventivo/semiótico; (ii) período de desenvolvimento estrutural, e (iii) estádio autónomo.

Durante o estádio inventivo/semiótico são criados ou aprendidos novos signos, sendo tomados desde o início para simbolizar aspetos de sistemas de representação previamente estabelecidos. Este ato é denominado semiótico. O sistema anterior serve de domínio semântico para os novos símbolos. Como refere Goldin (1998), por vezes, neste estádio "os caracteres são tratados não apenas como simbolizando mas como sendo os aspetos do sistema anterior que eles representam" (p. 156). O autor exemplifica com o caso da potenciação, quando é introduzida a notação 3^4 esta pode ser tomada como o ato de calcular $3\times3\times3\times3$.

Durante o estádio de desenvolvimento estrutural do novo sistema de representação são construídas as configurações a partir dos caracteres e as regras sintáticas intrínsecas para o novo sistema, sendo essas construções inicialmente impulsionadas pelas características estruturais do sistema de representação previamente estabelecido. Nesta teoria, os novos caracteres e configurações no novo sistema deixam gradualmente de ser entidades discretas que não estão relacionadas umas com as outras para formarem um todo estrutural. São construídas redundâncias, de modo que as relações com o sistema anterior são reforçadas através do desenvolvimento da estrutura intrínseca do novo. O autor refere a importância de que o desenvolvimento estrutural de um novo sistema seja baseado em relações de representação significativas com sistemas anteriores, caso contrário, pode ser construído um sistema interno formal, sem conexões semânticas. Goldin exemplifica com o caso da notação algébrica e as suas operações:

> O aluno pode, por exemplo, aprender a "mover o '*x*' para o outro membro da equação, trocando-lhe o sinal", sem compreender o que tais passos significam, porque é que são válidos, ou o que realizam. O procedimento é formal. (…) O aluno pode ou não aprender alguma álgebra na forma de exercícios escolares (isto é, no formato original descontextualizado em que a álgebra foi praticada). Mas o sistema pode nunca vir a funcionar flexível e autonomamente, como uma abstração de boa-fé. (Goldin, 2008, p. 187)

De acordo com esta perspetiva, no estádio autónomo, o novo sistema cognitivo de representação separa-se do antigo, podendo estabelecer relações simbólicas com outros sistemas para além do modelo original. Os caracteres e as configurações, no novo sistema, podem assumir outros significados para além dos inicialmente atribuídos. As novas competências oferecidas pelo novo sistema podem ser transferidas através da abstração.

3.2.1.6. Representação, padrões, comunicação e ambiguidade

Goldin (2008) considera que os padrões são os objetos fundamentais de estudo na matemática. Para o autor existem duas perspetivas segundo as quais os padrões podem ser considerados. Por um lado podem ser entendidos como estruturas representacionais exteriores aos indivíduos, suscetíveis de serem detetados. Nesse caso, o padrão existe e a mente está consciente dele. Outra importante perspetiva considera que os padrões são inventados, construídos ou impostos pelos indivíduos no decorrer das suas experiências. Nesse caso, são estruturas internas aos indivíduos que se encontram em relação significativa com as externas.

> O desenvolvimento matemático dos indivíduos ocorre através da construção de sistemas de representação internos (…), juntos com múltiplas codificações de esquemas conceptuais cognitivos/afetivos entre diferentes sistemas.
> O poder matemático consiste não apenas em ser capaz de detetar, construir, inventar, compreender ou manipular padrões mas também ser capaz de os comunicar aos outros. (Goldin, 2008, p. 184)

Na perspetiva do autor a matemática pode ser compreendida como uma linguagem e pode-se considerar o desenvolvimento dos vários sistemas de representação internos "expressivos da matemática como a aprendizagem da língua – isto é, ocorrendo através da participação na comunicação, e tendo aspetos estruturais (sintáticos) e aspetos representacionais (semânticos) " (Goldin, 2008, p. 184).

A partir dos vários tipos de representação internos os indivíduos produzem múltiplas e complexas configurações externas que as outras pessoas conseguem interpretam:

> (1) Linguagem oral e escrita; (2) gestos icónicos, desenhos, representações pictóricas, produções musicais e rítmicas; (3) fórmulas matemáticas e equações; (4) expressões de objetivos, estruturas de intenção, planeamento decisão; (5) contacto visual,

> expressão facial, linguagem corporal, contacto físico, lágrimas ou risos, e exclamações de emoções. (Goldin, 2008, p. 184)

Segundo Goldin a ambiguidade pode ser uma característica necessária na caracterização de um sistema de representação ou da sua relação com outros sistemas. Na linguagem natural ou na comunicação matemática, quando a ambiguidade está presente, é necessário, normalmente, recorrer ao contexto para resolver o problema, o que requer sair do sistema original – "na prática, interpretamos expressões matemáticas incertas, diagramas, afirmações em problemas, e assim por diante, quando temos informação acerca dos objetos e do contexto a que se referem" (Goldin, 2008, p. 184). De acordo com o autor a ambiguidade na relação entre dois sistemas de representação é, muitas vezes, resolvida recorrendo a um terceiro sistema.

Os matemáticos têm feito um esforço para reduzir ou eliminar a ambiguidade das representações formais na matemática, mas, em contraste, de acordo com Goldin, o poder e flexibilidade de alguns dos sistemas de representação discutidos anteriormente, parecem depender da presença da ambiguidade:

> Os processos heurísticos, as estratégias de resolução de problemas, ou as técnicas de "pensamento crítico", altamente estruturadas e poderosas no indivíduo, podem requerer uma considerável contextualização antes de "fazerem sentido" numa dada situação. Ainda maior ambiguidade, e maior poder, podem estar associados com os estados emocionais internos do indivíduo. (Goldin, 2008, p. 184)

Goldin (1998) refere que, apesar dos esforços para uma mudança das práticas nas salas de aulas de modo a enfatizar as estratégias de resolução de problemas, a visualização, o reconhecimento de padrões e outras técnicas mais orientadas para a conceptualização, muitas escolas continuam praticamente a dedicar atenção à manipulação dos sistemas de notação formal. Na opinião do autor é necessário encontrar maneira de fornecer "um equivalente nível de atenção à representação imagística, de planeamento e controlo executivo, e representação afetiva, sem sacrificar a aprendizagem das técnicas matemáticas" (p. 159).

3.2.2. Representações semióticas mobilizadas nos processos matemáticos segundo Duval

Nesta seção são expostas algumas das ideias de Duval relativamente aos registos de representação semióticos que são essenciais para analisar a atividade matemática dos alunos, e "identificar a raiz dos problemas relativos à compreensão da matemática, e não apenas à compreensão de determinados conceitos, que muitos alunos têm" (Duval, 2006, p. 111).

De acordo com Duval (2006), as dificuldades que muitos alunos apresentam na compreensão da matemática devem-se não apenas à complexidade dos conceitos envolvidos, complexidade epistemológica que pode ser explicada através da história da sua descoberta, mas também devido ao facto dos objetos matemáticos não serem acessíveis através da perceção ou de instrumentos. Por exemplo, alguns objetos físicos podem ser observados através de microscópios ou telescópios, enquanto os objetos matemáticos apenas são acessíveis através de signos e representações semióticas.

O pensamento matemático requer um enorme desafio por parte dos alunos, pois, por um lado, qualquer atividade matemática requer o uso de representações semióticas e, por outro lado, os objetos matemáticos não devem nunca ser confundidos com a representação que é usada. Para Duval (2006) esta situação gera um conflito cognitivo: "como é que [os alunos] podem distinguir o objeto matemático representado da representação semiótica usada se não conseguem ter acesso ao objeto matemático para além das representações semióticas?" (p. 107). O autor considera que o limiar crítico para o progresso na aprendizagem e resolução de problemas se manifesta, muitas vezes, pela capacidade de mudar de um sistema de representação para outro.

> A atividade matemática necessita de ter diferentes sistemas de representação semiótica que possam ser livremente usados de acordo com a tarefa a desempenhar ou com a questão colocada. Alguns processos são mais fáceis num sistema semiótico do que noutro, ou podem até ser apenas desempenhados num sistema. Em muitos casos não é apenas um sistema de representação que, implícita ou explicitamente, é usado, mas pelo menos dois. (Duval, 2006, p. 108)

3.2.2.1. Classificação dos registos que podem ser mobilizados na atividade matemática

O autor distingue quatro tipos diferentes de sistemas semióticos que podem ser mobilizados nos processos matemáticos e que denomina de *registos de representação*[14]. Estes são classificados de acordo com a sua função, *monofuncional* ou *multifuncional*, e, em termos do tipo de operação, discursiva ou não discursiva. Os registos *monofuncionais* têm apenas a função cognitiva de processamento matemático, enquanto os registos *multifuncionais* podem preencher uma variedade de funções cognitivas, tais como, comunicação e imaginação (Tabela 5).

Tabela 5 – Classificação dos registos que podem ser usados nos processos matemáticos.
(Adaptado de Duval, 2006, p. 110)

	Representações resultantes de um dos três tipos de **Operações discursivas** 1. Denotação de objetos (nomes, marcas …) 2. Estabelecimento de relações ou propriedades **3.** Inferência (dedução, cálculo …)	**Representações não discursivas (formas de configuração 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D)**
Registos Multifuncionais Os processos não podem ser convertidos em algoritmos	**Na linguagem natural**: duas modalidades de expressão não equivalentes - **Oralidade** *explicações, …* **?** - **Escrita** (visual): *teoremas, provas, …*	**Icónicas**: desenho, esboço, padrão **Não Icónicas**: figuras geométricas que se podem construir com ferramentas
	Representações auxiliares transitórias Não existem regras de combinação (suporte livre)	
Registos Monofuncionais A maioria dos processos são algoritmos	**Nos sistemas simbólicos** Apenas escrita: *impossível serem ditos oralmente a não ser soletrando* *Cálculo, prova*	D2 combinação de formas D1 e D0 (orientadas ou não) *Diagramas, gráficos*

Os sistemas *monofuncionais* característicos da matemática são baseados em regras de formação da representação, por exemplo, existem regras para os sistemas de notação numérica, para a construção de gráficos cartesianos, etc. Existem, no entanto,

[14] O autor considera registos apenas os sistemas de representação semiótica que permitem transformação de representações.

representações usadas na atividade matemática que não dependem de um sistema de representação semiótica, não tendo regras de formação nem possibilidades de transformação. Tais representações são usadas como material de manipulação e, usualmente, são *representações auxiliares transitórias*, por exemplo, um conjunto de palitos pode ser usado para representar números inteiros.

3.2.2.2. Transformações das representações semióticas

Nesta perspetiva existem dois tipos de transformação de representações semióticas: *tratamentos* e *conversões*.

Os tratamentos são transformações dentro do mesmo registo (correspondentes às setas curvas na Tabela 5), tais como, efetuar um cálculo no mesmo sistema de notação ou resolver uma equação. Os sistemas semióticos desempenham um papel intrínseco nos processos matemáticos: "os tratamentos, que podem ser realizados, dependem principalmente das possibilidades de transformação semiótica, as quais são específicas do registo utilizado" (Duval, 2006, p. 111). Por exemplo, o cálculo $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$ pode ser mais rápido usando o sistema decimal $0,20+0,25$. Assim, por vezes, por questões de economia ou de visibilidade, pode mudar-se de sistema de notação para proceder ao tratamento.

As conversões (correspondentes às setas direitas na Tabela 5) são transformações de representação do mesmo objeto que correspondem a uma mudança de registo, por exemplo, a passagem da notação algébrica de uma função para a sua representação gráfica. As conversões são mais complexas do ponto de vista cognitivo, uma vez que, "qualquer mudança de registo requer, em primeiro lugar, o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações cujos conteúdos não têm, muitas das vezes, nada em comum" (Duval, 2006, p. 112). O autor salienta que as conversões não podem ser consideradas como traduções ou codificações, como muitas vezes são classificadas, pois por vezes não existe congruência em termos da conversão.

A conversão não pode ser separada do tratamento uma vez que é a escolha do tratamento que determina a relevância do registo. A mudança de um registo para outro, muda "não apenas os meios do tratamento, mas também as propriedades que se podem explicitar" (Duval, 2006, p. 114). Nesse sentido, o reconhecimento do mesmo objeto em diferentes registos é essencial para a compreensão da matemática, pelo que, é importante que o aluno consiga discriminar, em cada representação semiótica, o que é matematicamente relevante. Os problemas de reconhecimento e discriminação são, assim, intrínsecos à construção de conexões entre registos.

Duval (2006) apresenta alguns exemplos que ilustram a dificuldade dos alunos em efetuarem tratamentos em registos *multifuncionais*, particularmente, no que diz respeito à complexidade do uso de figuras e do "carácter não natural para a maioria dos alunos do ato de ver em geometria" (p. 119). Uma outra fonte de incompreensão corresponde à conversão de representações que, segundo o autor, é muitas vezes tomada como um sinal de incompreensão conceptual, no entanto, este manifesta a sua discordância com essa visão, referindo-se ao exemplo da dificuldade manifestada por um elevado número de alunos na conversão da representação gráfica de uma função na representação simbólica, que considera independente da compreensão do conceito de função.

O desempenho na conversão de representações depende da natureza dos dois registos que são mobilizados para a transformação da representação através de dois fenómenos: a variabilidade de congruência/não congruência para representações do mesmo objeto e a sentido da conversão.

O fenómeno de congruência ou não congruência pode ser descrito por três fatores: (i) a existência ou não de uma bijeção entre todos os constituintes significativos do conteúdo da fonte de representação (símbolos, palavras, ou características visuais) e a representação de destino; (ii) a unicidade da escolha de cada constituinte significativo da representação de destino; e (iii) a manutenção da ordem de organização dos constituintes significativos entre a fonte de representação e a representação de destino. Quando os alunos enfrentam conversão de representações não congruentes, são "apanhados num conflito cognitivo entre o conhecimento requerido e uma impossibilidade cognitiva" (p. 123). Por um lado, a conversão requer a *dissociação cognitiva* do objeto representado e do conteúdo da representação semiótica particular através do qual ele foi primeiro introduzido e usado na aprendizagem e, por outro lado, existe uma *impossibilidade cognitiva de dissociação* do objeto representado e do conteúdo da representação, pois não existe outro modo de se ter acesso ao objeto matemático senão através da sua representação semiótica. É este conflito cognitivo que leva a que duas representações do mesmo objeto sejam consideradas como sendo dois objetos diferentes, fazendo com que os registos de representação permaneçam compartimentados.

A direção da conversão é também um dos fatores para o sucesso na mudança de representação. Apesar de nenhum registo, considerado separadamente, parecer melhor dominado do que o outro, o desempenho varia consoante os pares: fonte de registo, registo de destino, o que não se deve apenas a uma questão de codificação ou dos conceitos matemáticos envolvidos. Na terminologia de Vergnaud (1998), a dificuldade prende-se com os teoremas-em-ação envolvidos na conversão de um registo para outro.

Para Duval (2006) a questão fundamental relativamente à aprendizagem da matemática é a seguinte: "como discriminar em cada conteúdo de representação, qualquer que seja o registo usado, o que é ou não matematicamente relevante?" (p. 124). O autor considera que só através da investigação da variação de representações na fonte de registo e na fonte de destino os alunos podem compreender o que é matematicamente relevante em cada representação, conseguir a sua conversão e dissociar o objeto representado do conteúdo dessas representações. Por exemplo, a variação dos parâmetros de uma classe de funções no registo simbólico e a investigação dos seus efeitos no registo gráfico é essencial para que os alunos consigam compreender o que é matematicamente relevante em cada representação, o que por sua vez, irá facilitar a conversão de um registo para outro. Para Duval, o desenvolvimento da capacidade de mudar de registo de representação é o principal desafio do ensino da matemática:

> Os processos de pensamento matemático dependem da sinergia cognitiva dos registos de representação. A coordenação dos registos de representação semiótica fornece algo como uma extensão da capacidade mental. Nesta perspetiva, a oposição muitas vezes feita entre a compreensão como sendo conceptual ou puramente mental e as representações semióticas como sendo externas parece ser enganadora. De facto, as representações mentais que são úteis e pertinentes na matemática são sempre representações semióticas interiorizadas. (Duval, 2006, p. 126)

3.3. Múltiplas representações

3.3.1. O papel das múltiplas representações no ensino e aprendizagem

As representações externas permitem comunicar ideias, sendo usadas no ensino com o objetivo de ajudar os alunos a desenvolverem representações internas apropriadas (Pierce, Stacey, Wander & Ball, 2011). Nos últimos anos têm surgido vários estudos sobre o papel das múltiplas representações externas na aprendizagem da matemática. Segundo Ainsworth (2006), a questão que se deve colocar já não é sobre o seu contributo para a aprendizagem, mas as circunstâncias em que o trabalho com múltiplas representações se torna uma influência efetiva. Esta opinião é partilhada por vários investigadores ligados à educação matemática, que afirmam que a facilidade em usar múltiplas representações e a flexibilidade em mudar dentro de um conjunto de representações (incluindo gráfica, tabular, algébrica e verbal) é um componente essencial na capacidade de resolução de problemas (Heinze; Star & Verschaffel, 2009). Estes autores referem também que ensinar os alunos a resolver um problema com rapidez e exatidão já não é um objetivo suficiente na educação, sendo necessário que estes consigam também usar representações flexivelmente.

O termo flexibilidade representacional é utilizado por diferentes autores com diferentes significados. Nistal, Dooren e Verschaffel (2012) definem flexibilidade representacional como disposição do aluno para fazer escolhas representacionais apropriadas, tendo em consideração as características da tarefa, do próprio, e do contexto. No entanto, o termo é habitualmente utilizado para designar a capacidade para trabalhar num mesmo sistema e entre sistemas de representação, alternando flexivelmente entre eles, correspondendo à capacidade em efetuar transformações e conversões entre representações utilizando a terminologia de Duval (2006).

Graham *et al*. (2009) vão um pouco mais longe e salientam a importância de desenvolver no aluno o *pensamento versátil*. Este envolve três elementos: versatilidade processo/objeto – capacidade de percecionar uma entidade matemática como um processo ou como um objeto, em qualquer sistema de representação; versatilidade visual/analítico – capacidade para explorar o poder de esquemas visuais, ligando-os a esquemas lógico/analíticos relevantes; e versatilidade representacional – capacidade de trabalhar integralmente numa representação e entre representações e interagir com as representações de forma processual e conceptual. No que concerne à versatilidade representacional, os autores consideram que esta envolve o que Duval designa por tratamentos e conversões, mas engloba também um outro aspeto crucial, as interações processuais e conceptuais com as representações, as quais podem inclusive conduzir à construção de novos sistemas de representação.

Ainsworth (2006), na sua revisão de literatura, apresenta as funcionalidades pedagógicas e as tarefas cognitivas associadas à aprendizagem com múltiplas representações externas. No que diz respeito às funcionalidades pedagógicas considera três elementos chave: complementar, restringir e construir (Figura 23). Relativamente às tarefas cognitivas a autora aponta as *características da representação* e as *características do indivíduo* como fatores que podem influenciar o estabelecimento de conexões entre diferentes representações.

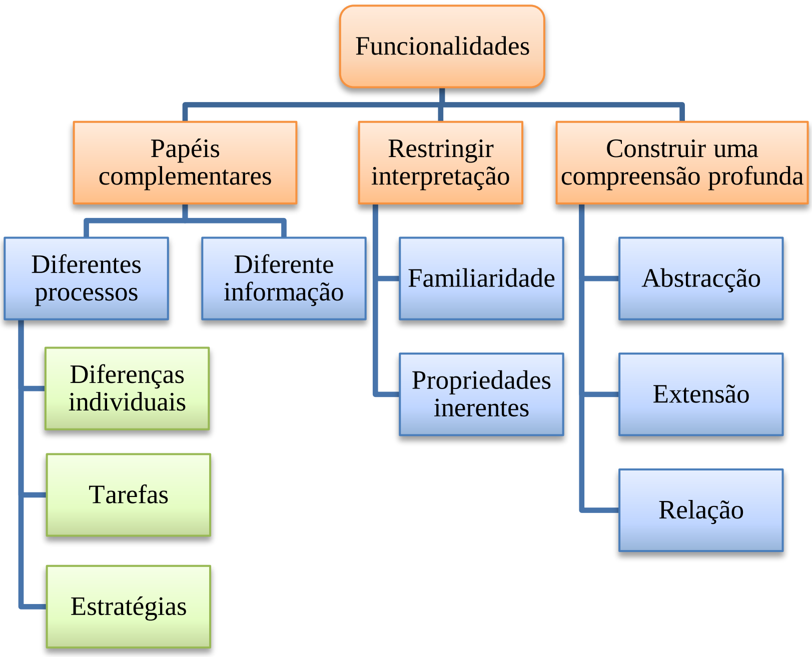


Figura 23 – Taxonomia funcional das múltiplas representações.
(Adaptado de Ainsworth, 2006, p. 187)

As funcionalidades complementares incluem diferentes processos e diferente informação. Os processos complementares podem ser vantajosos por diversas razões: (i) *diferenças individuais* – se aos alunos forem apresentadas várias representações, estes podem escolher trabalhar com aquela que melhor compreendem; (ii) *tarefas* – o desempenho é facilitado quando a estrutura da informação requerida para o problema coincide com a forma fornecida pela notação representacional; os alunos podem escolher a melhor representação de acordo com a tarefa; e (iii) estratégias – diferentes formas de representação podem encorajar os alunos a usarem mais ou menos estratégias efetivas, ou seja, o uso de múltiplas representações externas encoraja os alunos a experimentarem mais do que uma estratégia para resolver um problema. O uso de várias representações externas fornece também informação complementar pois cada representação contém alguma informação diferente.

Uma segunda vantagem de trabalhar com múltiplas representações externas, de acordo com Ainsworth (2006), prende-se com o facto de que uma representação pode restringir a interpretação de outra representação, devido à familiaridade ou a propriedades inerentes das próprias representações.

As múltiplas representações suportam também a construção de uma compreensão mais profunda pois permitem integrar informação para alcançar conhecimento que seria difícil de obter apenas com uma representação, aumentando ainda a probabilidade desse conhecimento ser transferido para novas situações. Ainsworth (2006) considera que tal conhecimento pode ser atingido através da (i) *abstração*, processo pelo qual os alunos criam entidades mentais que servem de base para novos procedimentos e conceitos, de alto nível de organização (corresponde à reificação de Sfard); (ii) *extensão*, processo pelo qual o aluno estende o conhecimento de uma representação conhecida para uma desconhecida, sem que haja uma reorganização fundamental na natureza do conhecimento, por exemplo, um aluno que consiga interpretar um gráfico de velocidade – tempo com vista a determinar quando um corpo está a acelerar pode estender esse conhecimento para tabelas ou gráficos de aceleração – tempo; (iii) *relação*, o conhecimento relacional é o processo pelo qual duas representações são associadas sem reorganização do conhecimento e, pode ser um objetivo do ensino por si próprio ou servir de base à abstração.

As diferenças em termos das funcionalidades da aprendizagem com múltiplas representações externas são “subtis e podem estar todas presentes nalgum estádio do ciclo do encorajamento de uma compreensão mais profunda” (Ainsworth, 2006, p. 189).

O estudo de Pierce *et al.* (2011) mostrou que é necessário algum cuidado ao trabalhar com múltiplas representações, os alunos têm que sentir que não estão apenas a resolver a mesma tarefa de uma outra maneira, caso contrário podem ficar desmotivados. O estudo envolveu a criação de uma aula, recorrendo a múltiplas representações, em dois ciclos de *design* (*design research*), sendo feitos ajustes no ciclo 2 de acordo com a experiência de ensino e a análise retrospetiva. A experiência de ensino no ciclo 1 mostrou que os alunos estavam relutantes em se envolver com múltiplas representações, que trariam novos aspetos para a compreensão do problema, porque já tinham uma "resposta". Assim, no ciclo 2, decidiram que cada nova representação seria usada para resolver uma nova parte do problema e as diferenças deveriam ser explicitamente identificadas, tendo assim sido resolvido o problema de aparente repetição e desmotivação dos alunos.

Vários estudos mostram que os alunos apresentam dificuldades em coordenar e relacionar múltiplas representações. De acordo com Ainsworth (2006), são vários os fatores que podem estar na origem dessas dificuldades. Por um lado, as características da própria representação, entre as quais se destacam: o *canal sensorial da representação*; a *modalidade da representação* (textual ou gráfica/diagramática); o *nível de abstração da representação*; a *especificidade da representação*[15]; o *tipo de representação* (por exemplo, histograma, equação, tabela, texto, figura); a *apresentação integrada de representações*; as *representações estáticas ou dinâmicas* e a *dimensão da representação*. Por outro lado, as características do próprio indivíduo, tais como, a familiaridade com a representação; a familiaridade com o domínio da representação; a idade e diferenças individuais. Nas palavras de Graham *et al*. (2009), "uma representação pode ser uma construção multifacetada que assume diferentes papéis dependendo da interação de um indivíduo com ela" (p. 685).

Existe um consenso entre os investigadores de que a informação proveniente de várias representações exploradas em simultâneo, com a ajuda da tecnologia, pode conduzir a esquemas cognitivos mais fortes do que os que são desenvolvidos quando é focada apenas uma representação (Pierce *et al.*, 2011). Os autores salientam a importância da tecnologia no trabalho com múltiplas representações, já que sem a sua ajuda a conjugação de informação proveniente de várias representações era apenas praticável em casos muito simples. O papel da tecnologia no trabalho com múltiplas

[15] A especificidade de uma representação determina em que medida permite expressar uma abstracção

representações é referido também por outros autores ligados à ciência em geral. Por exemplo, Kozma (2003) elaborou uma revisão de literatura acerca de vários estudos que examinam o papel das múltiplas representações externas na compreensão das ciências. Como é apontado pelo autor, existem diferenças significativas no modo como peritos e principiantes fazem uso de vários tipos de representações externas. Os cientistas experientes utilizam diferentes representações de acordo com os seus propósitos, conseguem coordenar as características de diferentes representações, individualmente ou em conjunto, para raciocinar acerca da sua pesquisa e negociar significados. De um modo geral, os peritos conseguem gerar representações espontaneamente, mover-se através de múltiplas representações e coordená-las com vista a argumentar e expressar a sua compreensão acerca de um certo fenómeno. Os principiantes, pelo contrário, têm dificuldade em mover-se através de múltiplas representações e em efetuar conexões que lhes permitam criar uma compreensão que vá para além das características superficiais da representação dada. O uso da tecnologia pode atenuar estas dificuldades dos principiantes, o que é ilustrado pelos resultados que demonstram o potencial que a tecnologia tem no apoio ao raciocínio dos principiantes e no reforço do seu discurso.

Apesar do potencial da tecnologia, Seufert, Jänen e Brünken (2007) salientam que a integração mental da informação proveniente das várias representações é um processo exigente: “Nos ambientes de aprendizagem com múltiplas representações, que fornecem informação complementar, suplementar ou mesmo redundante, os alunos têm de integrar mentalmente as diferentes fontes de informação com vista a compreender o significado global de todo o conteúdo” (p. 1056).

3.3.2. O papel das múltiplas representações na aprendizagem do conceito de função

Em certos casos as representações estão intimamente relacionadas com um conceito matemático. É o que acontece com o conceito de função, de tal modo que é difícil que este seja compreendido e adquirido sem o uso de várias representações, pois cada uma delas fornece apenas informação sobre alguns dos seus aspetos particulares (Gagatsis & Elia, 2005).

Uma função pode ser representada de diferentes formas. A frase "regra de três" foi usada por Hughes-Hallett *et al.* (1992), citados em Dick e Edwards (2008), para denotar a noção de múltiplas representações de uma função – analítica (fórmula simbólica), gráfica e numérica. Mais tarde, o modelo foi expandido para incluir uma quarta representação – verbal, "regra de quatro". Dick e Edwards (2008) propõem uma nova ampliação, sugerindo que as situações físicas possam ser, também, pensadas como representações, uma vez que, o avanço da tecnologia permite que uma situação física seja monitorizada de maneira que possibilita a análise direta da sua ligação a outras representações. Como é referido em Pierce *et al.* (2011), cada representação tem vantagens e desvantagens, por exemplo a representação verbal é usada para introduzir um problema na linguagem natural, no entanto essa linguagem pode ser ambígua podendo conduzir a problemas de comunicação, ou trazer dificuldades em termos da conversão para outro sistema de representação. A representação numérica começa por ser a mais familiar e é uma ponte para outras representações, contudo apesar de poder contribuir para a compreensão de determinado problema, não proporciona a generalização e pode esconder aspetos importantes. A representação gráfica é intuitiva e apelativa para quem prefere abordar os problemas de forma visual, ainda assim pode não permitir a precisão necessária para resolver o problema. A representação simbólica, sendo concisa e geral, pode trazer dificuldades aos alunos pelo uso excessivo de símbolos (Pierce *et al.*, 2011). Além disso, como salientam Gray e Tall (1994), o simbolismo matemático envolve uma dualidade entre processo e objeto, sendo essencial o desenvolvimento de uma flexibilidade em termos da sua interpretação, como um processo para desempenhar determinada tarefa, ou um conceito que pode ser mentalmente manipulado.

Elia *et al.* (2007) exploraram o modo como os alunos concebiam e usavam o conceito de função para reconhecer funções representadas de diferentes formas ou resolver problemas envolvendo funções. Os autores esperavam que os alunos que tivessem construído uma definição apropriada de função, conseguissem manipular diferentes representações do conceito e ser bem-sucedidos na resolução de problemas. No entanto, os resultados obtidos pelo grupo de alunos que deu uma definição correta para o conceito de função (35%) foram similares aos do grupo de alunos que deu uma definição inapropriada, quer em tarefas de reconhecimento de funções, quer na resolução de problemas. Tal facto parece indicar que o *conceito definição* de função nestes alunos tem pouca relação com outros aspetos do *conceito imagem*. Os resultados mostraram boas taxas de sucesso em tarefas envolvendo o reconhecimento de funções representadas graficamente, mas baixas taxas de sucesso em problemas que requeriam: (i) conversão de representações verbais em representações simbólicas; (ii) reconhecimento de funções entre relações representadas algebricamente; e (iii) conversão da representação algébrica na gráfica. É de salientar, ainda, a baixa taxa de sucesso, em ambos os grupos, na resolução de problemas. Este estudo mostrou que os alunos estão mais familiarizados em aplicar a definição no modo de representação gráfica do que noutros modos de representação, o que pode ser interpretado como uma consequência das abordagens didáticas desenvolvidas pelos professores do ensino secundário. Os autores sugerem, também, que a inconsistência no comportamento dos alunos ao trabalharem com tarefas de diferentes características cognitivas referentes ao mesmo conceito pode ser vista como uma indicação de que estes consideram as várias representações de uma função como objetos matemáticos distintos e autónomos, relevando um conhecimento compartimentado e *monoregistral*. Este fenómeno de compartimentação é válido para toda a amostra e não aparece apenas nos diferentes modos de representação, envolve também o raciocínio matemático e o uso do conceito de função.

Gagatsis *et al.* (2003), referidos em Gagatsis e Elia (2005), já haviam estudado o fenómeno de compartimentação dos diferentes modos de representação de funções, concluindo, por exemplo, que os alunos que conseguiam converter a representação gráfica de uma relação algébrica na representação verbal não estavam automaticamente em posição de converter, com sucesso, a mesma relação algébrica da sua representação verbal na gráfica e vice-versa. Para os autores este tipo de comportamento indica que os alunos não construíram o significado global do conceito de função e não conseguiram captar todas as possibilidades da sua aplicação. Para Gagatsis e Elia (2005), a compartimentação é "talvez o único fenómeno geral relacionado com o campo das representações, uma vez que, aparece nos processos de aprendizagem de diferentes conceitos matemáticos, em diferentes formas de representação e no comportamento de alunos de diferentes idades" (p. 110). Duval (2006), no entanto, como já foi referido anteriormente, considera que o problema na conversão de representações, deve-se às características da conversão (sentido e congruência / não congruência) e não propriamente à compreensão conceptual.

Elia *et al.* (2007) consideram que algumas dificuldades dos alunos na construção de conceitos como o de função, podem estar relacionadas com a restrição das representações usadas no ensino. Também Ruthven (2002) salienta que o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos alunos é uma consequência da adaptação das normas culturais da sala de aula de matemática, sob a forma das situações que encontram, dos recursos disponíveis e das expectativas que lhes são transmitidas. De acordo com o autor, quando as tarefas são fortemente compartimentadas e o discurso é muito restritivo, os correspondentes esquemas cognitivos desenvolvidos pelos alunos são também fragmentados e inflexíveis.

A experiência do professor pode ser um importante fator a ter em conta no fenómeno de compartimentação. O estudo de Chinnappan e Thomas (2003) aponta para a hipótese de que os professores experientes acumularam conhecimento sobre funções que é dominado por aspetos conceptuais em vez de processuais. Em contraste, os professores estagiários colocam mais ênfase nos aspetos processuais do conceito de função e tendem a "ancorar" o conceito numa única representação: a gráfica ou a simbólica. Um aspeto que sobressai deste estudo diz respeito à preferência dos professores estagiários pela representação visual das funções sem que, no entanto, exista a preocupação em efetuar ligação com a representação simbólica, o que não contribui para o desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca das funções.

A flexibilidade na passagem da representação de uma função para outra das suas representações está relacionada com uma série de fatores, como mostra o estudo realizado por Even (1998). A autora identificou, como fatores críticos, o tipo de abordagem às funções, o contexto da apresentação e a qualidade do conhecimento das noções de base. Relativamente ao tipo de abordagem, o estudo indica que os sujeitos que usam com facilidade uma análise global, em termos de mudanças na representação gráfica, possuem uma melhor e maior compreensão das relações entre as representações gráfica e simbólica do que os que preferem verificar apenas algumas características específicas locais. No entanto, existem situações em que a utilização da abordagem pontual permite resolver um problema ou contribuir para a sua solução. Além disso, como o estudo mostra, o facto de se usar uma abordagem global para as funções não significa que se compreenda o significado dos gráficos. A autora considera que, na resolução de problemas, a combinação das duas abordagens pode trazer vantagens. Esta opinião é partilhada por outros autores, por exemplo, Graham *et al.* (2009) referem que "enquanto uma abordagem pontual pode ser muito útil, ambas as perspetivas global e pontual são necessárias para os gráficos, dado que por vezes uma é mais poderosa do que a outra" (p. 685). A pesquisa de Even (1998) mostrou que o contexto da apresentação do problema e as noções de base são, também, questões críticas, que podem criar obstáculos na resolução de problemas. Por exemplo, o esboço do gráfico de $y = \text{sen}(x+1)$ a partir da representação gráfica de $y = \text{sen}\, x$, não é um problema específico da trigonometria, todavia, alguns dos participantes que tinham tido dificuldades com as funções trigonométricas não consideraram o problema na sua forma geral. Não sendo um problema específico da trigonometria, era necessário conhecimento básico sobre o significado do número 1 relativamente ao domínio das funções trigonométricas, o que também levantou dificuldades aos alunos.

Hitt (1998) aponta alguns erros cometidos por professores de matemática do ensino secundário em tarefas relacionadas com o conceito de função. Aproximadamente um terço dos professores que participaram no estudo cometeu o erro de pensar que as secções cónicas eram funções, levando o investigador a concluir que a existência de uma fórmula associada à representação gráfica condicionou a aplicação da definição de função, a qual foi usada noutras situações sem problema. O estudo mostrou também que o *conceito imagem evocado* dos professores participantes englobou, preferencialmente, funções contínuas dadas por uma única expressão algébrica, o que não lhes permitiu, por exemplo, construir funções distintas obedecendo a certas condições. Este estudo mostrou, ainda, que em situações não usuais, envolvendo a interpretação de gráficos num contexto físico ou passagem de um contexto físico para a forma gráfica, alguns professores cometeram erros devido a uma *translação icónica*, ou seja, dedução intuitiva a partir da imagem observada. Outra fonte de erro diz respeito à falta de análise relativa à variável independente, uma vez que, a interpretação da variável independente, nas questões apresentadas, pressupunha uma articulação com a representação simbólica, bem como uma interpretação da representação num contexto real.

Hoffkamp (2009) considera que a interpretação de um gráfico como uma imagem fotográfica da situação (o que Hitt chama de translação icónica) acontece devido à incapacidade de se interpretar dinamicamente uma relação funcional. Esta hipótese levou o autor a estudar a hipótese de a "visualização" da relação funcional em diferentes representações, dando oportunidade aos alunos de a experienciarem utilizando *software* interativo de geometria, contribuir para o reforço do aspeto dinâmico do pensamento funcional. O autor concluiu que as *applets* forçaram os alunos a concentrar-se na visão dinâmica da dependência funcional, sendo fácil fomentar a discussão acerca do tópico pois os alunos estavam muito envolvidos nas tarefas. Contudo, o autor refere que as verbalizações dos alunos eram maioritariamente superficiais, sugerindo que o trabalho com as *applets* serviria essencialmente de base para continuar a trabalhar o tema. A análise dos resultados obtidos no teste escrito mostrou que a interpretação do gráfico como uma imagem fotográfica praticamente desapareceu, continuando, no entanto, presente em duas ou três soluções. A maioria dos alunos criou um conceito mental da dinâmica da dependência funcional apropriado para certas classes de situações, todavia, foram evidenciadas dificuldades na adaptação do conceito a outras situações envolvendo figuras geométricas que, provavelmente, não teriam sido trabalhadas na sala de aula. Como um dos alunos participantes no estudo referiu: "[…] é mais fácil compreender algo olhando" (p. 235), porém, é essencial que exista reflexão acerca do que observa de modo a que o conhecimento adquirido possa ser estendido a novas situações. De facto, como menciona Ponte (2005), existem dois fatores essenciais na aprendizagem dos alunos: as atividades que realizam e a reflexão que fazem sobre elas.

Falcade, Laborde e Mariotti (2007) também investigaram a possibilidade dos ambientes de geometria dinâmica contribuírem para uma interpretação dinâmica do gráfico de uma função. Nesse sentido, elaboraram uma experiência de ensino com o objetivo de desenvolver a noção de função e de trajetória, com recurso ao CABRI. As autoras concluíram que a ferramenta *Trace* contribuiu para o surgimento da dualidade de significado de trajetória, globalmente como um objeto e, pontualmente como uma sequência de pares ordenados. A ferramenta *Dragging* desenvolveu os significados das noções de variável independente e de variável dependente, assim como a ideia de função em termos de covariação. A discussão coletiva, orientada pela professora, no sentido de definir igualdade de funções, mostra como a ferramenta *Trace* pode ter atuado como um potencial mediador semiótico, reconhecendo-se na contribuição de uma aluna a ideia de trajetória, ao referir-se a uma correspondência pontual. Para os restantes alunos foi, porém, difícil aceitar uma definição que ignorava o processo de construção e que, portanto, era completamente independente da experiência física em que havia sido originada. As atividades desenvolvidas pelos alunos com o CABRI poderão ter reforçado uma tendência natural para o processual, pelo que, as autoras salientam que futuras sequências de ensino devem planear situações em que funções iguais difiram no seu processo de construção.

A interpretação dinâmica do gráfico de uma função requer a introdução do tempo e a consideração da covariância como uma relação entre duas variações implicitamente dependentes do tempo. É necessário, porém, dar alguma atenção a esta questão pois nem todos os gráficos podem ser interpretados desse modo. Janvier (1998) introduz a noção de "crónica" como uma descrição de uma mudança temporal e, considera que tal funciona como um obstáculo epistemológico na aprendizagem do conceito de função. O autor dá o exemplo de uma questão onde os alunos deveriam esboçar um gráfico que relacionasse o tempo de voo, entre Montréal e Paris, em função da velocidade do avião. Vários alunos universitários (15%) mudaram a relação que era pedida e responderam a outra questão, elaborando um esboço gráfico que representa a velocidade de um avião em função do tempo de duração do voo: "quando um obstáculo epistemológico interfere, o esquema de solução segue outra linha de pensamento correta, mas para uma questão diferente inventada pelo indivíduo" (p. 89). Os alunos que responderam com sucesso podem ter pensado com base na equação que relaciona a velocidade, o espaço e o tempo. A expressão algébrica pode funcionar como um modo de, nas palavras do autor, "resistir à atração" da interpretação crónica.

A interpretação do simbolismo matemático, particularmente do usado nas funções, é também um fator crítico na resolução de problemas, levantando várias dificuldades aos alunos. Sajka (2003) analisa um diálogo com uma aluna de 16 anos e capacidade média a matemática, acerca da seguinte tarefa: "dar exemplo de uma função *f* tal que, para quaisquer números reais *x* e *y* pertencentes ao domínio de *f*, se verifique a equação $f(x+y)=f(x)+f(y)$", onde são evidentes essas dificuldades. A aluna não conseguiu compreender o que era pedido na tarefa. De início começou por tentar atribuir valores a *x* e a *y*, porém, não conseguiu interpretar a notação $f(3)$, por exemplo. De seguida, concluiu que deveria encontrar uma fórmula mas deu exemplo de duas funções distintas e tentou tratar a equação funcional como uma "fórmula de uma função" (p. 233). Para a aluna $f(x)$, $f(y)$ e $f(x+y)$ eram "fórmulas de funções", que tanto poderiam representar a mesma função como funções distintas. Após um longo diálogo com a investigadora acerca do simbolismo, a aluna acabou por descobrir a relação entre a notação funcional e o argumento da função e só então conseguiu compreender o conteúdo da tarefa, acabando por chegar à solução geral (com exceção do caso da função identicamente nula). A investigadora considera que as dificuldades da aluna na interpretação da notação funcional se devem a três fatores que não são mutuamente exclusivos, mas que, pelo contrário, se influenciam mutuamente: (1) a ambiguidade intrínseca da notação matemática; (2) os contextos restritos em que alguns símbolos ocorrem no ensino e a escolha limitada das tarefas escolares; e (3) a interpretação idiossincrática da aluna em relação às tarefas escolares. É, pois, importante que o ensino ofereça oportunidades para os alunos desenvolverem o sentido dos símbolos (Arcavi, 2006), quer através da diversidade e do potencial das tarefas a propor, quer através da discussão dos seus significados.

Como estas investigações mostram, o sucesso na resolução de problemas envolvendo funções depende, muitas vezes, da conjugação de várias das suas representações. O fenómeno da compartimentação pode estar diretamente associado ao tipo de ensino a que os alunos são sujeitos, pelo que, uma das prioridades do ensino deveria ser o desenvolvimento da capacidade de se trabalhar com diferentes registos. Nesse sentido, as atividades em que os alunos se envolvem e a reflexão que fazem sobre essas atividades podem ser determinantes. Também as ferramentas que utilizam são um importante fator a ter em conta, já que elas próprias influenciam a natureza das atividades em que os alunos participam.

Capítulo 4

Calculadora gráfica, funções e múltiplas representações

4.1. Potencialidades e constrangimentos da calculadora gráfica no âmbito do trabalho com as funções

Como foi analisado no capítulo 2 quando um artefacto é integrado na atividade humana, o indivíduo desenvolve esquemas (englobando uma dimensão individual e social) que lhe permitem utilizá-lo numa classe de situações particulares, ou efetua a adaptação de esquemas já desenvolvidos de modo a utilizá-lo numa nova classe de situações. Para se compreender o processo através do qual o artefacto se torna num instrumento é necessário conhecer as suas potencialidades e constrangimentos. Nesse sentido, nesta secção é feita uma pequena abordagem acerca de algumas potencialidades e alguns constrangimentos da calculadora gráfica no âmbito do trabalho com as funções, tendo em conta a sua utilização no ensino secundário. Os exemplos e situações aqui descritas dizem respeito à calculadora TI-84 *Plus* (ou TI-83 *Plus*) mas, de um modo geral, podem ser facilmente adaptados para outra calculadora gráfica com características semelhantes, como por exemplo, a CASIO FX 9860 G (ou CASIO CFX 9850 GB) que, juntamente com a TI-84 *Plus*, são das calculadoras mais utilizadas no ensino secundário, apesar de atualmente já começarem a aparecer algumas da geração TI *nspire*[16].

[16] Na altura da recolha de dados nenhum dos alunos da turma possuía este modelo.

4.1.1. Precisão numérica

A calculadora gráfica pode ser um importante instrumento para os alunos intuírem resultados, no entanto, é necessário ter alguma atenção, uma vez que esta trabalha com um número de dígitos finito e ao efetuar cálculos faz aproximações que podem influenciar fortemente os resultados. Suponhamos que se pretendia explorar o limite da sucessão $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, recorrendo à calculadora gráfica. Seria de esperar que quanto maior fosse o valor de *n*, melhor a aproximação respeitante ao limite da sucessão, contudo, a partir de determinada altura, o valor devolvido pela calculadora poderá sugerir um outro valor para o limite da sucessão. Isto acontece porque a calculadora tem precisão finita, o conjunto de números com que trabalha não é o conjunto dos números reais, nem tão-pouco o dos racionais (Consciência, 2003).

Sempre que o cálculo ultrapasse o número de dígitos máximo permitido para a visualização, o resultado é arredondado. Embora a calculadora trabalhe internamente com mais dígitos do que o permitido para a visualização, este número não deixa de ser finito, e assim também o resultado armazenado na memória passa a ser arredondado, quando excede esse número de dígitos. Assim, por exemplo, ao calcular $1+10^{-14}$ na TI-84 *Plus*, o resultado visualizado é 1 e o armazenado na memória também é 1, pelo que a máquina devolve o valor de 1 para $\left(1+10^{-14}\right)^{10^{14}}$ (Consciência, 2003). Um aluno que não esteja familiarizado com o tipo de sucessão poderá ser induzido em erro, já que a partir de determinada ordem os termos da sucessão devolvidos pela calculadora são sempre iguais a um.

A precisão numérica influencia também, como é evidente, a representação gráfica de uma função, já que para representar graficamente uma função a calculadora efetua cálculos numéricos. É importante que os alunos tenham em consideração que a precisão é finita, e que, muitas vezes, o erro resultante do arredondamento, pode conduzir a resultados absurdos, sem que qualquer mensagem de erro seja devolvida pela calculadora.

McCulloch, Keene e Kenney (2013) realizaram um estudo em que uma das questões do inquérito dizia respeito à reconciliação entre uma solução produzida recorrendo à calculadora gráfica e uma solução diferente produzida sem calculadora gráfica. Dos 111 alunos, 54% escreveram que acabariam por aceitar a solução obtida com a calculadora gráfica; 35% escolheria a solução obtida manualmente e 11% não faria uma escolha definitiva entre as duas. Uma das categorias em que se inseria as razões apresentadas pelos alunos que responderam escolher a solução manual, sem calculadora, dizia respeito ao reconhecimento de potencialidades/limitações da calculadora gráfica, contudo, as razões evocadas focavam essencialmente a possibilidade de ocorrer um engano ao digitarem na calculadora: "os alunos culpam a calculadora dos erros, quando de facto os erros podem ser um resultado dos seus próprios lapsos" (p. 207). Não foram apresentadas razões que digam, por exemplo, respeito à precisão numérica ou gráfica. O único exemplo de resposta apresentado que poderá dar alguma ideia de limitação da calculadora diz o seguinte: "por vezes a calculadora gráfica dá respostas estranhas utilizando as funções trigonométricas ou não encontra a resposta correta" (p. 207). Parece que estes alunos estavam pouco conscientes das limitações da máquina.

4.1.2. Modo de representação do gráfico de uma função

Quando se pretende visualizar a representação gráfica de uma função real de variável real num computador ou numa calculadora gráfica um dos grandes constrangimentos prende-se com a resolução do ecrã, já que, passamos de uma "aritmética contínua" para uma "aritmética discreta". No que toca ao computador isso torna-se menos evidente devido à dimensão do ecrã, no entanto, numa calculadora gráfica o efeito de discretização faz-se sentir com maior intensidade.

O visor de uma calculadora gráfica é uma espécie de "tabuleiro de xadrez" formado por minúsculos quadradinhos. Cada quadradinho é denominado pi*xel*[17] e pode estar em dois estados: aceso ou apagado. Quantos mais *pixels* tiver o visor melhor será a sua resolução. O visor da TI-84 *Plus* é formado por 95 *pixels* na horizontal e 63 na vertical, ou seja, o visor é constituído por um total de 5985 *pixels*.

A visualização da representação gráfica de uma função envolve a introdução da expressão analítica no editor de funções e a definição da janela de visualização. A TI-84 *Plus* tem algumas janelas de visualização pré-definidas, nomeadamente, as

[17]Contração das palavras *Picture Element*, ou seja, elemento de imagem.

correspondentes aos *zooms ZStandard*, *ZDecimal* e *ZTrig*. A máquina faz então a conversão do retângulo de $\mathbb{R}^2$ $\left([x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]\right)$, definido na janela de visualização, para o seu sistema de *pixels* do seguinte modo:

1. Calcula a distância entre os centros de dois *pixels* adjacentes através das fórmulas:

$$\Delta_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{94} \quad , \qquad \Delta_y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{62};$$

2. A cada *pixel* p_{ij}, faz corresponder os valores:

$$x_i \in [x_{\min}, x_{\max}] \text{ tal que } x_i = x_{\min} + i\,\Delta_x, \text{ com } i = 0,1,\ldots,94$$

$$y_j \in [y_{\min}, y_{\max}] \text{ tal que } y_j = x_{\min} + j\,\Delta_y \text{ com } j = 0,1,\ldots,62$$

Em seguida, para cada valor x_i, $i = 0,1,\ldots,94$, calcula através da expressão analítica da função o correspondente valor, digamos, y_i. Os pontos (x_i, y_i) são então "marcados" no visor, ou seja, são acesos os *pixels* correspondentes. Caso o valor y_i calculado não corresponda a nenhum dos y_j atribuídos aos *pixels*, a calculadora 'escolhe' a melhor aproximação, o que faz com que, por vezes, a representação gráfica no visor mostre segmentos de reta horizontais, sem que a função seja constante, como acontece na Figura 24 (pode ainda observar-se que a representação apresentada não intersecta o eixo *Ox*, o que se deve ao facto de nenhum dos valores x_i atribuídos aos *pixels* corresponderem aos zeros da função na janela considerada).

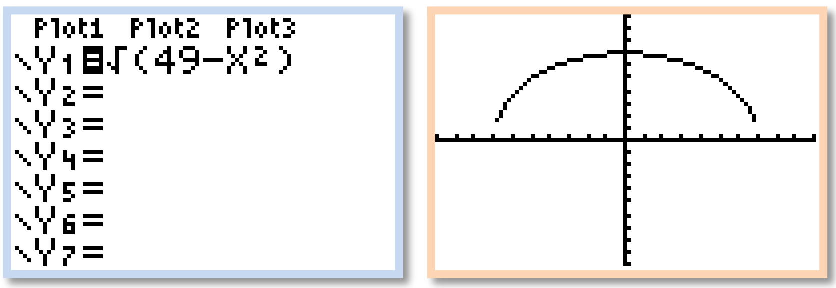


Figura 24 – Representação gráfica da função indicada usando *zoom ZStandard*.

Para além disso, se estiver a trabalhar em modo *connected*, a calculadora acende mais *pixels*, chamados *pixels* de ligação, de modo que a representação gráfica se assemelhe a uma curva (o que faz com que algumas zonas da representação gráfica sejam segmentos de reta verticais). Em modo *dot* apenas os pontos “calculados” são acesos (ver Figura 25).

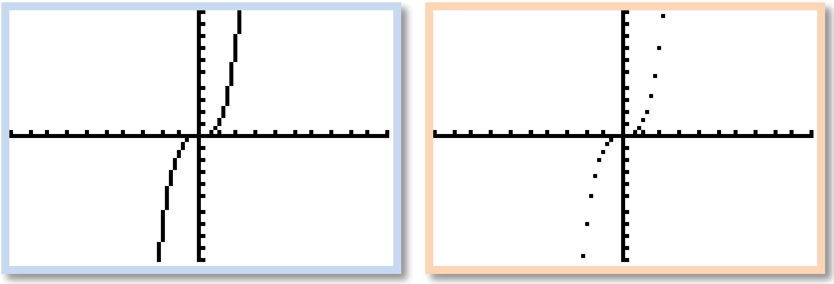


Figura 25 – Representação gráfica da função $y = x^3$ usando *zoom ZStandard* em modo *connected* e modo *dot*.

A representação gráfica de uma função depende assim, sobretudo, da janela de visualização que é escolhida. Além disso, atendendo ao modo como é construída a representação gráfica, não se fica a conhecer o comportamento da função entre os valores atribuídos a dois *pixels* consecutivos. Como exemplo, a Figura 26 mostra a representação gráfica da função $y = \operatorname{sen} x$ como sendo uma reta horizontal, o que acontece pois os valores $x_{\min}, x_{\max}$ foram escolhidos de tal modo que $\Delta_x \simeq 2\pi$ e $\operatorname{sen}\left(x_{\min}\right) = 1$. Assim, uma das principais vantagens da calculadora gráfica – fornecer em pouco tempo uma ideia global do comportamento de uma função – nem sempre se consegue (Consciência, 2003).

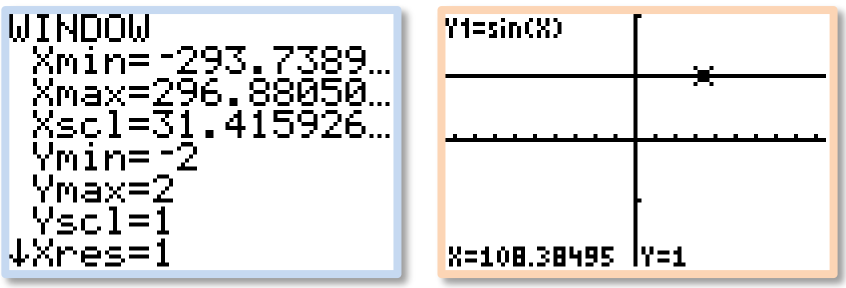


Figura 26 – Representação gráfica da função $y = \operatorname{sen} x$ na janela de visualização indicada.

A representação gráfica obtida na TI-84 *Plus* pode ser alterada, mantendo os valores $x_{\min}$, $x_{\max}$ e $y_{\min}$, $y_{\max}$, mas mudando o valor de x_{res}. A calculadora aceita para x_{res} valores inteiros entre 1 e 8 inclusive. Quando x_{res} é igual a 1 são calculadas as "imagens" de todos os valores x_i atribuídos ao visor, obtendo-se nesse caso a precisão máxima. No caso de $x_{res} = 2$ as "imagens" são calculadas de dois em dois *pixels*, e assim sucessivamente, até $x_{res} = 8$, caso em que a visualização obtida é baseada no cálculo de 12 "pontos" do gráfico da função (no máximo, uma vez que a visualização depende também dos valores atribuídos a $y_{\min}$ e $y_{\max}$). A Figura 27 mostra a representação gráfica da função *f*, definida em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, por $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-2}{x-2}$, para os valores de $x_{res} = 1;\ 3;\ 8$, respetivamente, em modo *connected* e com $x_{\min} = -1.2$; $x_{\max} = 8.2$; $y_{\min} = -3.1$ e $y_{\max} = 3.1$. A função não está definida para $x = 2$ o que aparece visível na primeira representação, uma vez que, para $i = 32$ o valor atribuído a x_i é exatamente 2 e, nesse caso, não é possível calcular a imagem, ficando o *pixel* correspondente apagado. Na representação seguinte já não se dá conta desse facto pois os pontos são calculados de 3 em 3 *pixels* e, portanto, $i = 32$ não entra no cálculo. Na última representação, os pontos são calculados de 8 em 8 *pixels* voltando o valor $x_{32} = 2$ a entrar no cálculo, o que faz com que a representação apresente aquela interrupção.

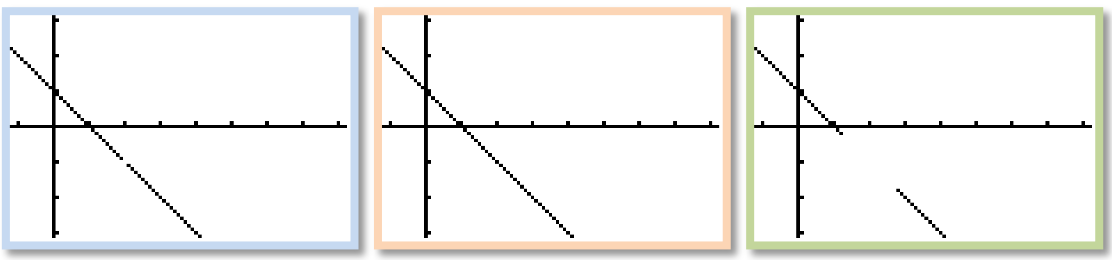


Figura 27 – Representação obtida para valores de $x_{res} = 1;\ 3;\ 8$, respetivamente.

Relativamente à interpretação das representações gráficas obtidas pela calculadora existe, ainda, um ponto a considerar: o deslocamento do cursor. O cursor livre desloca-se pelos vários *pixels* que constituem o visor, sendo mostrados os valores

x_i e y_j atribuídos pela calculadora na janela considerada. A função *Trace* limita o deslocamento do cursor, fazendo-o percorrer "pontos do gráfico da função"[18], sendo simultaneamente exibidos os valores x_i e y_i. Este aspeto dinâmico permite reforçar a noção de variação entre as variáveis.

O utilizador deve ter uma ideia geral do modo como é efetuada a representação gráfica de uma função de modo a conseguir interpretar corretamente o que vê no visor. Além disso, muitas vezes, é necessário conjugar outras fontes de informação, quer ainda recorrendo à calculadora, procurando outras janelas de visualização ou usando o modo *Table*, quer recorrendo a outros conhecimentos, nomeadamente, a compreensão algébrica.

São vários os exemplos de interpretações incorretas relativamente à representação gráfica visualizada no ecrã. Berry e Graham (2005) referem que 38% dos 12 alunos do primeiro ano da universidade, que participaram num projeto de pesquisa relativo ao uso da calculadora gráfica, representaram uma função cúbica, fazendo um esboço de uma parábola. Os autores consideram que os alunos devem conhecer a diferença entre o gráfico de uma função cúbica e quadrática, no entanto, salientam que a ideia que sobressai é que o poder da tecnologia se apodera dos alunos, que "ficam felizes em copiar simplesmente o que veem no ecrã da calculadora gráfica" (p. 145).

No estudo de Cavanagh e Mitchelmore (2003) esta dificuldade ainda é mais evidente, já que foi conduzido com professores de matemática. O objetivo do estudo era analisar como é que estes lidavam com as limitações da calculadora gráfica, em particular, em termos da análise das representações gráficas produzidas. Os resultados mostraram que os professores não possuíam uma compreensão satisfatória acerca do processo utilizado pela calculadora gráfica para atribuir os valores aos *pixels* e criar a representação gráfica. Foram identificados alguns dos erros que os autores já haviam observado num estudo prévio com alunos, nomeadamente, a introdução incorreta da expressão analítica da função na calculadora (muitas das vezes associada à falta de parêntesis) e o não reconhecimento de representações gráficas incompletas e de vistas parciais da representação gráfica. Por exemplo, no caso da função $y = 1.5\sqrt{2 - x^2}$, os professores participantes no estudo notaram que a semi-elipse não tocava o eixo *Ox*

[18]Na realidade, a maioria das vezes, corresponderão a aproximações.

como deveria[19], mas não conseguiram estabelecer conexão com os valores atribuídos aos *pixels*, considerando que o problema se deveria ao facto de os zeros serem números irracionais.

Perante a questão: "*Quantas soluções tem a equação* $2^x = x^{10}$ *e quais são?*", todos os professores consideraram apenas as duas soluções visíveis no visor da calculadora na janela inicial (representação semelhante à da Figura 28), não fazendo qualquer conexão com a representação simbólica das funções envolvidas.

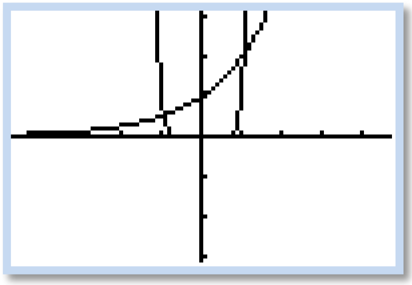


Figura 28 – Representação gráfica das funções $y = 2^x$ e $y = x^{10}$ obtida com *ZDecimal*.

Esta é uma questão que Trouche e Drijvers (2010) consideram com um enorme potencial para explorar e aprender matemática, já que, por um lado, permite tirar vantagens da tecnologia, e, por outro lado, requer o pensamento matemático acerca do que está por trás de uma imagem ou resultado fornecido pela máquina. Para os autores é raro encontrar nos manuais escolares exemplos de tarefas matemáticas que se enquadrem convenientemente nos novos ambientes tecnológicos. Para que os professores consigam desenhar tarefas matemáticas significativas é necessário que dominem tanto as funcionalidades do artefacto, como a base didática e científica do tópico matemático a ensinar (Trouche & Drijvers, 2010).

Voltando ao estudo de Cavanagh e Mitchelmore (2003), também na questão em que era pedido o esboço do gráfico da função $y = \text{sen}(60x)$ todos os professores começaram por copiar a representação obtida na calculadora (semelhante à da Figura 29), até que um deles reparou que a representação induzia em erro, pois o declive da

[19] Na representação obtida com a calculadora Casio FX 7400 G, considerando a janela inicial.

reta tangente ao gráfico na origem teria que ser positivo e o período da função teria que ser igual a $\frac{\pi}{30}$ e não a 2,2 como aparentava.

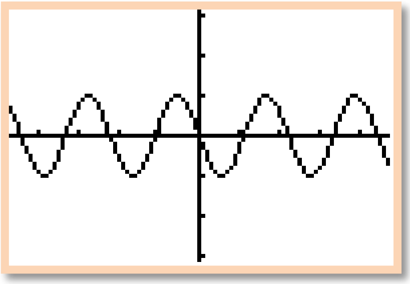


Figura 29 – Representação gráfica da função $y = \text{sen}(60x)$ obtida com *ZDecimal*.

A investigação de Cavanagh e Mitchelmore (2003) veio confirmar que o processo de génese instrumental não é trivial, mesmo para os professores que possuem conhecimentos que lhes permitem conjugar várias ferramentas.

Tal como referem Guin e Trouche (1999) a conjugação das várias fontes de informação nem sempre é fácil, particularmente, para os alunos mais fracos. Por este motivo, estes autores reconhecem a importância de o professor acompanhar os alunos no processo da génese instrumental, organizando um ambiente de aprendizagem que promova tarefas matemáticas interessantes, onde a calculadora gráfica possa ser vista como uma ferramenta "heurística, pedagógica e cognitiva" (p. 199). Também Burrill (2005) considera que os professores devem ter tempo para ensinar aos seus alunos métodos eficazes de uso da calculadora gráfica, assim como das suas limitações, preparando tarefas apropriadas nesse sentido. Como refere Ponte (2006), as representações gráficas produzidas pela tecnologia não são transparentes e compreendê-las e usá-las requer uma aprendizagem não trivial. Assim, é essencial que os alunos tenham oportunidades de refletirem sobre as limitações da calculadora gráfica e tentarem explicá-las, o que, por sua vez, pode conduzir a uma melhor compreensão matemática. Para Cavanagh e Mitchelmore (2003) se os professores estiverem conscientes acerca do modo de funcionamento e das limitações da calculadora gráfica, em vez de evitarem esses constrangimentos, podem aproveitá-los de forma pedagógica.

4.1.3. Exploração dos vários *zooms*

A representação gráfica está intimamente ligada à janela de visualização, o que pode conduzir a representações que não incluam as características importantes do gráfico da função. Nesse caso, uma maneira de obter uma representação razoável do gráfico é efetuar a manipulação direta dos valores $x_{\min}, x_{\max}$ e $y_{\min}, y_{\max}$ em *Window*. Existem, no entanto, outras opções referentes aos vários *zooms* disponíveis que, em certas situações, podem ser bastante eficazes. A TI-84 *Plus* tem algumas janelas pré-definidas correspondentes aos *zooms ZStandard*, *ZDecimal* e *ZTrig*, indicadas na Figura 30. As mais recentes, vêm ainda com outros *zooms* predefinidos, como *ZQuadrant1* e *ZFrac1/2*, *Zfrac1/3*, etc., correspondentes, respetivamente, a valores do retângulo de visualização no primeiro quadrante, ou a valores em que Δ_x corresponde às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$ (as mais antigas podem também ser atualizadas, com a atualização do sistema operativo). Para além destes, existem outros *zooms* disponíveis: *ZBox*, *Zoom In*, *Zoom Out*, *ZSquare*, *ZInteger*, *ZoomStat* e *ZoomFit*, em que a janela é atualizada de acordo com algumas indicações do utilizador.

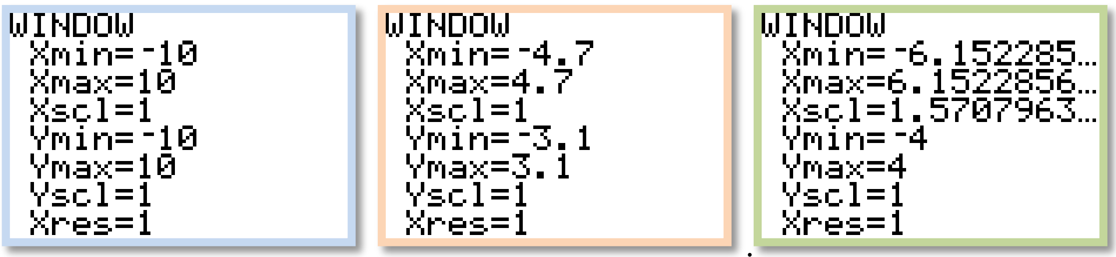


Figura 30 – Janelas correspondentes aos *zooms ZStandard, ZDecimal* e *ZTrig*.

A opção *ZBox* permite definir uma “caixa”, na zona da representação gráfica que se pretende ampliar, de modo que os valores atribuídos aos *pixels* dos vértices correspondam aos da nova janela de visualização.

As opções de *Zoom In* e *Zoom Out* funcionam de modo similar, definindo uma nova janela através de fatores *XFact* e *YFact* previamente definidos, de modo que o seu centro corresponda à posição onde o utilizador coloca o cursor. Enquanto *Zoom In* amplia a zona da representação gráfica em volta do cursor, através da divisão dos valores iniciais Δ_x e Δ_y por *XFact* e *YFact*, *Zoom Out* permite uma abordagem mais global, através da multiplicação dos valores Δ_x e Δ_y iniciais por *XFact* e *YFact*. Como exemplo, a Figura 31 mostra a representação gráfica da função $y = -0.1x^2 + 12$ obtida com *ZStandard*, *Zoom In* e *Zoom Out*, respetivamente, sendo as duas últimas obtidas a partir da representação com *ZStandard*, no ponto onde o cursor se encontra, considerando *XFact* e *YFact* iguais a 4.

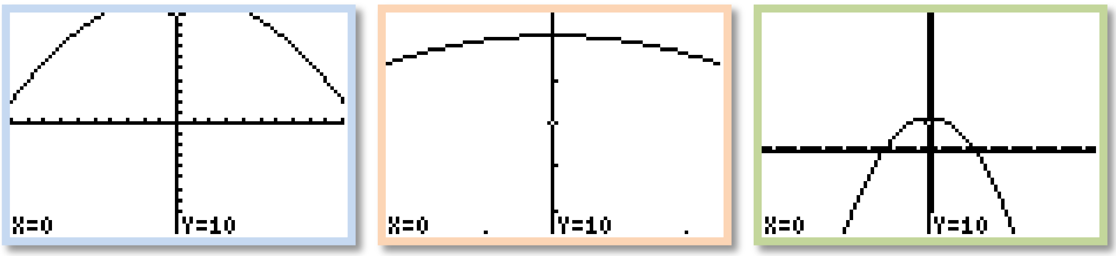


Figura 31 – Representação gráfica da função $y = -0.1x^2 + 12$ obtida com *ZSandard*, *Zoom In*, e *Zoom Out*, respetivamente.

Drijvers e Doorman (1996) consideram que as opções *Zoom In* e *Zoom Out* constituem um dos aspetos dinâmicos da calculadora gráfica pois permitem que se alterne continuamente entre uma abordagem local e global.

A opção *ZSquare* ajusta os valores $x_{\min}$, $x_{\max}$ modo que a escala seja igual nos dois eixos, ou seja, $\Delta_x = \Delta_y$. Com esta opção a representação gráfica da função considerada na Figura 24, já se assemelhará a uma semicircunferência (ver Figura 32).

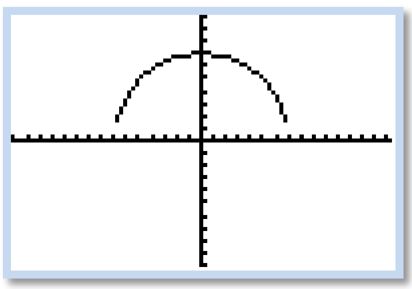


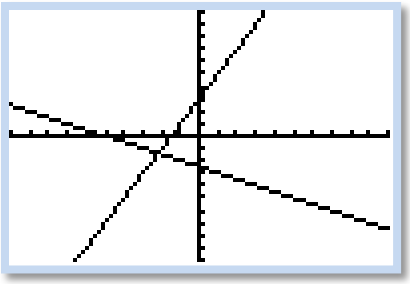
Figura 32 - Representação da função $y = \sqrt{49 - x^2}$ obtida com *ZSquare* a partir de *ZStandard*.

A opção *ZInteger* permite atribuir valores inteiros às coordenadas dos *pixels* e simultaneamente escalas iguais para os dois eixos. Com o cursor escolhe-se o centro para a nova janela de visualização e a calculadora ajusta os valores $x_{\min}$, $x_{\max}$ e $y_{\min}$, $y_{\max}$, de modo que $\Delta_x = \Delta_y = 1$, sendo a representação apresentada com $Xscl = Yscl = 10$.

A escolha de *ZoomStat* redefine a janela de visualização de modo que todos os pontos correspondentes a dados estatísticos sejam mostrados no visor.

A opção *ZoomFit* altera imediatamente os valores de $y_{\min}$, $y_{\max}$ de modo que seja possível visualizar os valores máximos e mínimos de *y*, das funções selecionadas, para os valores $x_{\min}$, $x_{\max}$ definidos na janela de visualização.

É necessário possuir um certo conhecimento do modo de funcionamento da máquina para decidir qual a melhor opção a utilizar em determinada situação. Rocha (2001) refere que os alunos participantes no seu estudo, do 10.º ano de escolaridade, recorriam intensamente a *zooms*, sem terem uma noção dos efeitos provocados na janela de visualização, e sem que acedessem a ela de modo a terem uma ideia dos valores representados nos eixos. Esta dificuldade é referida por outros autores, por exemplo, Berry e Graham (2005) também identificaram falta de capacidade dos alunos em recorrer aos *zooms*, dificuldades na obtenção de uma janela apropriada e no trabalho com as escalas visualizadas no ecrã. Relativamente a este último ponto, os autores consideram que tal se deve ao facto de a calculadora não apresentar valores numéricos e os alunos não prestarem grande atenção aos valores definidos. Cavanagh (2006) concluiu, também, que os alunos envolvidos na sua investigação tiveram dificuldade em trabalhar com escalas diferentes e não possuíam uma compreensão satisfatória do modo de funcionar da calculadora quando efetuavam a opção de *zoom*. O autor dá o exemplo de uma questão colocada aos alunos, em entrevistas clínicas (Figura 33), que fez evidenciar essas dificuldades.



Explique por que é que as representações gráficas das retas $y = 2x + 3$ e $y = -0.5x - 2.5$ não parecem perpendiculares no visor.

O que poderia ser feito para que as retas parecessem mais perpendiculares?

Figura 33 – Questão relacionada com o efeito de escalas diferentes nos dois eixos.
(Cavanagh, 2006)

Relativamente à escolha da janela de visualização, Berry e Graham (2005) concluíram que quase todos alunos, depois de editarem a expressão analítica da função, fazem de imediato a representação gráfica, usando os últimos valores definidos para o retângulo de visualização, sem efetuar qualquer tipo de reflexão. Os autores consideram que quando os alunos começam a utilizar a calculadora gráfica para representar funções deveriam seguir o seguinte esquema: introdução da expressão analítica da função; definição em *TBLSET* dos valores a apresentar na tabela de acordo com o domínio que pretendem usar; identificação do contradomínio correspondente a esse domínio com base nos valores apresentados na tabela; alteração dos valores do retângulo de visualização de acordo com os valores identificados; e, finalmente, representação gráfica da função. Se esse esquema não produzisse uma representação aceitável então esperariam que os alunos refletissem sobre o que tinham feito e repetissem a sequência. Para os autores, só depois de este processo estar consolidado é que os alunos deveriam ser introduzidos às funções de *Zoom* na calculadora.

Berry e Graham (2005) consideram preocupante que os alunos participantes no seu estudo não tivessem conhecimento de certas características da calculadora gráfica, apesar de usarem aquela tecnologia regularmente durante vários anos. A maioria desses alunos não conseguiu editar a função módulo nem recorrer ao menu *Calc* para obter coordenadas dos pontos de interseção com os eixos ou dos extremos. Ocak (2008) refere também que as entrevistas realizadas no âmbito do seu estudo mostram claramente que os alunos, por vezes, "lutam com os detalhes técnicos da calculadora gráfica" (p. 346), nomeadamente, no que diz respeito à introdução correta de parêntesis, escolha correta dos valores em *Window*, e uso adequado de *Zoom* e *Trace* quando tentam encontrar uma melhor representação do gráfico. Estes alunos revelaram, igualmente, pouco conhecimento acerca do modo *Calc* e *Math*.

4.1.4. Representação gráfica de famílias de funções e visualização de várias representações em simultâneo

A calculadora gráfica permite visualizar, através da representação gráfica, a influência de um dado parâmetro numa família de funções de forma bastante rápida e eficaz. Por exemplo, para visualizar a representação gráfica de $y=(x-h)^2$ para os valores de $h=-3;0.5;4.5$ basta editar a expressão substituindo h pelos valores indicados dentro de uma chaveta. As representações gráficas vão sendo desenhadas por ordem de introdução dos valores dos parâmetros (Figura 34).

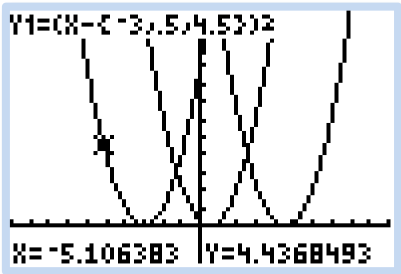


Figura 34 – Representações gráficas das funções $y=(x+3)^2$, $y=(x-0.5)^2$ e $y=(x-4.5)^2$.

Claro que podem também ser introduzidas várias expressões analíticas, uma para cada valor a atribuir ao parâmetro. Esta opção será a mais indicada se se pretender visualizar em simultâneo a representação numérica, uma vez que assim pode-se alternar entre as várias funções, no menu gráfico ou no menu tabela (Figura 35).

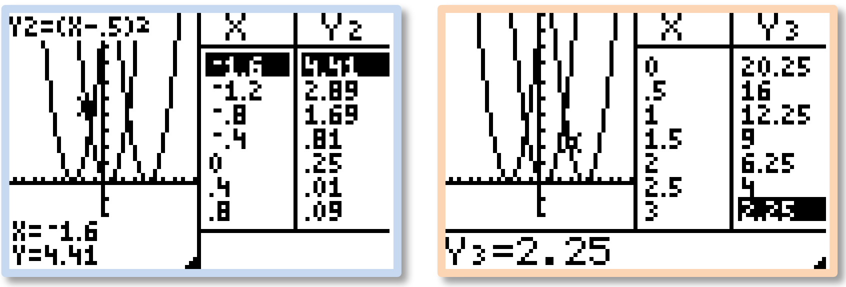


Figura 35 – Visualização simultânea e dinâmica das representações gráfica e numérica (alteração na parte gráfica, ou numérica, respetivamente).

Com a introdução de vários valores do parâmetro numa única expressão, apenas são apresentados os valores numéricos correspondentes à função definida por meio do primeiro parâmetro introduzido, independentemente da função escolhida no menu gráfico. Em situações semelhantes, as calculadoras da marca CASIO devolvem mensagem de erro a qualquer tentativa de visualizar os valores numéricos na tabela.

A opção de visualizar em simultâneo as três representações de uma função é uma das vantagens da calculadora gráfica, no entanto, a representação numérica é muitas vezes deixada de parte, como mostra, por exemplo, o estudo de Kendal e Stacey (2001) em que nenhum dos professores colocou ênfase na representação numérica, assim como o estudo de Herman (2007) em que a abordagem numérica não foi usada por nenhum aluno para resolver os problemas.

4.2. Aprendizagem das funções e a calculadora gráfica

As ferramentas tecnológicas usadas na sala de aula medeiam a aprendizagem que ocorre, bem como as atividades cognitivas em que os alunos se envolvem, podendo mudar a natureza das oportunidades para as atividades matemáticas de conceptualização, representação, generalização, trabalho simbólico e modelação (Heid & Blume, 2008). A Figura 36 pretende ilustrar os modos como a tecnologia afeta o ensino e a aprendizagem da matemática.

A calculadora gráfica permite uma abordagem às funções onde se pode colocar muito mais ênfase nos gráficos e na sua interpretação, tanto para ajudar os alunos a compreender ideias chave (função, classes de funções, transformações de funções), como para resolver problemas algébricos (tais como equações, inequações), pois a facilidade com que a calculadora constrói representações gráficas permite que os alunos possam concentrar-se no significado inerente aos gráficos, em vez de se concentrarem nos aspetos mecânicos da sua construção (Kissane, 1995).

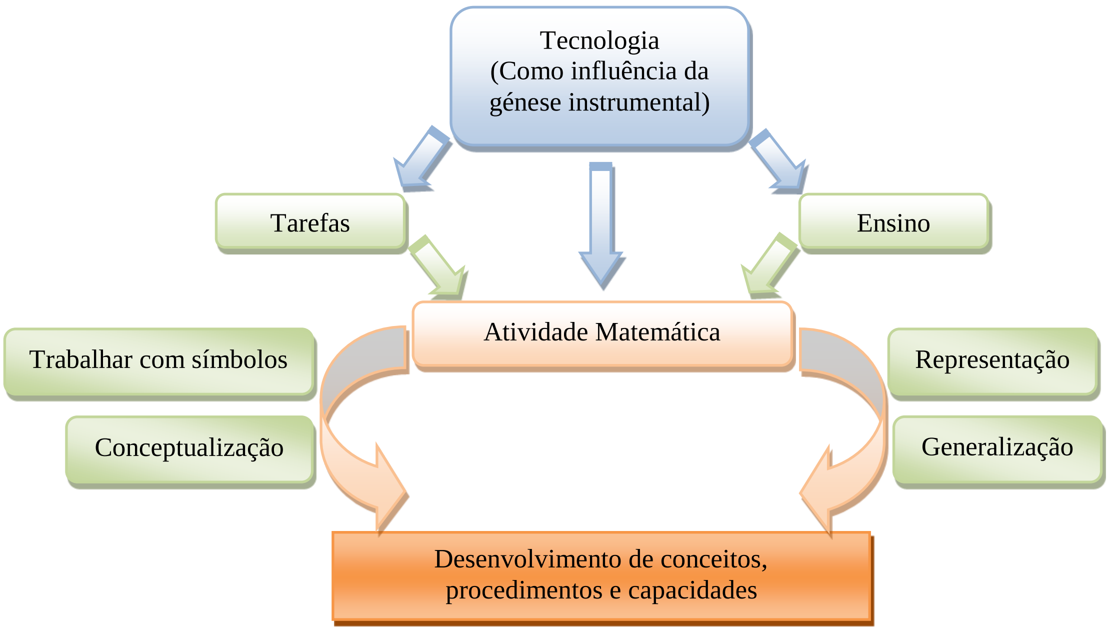


Figura 36 – Modos como a tecnologia afeta o ensino e aprendizagem da matemática.
(Adaptado de Heid & Blume, 2008, p. 59)

Embora seja importante que os alunos compreendam os procedimentos para representar um gráfico (Ocak, 2008), a partir de dada altura já não é a construção do gráfico em si que importa salientar, mas a informação que dele pode ser retirada, ou a importância do estabelecimento de conexões entre representações de modo a identificar a forma da representação gráfica de determinada função. Uma das desvantagens apontada às calculadoras gráficas diz respeito à dificuldade que alguns alunos evidenciam quando pretendem representar, com papel e lápis, o gráfico de uma função, limitando-se a "copiar" o que visualizam no ecrã da máquina, não dando, muitas vezes, atenção à diferença de "escala" entre os dois eixos, nalgumas janelas de visualização, nem ao fato de o que visualizam poder ser uma vista parcial ou não ser sequer representativo da função em questão (Berry & Graham, 2005; Cavanagh & Mitchelmore, 2003). Contudo, essa dificuldade pode ser aproveitada para reforçar tanto os esquemas de utilização referentes ao artefacto, como a ligação entre as representações algébrica, gráfica e eventualmente numérica, e consequentemente a compreensão conceptual. Claro que, neste âmbito, o professor desempenha um papel essencial, como salienta Rivera (2007), ou seja, o ensino num ambiente com a calculadora gráfica terá que responder a questões que provavelmente não se colocariam num ambiente sem a calculadora. Por exemplo, tal como Cavanagh e Mitchelmore

(2003) salientam, professores e alunos têm que lidar com escalas diferentes, vistas parciais e coordenadas irracionais.

A calculadora gráfica proporciona ao aluno oportunidade para explorar funções de diferentes modos antes de ter conhecimentos matemáticos suficientes para efetuar o estudo analítico, fornecendo-lhe assim um conhecimento intuitivo que servirá de base para uma compreensão mais formal. Permite, ainda, que se trabalhe com um maior número de funções, provenientes do contexto de resolução de problemas aplicados, em que diversas características (zeros, extremos) não podem ser determinadas de forma exata (DES, 2001). Ou seja, a própria natureza das tarefas também é alterada num ambiente em que a calculadora gráfica está presente, transformando a atividade matemática do aluno. O *design* das tarefas matemáticas a aplicar em ambientes em que a calculadora gráfica está presente é muito importante, já que existem tarefas que permitem colocar em destaque a compreensão instrumental e matemática (Trouche & Drijvers, 2010)

Para a compreensão do conceito de função é essencial que os alunos desenvolvam uma visão estrutural do conceito (Sfard, 1991), e a calculadora gráfica possibilita que as funções sejam manipuladas como objetos, ou seja, podem ser tratadas como entidades matemáticas manipuláveis, favorecendo o desenvolvimento conceptual (Heid & Blume, 2008). Além disso, faculta um rápido acesso a várias das representações de uma função (simbólica, gráfica e numérica), oferecendo o reforço das oportunidades de trabalhar com múltiplas representações externas, o que por um lado facilita a compreensão do conceito e, por outro lado, contribui para a utilização flexível e adaptável de estratégias e representações (Heinze *et al.*, 2009). O esquema da Figura 37 pretende ilustrar os tipos de conversão de representações permitidos pela calculadora, considerando a possibilidade de estender o artefacto com sensores.

Essas representações podem mediar a perceção de diferentes facetas do objeto matemático que está a ser representado. Podem, também, suportar as atividades de generalização, já que os alunos conseguem observar um largo número de exemplos simbólicos, gráficos e numéricos, o que facilita a procura de padrões e o desenvolvimento de generalizações (Heid & Blume, 2008).

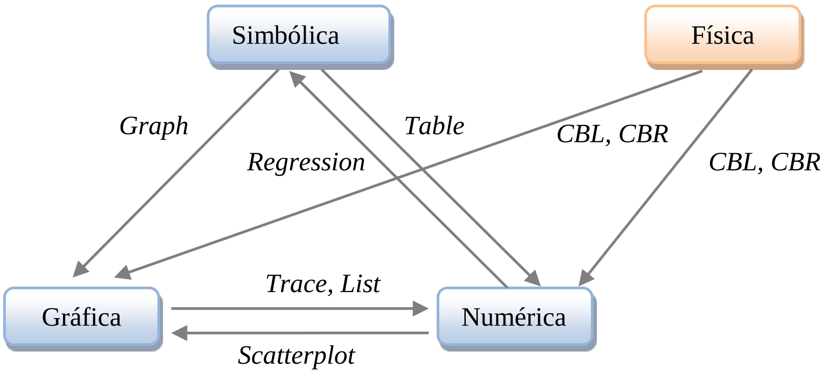


Figura 37 – Conversões representacionais permitidas pela calculadora gráfica.

Como referem Doorman, Drijvers, Dekker, Heuvel-Panhuizen, Lange e Wijers (2007), graças ao seu feedback direto, a calculadora gráfica oferece oportunidades para a realização de tarefas de exploração, antes de os alunos estarem familiarizados com os conceitos ou teoremas:

> As atividades de classificação e registo podem conduzir a descobertas que, em seguida, através da reflexão e generalização, resultam em interessantes teoremas matemáticos. Isto contrasta com o método tradicional, em que as definições e teoremas são apresentados no início da aprendizagem, na expectativa de que a compreensão seja adquirida através da aplicação repetida. (p. 416)

Existem vários estudos sobre o impacto da calculadora gráfica no processo de aprendizagem das funções. O'Callaghan (1998), citado em Hollar e Norwood (1999), examinou os efeitos do uso da calculadora gráfica na compreensão do conceito de função, comparando os resultados obtidos num teste, por alunos que frequentaram um curso semestral de *computer-intensive algebra* (*CIA*), e alunos que seguiram um currículo tradicional de álgebra. O teste foi resolvido sem recurso à calculadora gráfica e cada questão foi concebida para avaliar um dos seguintes aspetos conceptuais do conceito de função: (i) modelação de uma situação de contexto real usando uma função; (ii) interpretação de uma função em termos de uma situação realista; (iii) conversão de diferentes representações de uma função; e (iv) reificação do conceito. Os resultados mostraram que os estudantes *CIA* compreenderam melhor o conceito global de função, tiveram um melhor desempenho nas componentes de modelação, interpretação e conversão de diferentes representações de uma função, além de que mostraram uma melhoria significativa na sua atitude perante a matemática mas, não foram encontradas diferenças significativas na reificação do conceito de função.

Hollar e Norwood (1999) realizaram uma investigação com o objetivo de estender o estudo de O'Callaghan, usando o mesmo quadro teórico, no sentido de investigar os resultados de um currículo com ênfase numa abordagem gráfica, recorrendo à calculadora gráfica. Participaram no estudo duas turmas experimentais e duas de controlo. Os autores concluíram que os alunos do grupo experimental mostraram-se mais confortáveis, do que os do grupo de controlo, a trabalhar com dados e situações inseridos em contextos reais. Além disso, conseguiram examinar as funções de diferentes perspetivas, o que lhes garantiu um melhor desempenho em questões de interpretação e conversão de representações, sendo estes resultados consistentes com os de O'Callaghan. No que diz respeito à componente da reificação, contrariamente ao estudo de O'Callaghan, os autores encontraram diferenças significativas nos dois grupos. Contudo, nessa componente os resultados médios dos alunos (em ambos os grupos) foram dos mais baixos, o que ilustra a dificuldade do processo de reificação (Sfard, 1991). Relativamente às capacidades algébricas tradicionais Hollar e Norwood não encontraram diferenças significativas de desempenho nos dois grupos, o mesmo acontecendo na atitude dos alunos em relação à matemática. Quesada e Maxwell (1994), no entanto, encontraram diferenças ao nível da motivação dos alunos. A abordagem permitida pela calculadora e a possibilidade de confirmarem as suas respostas, parece ter aumentado a motivação dos alunos. No estudo de Hennessy, Fung e Scanlon (2001) também é evidente que a calculadora gráfica contribuiu para uma atitude positiva em relação à matemática, com 85% dos alunos a referir que a matemática com a calculadora gráfica se torna mais agradável e 78% a afirmar que se torna mais fácil.

Também Ruthven (1990) refere que a calculadora gráfica pode reduzir a incerteza e diminuir a ansiedade, aumentando tanto a competência dos alunos em tarefas de simbolização como a sua confiança. O seu estudo envolveu questões de conversão da representação gráfica na simbólica (simbolização) e questões de interpretação verbal a partir de gráficos contextualizados. Os resultados mostraram que os alunos do grupo experimental obtiveram melhores resultados que os do grupo de comparação nas questões de simbolização, mas não nas questões de interpretação. Para o autor, o facto de a calculadora gráfica ser usada durante um longo período de tempo facilita a destreza no reconhecimento de formas gráficas, relacionando-as com formas algébricas apropriadas. Mas, acima de tudo, o facto de a calculadora estar disponível aumenta a informação qualitativa disponível, facilitando a confirmação de uma solução obtida através de uma abordagem analítica ou permitindo uma abordagem gráfica. McCulloch e Keene (2013) concluíram também que o facto de os alunos terem um instrumento que lhes permite confirmar o seu trabalho é importante, uma vez que estes se mostram mais confiantes em situações de *stress*, como os exames. Além disso, os autores salientam que, para além de a calculadora gráfica lhes permitir confirmar se a solução está correta, também lhes permite usar diferentes representações para o fazer. Hunter (2011) refere que, apesar das várias representações disponíveis, nenhum dos alunos do seu estudo se referiu à funcionalidade *Table*, mas os resultados mostram que os alunos do grupo experimental, que tiveram acesso à calculadora gráfica durante a instrução e avaliação, obtiveram resultados significativamente melhores do que os alunos do grupo de controlo, revelando melhores capacidades de raciocínio, essencialmente ao nível da iniciação de uma estratégia e monitorização do processo.

Hall (1993), citado em Kieran (2007), comparou quatro turmas experimentais com quatro turmas de controlo, em três semanas de estudo das funções trigonométricas, e concluiu que o uso das calculadoras gráficas não teve um impacto significativo na aprendizagem dos alunos. Embora o resultado deste estudo pareça entrar em contradição com os resultados anteriores é de salientar que ele decorreu apenas durante três semanas. Outro estudo, conduzido por Harskamp, Suhre e Streun (2000), mostrou que os efeitos da calculadora gráfica na aprendizagem das funções foram mais significativos nos alunos que a usaram todo o ano do que os que a usaram por apenas dois meses. Estas pesquisas indicam que o tempo é uma variável a ter em conta quando se pretende avaliar o impacto do uso da calculadora gráfica na aprendizagem das funções. Contudo, os resultados positivos parecem restringir-se aos alunos mais fracos (Harskamp *et al.*, 2000). Existem evidências, noutras investigações, de que os alunos mais fracos beneficiam mais com o acesso à calculadora gráfica do que os restantes (Burrill, Allison, Breaux, Kastberg, Leatham & Sanchez, 2002; Hunter, 2011). Almeida e Oliveira (2009) concluíram que os alunos, assim que desenvolvem esquemas de compreensão algébrica, dão-lhes primazia relativamente aos esquemas instrumentais, sendo estes utilizados, quase exclusivamente, para confirmação ou em situações em que são pedidos explicitamente. As autoras consideram que esse comportamento pode ser uma consequência do nível de desempenho dos alunos que, no caso, era elevado.

Relativamente a estratégias utilizadas pelos alunos em ambientes com ou sem a calculadora gráfica, Harskamp *et al.* (2000) compararam as estratégias (heurísticas, gráficas, algorítmicas ou sem solução) utilizadas pelos alunos do grupo experimental e de controlo ao resolveram problemas envolvendo funções, e concluíram que não existiram diferenças significativas ao nível das estratégias heurísticas e algorítmicas, não havendo evidências de a calculadora gráfica conduzir ao uso de mais estratégicas heurísticas ou à redução do número de estratégias algorítmicas. Porém, houve diferenças significativas ao nível do uso de estratégias gráficas, com os alunos do grupo experimental a usarem-nas três vezes mais do que os do grupo de controlo. Também houve diferenças na tentativa de encontrar uma solução, com os alunos do grupo de controlo a falharem duas vezes mais do que os alunos do grupo experimental.

Abu-Naja (2008) estudou o contributo das calculadoras gráficas na compreensão do conceito de família de funções. O estudo envolveu um grupo experimental de 95 alunos que trabalhou com recurso à calculadora gráfica os seguintes tópicos: famílias de funções afim e quadrática, propriedades características de famílias de funções e padrões algébricos exibidos por famílias de funções; e um grupo de controlo de 89 alunos que trabalhou exatamente os mesmos tópicos em termos tradicionais, sem recurso à calculadora gráfica. Os resultados mostraram diferenças significativas entre os dois grupos, particularmente nos itens que requeriam inferência matemática, tais como, encontrar a propriedade característica de famílias de funções, encontrar exemplos de funções que exibissem uma dada propriedade e encontrar a forma algébrica geral de famílias de funções com uma dada característica comum, sendo o nível de sucesso nessas questões superior no grupo experimental. Curiosamente, o grupo experimental manifestou pior desempenho na questão que requeria a representação gráfica de famílias de funções, exibindo 56% de respostas erradas, pois os alunos limitaram-se a copiar a forma geral observada no visor das calculadoras mas não consideraram a escala. Este problema de os alunos negligenciarem as escalas quando usam calculadoras gráficas é recorrente em vários estudos (Berry & Graham, 2005). Contudo, considerando os resultados obtidos nas várias categorias de análise, o estudo mostrou que a percentagem de alunos que exibiu pensamento significativo, ou seja, que conseguiu resolver os problemas que exigiam pensamento e compreensão matemáticos, foi muito mais elevada no grupo experimental, o que demonstra que as calculadoras gráficas desempenharam um papel importante na aprendizagem do conceito de famílias de funções. O autor pôde ainda constatar que ambos os grupos evidenciaram pensamento *pseudoconceptual* e *pseudo-analítico*, no entanto, tal foi mais significativo no grupo de controlo que, devido ao "seu conhecimento incompleto e não consolidado, inventou teoremas incorretos e leis com vista a responder às questões" (p. 200).

Num estudo realizado por Bardini, Pierce e Stacey (2004) foi analisado o ensino da função afim, através de uma abordagem em que os conceitos eram desenvolvidos a partir de uma série de problemas baseados em contextos da vida real, recorrendo à calculadora gráfica. Apesar de ter sido necessário um considerável investimento de tempo e esforço para que os alunos aprendessem a utilizar a calculadora gráfica, esta proporcionou-lhes um importante apoio na exploração dos problemas e, como referem os autores, as capacidades que foram adquiridas, relativamente à utilização da calculadora, podem ser consolidadas e aplicadas em tópicos futuros. A calculadora teve também alguma influência no modo como os alunos perceberam e usaram as letras, notando-se progressos em direção a uma escrita mais convencional de expressões algébricas e no desenvolvimento do sentido do símbolo.

Davis (2007) realizou um estudo para determinar como é que os contextos reais, as múltiplas representações e uma introdução formal mais tardia da terminologia matemática influenciavam a compreensão dos alunos acerca do conceito de ordenada na origem (função afim) e a sua capacidade para o usar. Os alunos desenvolveram a sua própria terminologia (início, ponto de partida), estando essa terminologia bastante ligada à temporalidade implícita ou explícita dos contextos das tarefas, no entanto, nem sempre era usada pelos alunos no sentido de ordenada na origem. Por exemplo, o termo "início" era utilizado numa tabela com um significado diferente do usado em gráficos, equações ou contextos reais. No caso das tabelas, o termo "início" era usado pelos alunos para representar ou o primeiro valor da variável independente inscrito na tabela ou qualquer valor da variável independente. Esta ligação entre o termo "início" e um certo valor da variável independente era fortalecido quando os alunos usavam calculadoras gráficas, pois o primeiro valor da coluna mostrada na tabela correspondia ao valor da variável independente onde os alunos queriam começar ("*tblstart*"). Este estudo vem reforçar a necessidade da negociação de significados (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997), caso contrário, alunos e professores podem estar a usar a mesma linguagem mas fazendo interpretações diferentes.

Apesar de vários estudos indicarem que as imagens visuais podem contribuir para a compreensão conceptual dos alunos, Aspinwall, Shaw e Presmeg (1997) alertam para a necessidade dos educadores matemáticos estarem conscientes que alguns alunos têm dificuldades na resolução de problemas devido a "imagens incontroláveis" associadas a representações gráficas. O autor realizou um estudo de caso com o objetivo de compreender o papel que as imagens desempenham na aprendizagem, em particular, em termos da representação gráfica entre uma função e a sua derivada. O participante neste estudo demonstrou capacidade para aplicar regras de derivação em várias situações. Contudo, quando lhe foi apresentada uma parábola e lhe foi pedido para esboçar o gráfico da derivada, o aluno esboçou um gráfico semelhante ao da função $y = x^3$. Durante a entrevista, o investigador compreendeu que o aluno via o gráfico dado como se este tivesse assíntotas verticais, não demonstrando ter feito conversão da representação gráfica na simbólica. Quando o entrevistador questionou o aluno se a representação gráfica poderia ser da função $y = x^2$, e este efetuou o cálculo símbolo da derivada, surgiu uma situação de conflito: "surpreende-me, não deveria ser uma linha reta" (p. 311). O problema era causado pela imagem visual que o aluno não conseguia controlar e a que acabou por chamar "ilusão ótica". O aluno só mostrou ter "algum controlo sobre a imagem" alguns dias depois, compreendendo que não via todo o gráfico, fazendo uma analogia com um penhasco. Esta situação exemplifica as limitações de uma imagem concreta (uma imagem que pode ser graficamente inscrita numa página) e, ao mesmo tempo, mostra como as múltiplas representações podem contribuir para o esclarecimento de equívocos que por vezes estão fortemente enraizados. Embora os autores alertem para o facto de que estas "imagens incontroláveis" se possam formar como consequência de um ensino que enfatiza uma abordagem gráfica ou o uso de tecnologias gráficas, penso que a utilização da calculadora gráfica poderá ajudar a controlar tais imagens dada a facilidade com que é possível fazer vários *zooms*, observando os seus efeitos em termos gráficos e numéricos.

A relação entre aspetos algébricos e geométricos de uma função pode provocar algumas situações de conflito mesmo para matemáticos. Zaslavsky, Sela e Leron (2002) mostram como uma simples tarefa provou ser "inquietante para os participantes e gerou considerável excitação, confusão e desacordo" (p. 122). Participaram no estudo alunos do 11.º ano, futuros professores e professores de matemática do secundário, educadores matemáticos (alunos graduados que se encontram a fazer teses em educação matemática) e matemáticos, num total de 124 pessoas. Os participantes responderam a três questões, relacionadas com o declive da função linear $f(x) = x$, com o ângulo entre o gráfico de *f* e o semieixo positivo Ox e com a tangente desse ângulo, em duas tarefas onde apenas mudava a escala do sistema de eixos coordenados onde a função *f* se encontrava representada graficamente. Na tarefa 1 era usada a mesma unidade de medida nos dois eixos (sistema de coordenadas monométrico) e na tarefa 2 as unidades de medida eram diferentes. A tarefa 1 foi respondida do mesmo modo por todos os participantes, contudo, as respostas dadas na tarefa 2 geraram quatro perspetivas de declive: duas perspetivas díspares que os autores denominaram de "analítica" e "visual" e duas combinações destas, que foram predominantes. Na perspetiva analítica o declive é considerado uma propriedade da função (afim) mantendo-se invariante em sistemas não monométricos e pode ser calculado através da derivada, da taxa média de variação ou do coeficiente do termo em *x* na equação $y = mx + b$. Em contraste, na perspetiva visual, o declive é considerado uma propriedade do gráfico da função, variando com a mudança de escala em sistemas não monométricos, e podendo ser calculado a partir da tangente do ângulo formado entre a reta que representa a função e o eixo *Ox*, ou através do quociente dos comprimentos dos segmentos. Cerca de quarenta e um por cento dos participantes considerou que o declive era 1 mas que o ângulo era diferente de 45º, não conseguindo dar uma resposta relativamente ao valor da tangente da inclinação devido ao conflito cognitivo que resulta da suposição de que o declive *m* é a tangente da inclinação em qualquer sistema de coordenadas. A segunda perspetiva mais utilizada (33%) não demonstra a existência de conflito cognitivo e é consistente com a noção de que o declive é uma propriedade invariante da função, enquanto o ângulo depende do sistema de coordenadas utilizado. A perspetiva analítica foi preferida por 20% e a visual por 6% dos participantes. A perspetiva visual poderia ser interpretada como um tratamento icónico da informação, no entanto, os autores salientam que entre os participantes que optaram por esta perspetiva, ou por uma combinação das duas, estão educadores matemáticos e matemáticos com um grande conhecimento matemático, que não iriam olhar para o sistema de coordenadas iconicamente. O problema prende-se com a existência de um isomorfismo entre os sistemas algébricos e geométricos que preserve propriedades envolvendo as noções métricas de distância, comprimento ou ângulo. Tal isomorfismo só existe quando é considerado um referencial cartesiano ortonormado. Usualmente, esse sistema de coordenadas é implicitamente assumido, no entanto, muitas vezes, não é respeitado em termos representacionais, especialmente quando se usam tecnologias gráficas. Este estudo mostra a importância de se refletir acerca dos pressupostos e convenções com os quais se está a trabalhar e do papel que as representações têm de acordo com tais pressupostos. Quando os alunos interpretam as representações gráficas obtidas na calculadora enfrentam o problema das escalas e, por vezes, como já foi referido, isso levanta-lhes algumas dificuldades.

A análise de propriedades particulares, muitas vezes ligada à representação gráfica, é útil para caracterizar uma função ou uma classe de funções mas, por vezes, pode causar alguns obstáculos (Bagni, 2005). O autor descreve um estudo de caso onde uma aluna, do primeiro ano do nível universitário, tinha que responder à seguinte questão: “O que representa $y = f(x)$ no plano cartesiano, sabendo que $f''(x) = x$?”. Após ter obtido a solução simbólica geral $y = \frac{x^3}{6} + cx + k$ (resultante da interação com o professor), a aluna pretende passar para o registo gráfico mas fica atrapalhada devido às letras. Por sugestão do professor são analisados os seguintes casos (1) $c = 0, k = 0$; (2) $c = 0, k = 1$, e (3) $c = -1, k = 0$. Ao visualizar as representações gráficas, obtidas na calculadora, a aluna fica surpreendida pelo facto da solução simbólica de um problema conduzir a várias representações gráficas e decide que algo deve estar errado pois, enquanto as curvas correspondentes aos casos (1) e (2) são congruentes, o mesmo não se passa com a terceira curva. Após ter olhado para o registo simbólico e para as curvas a aluna respondeu “se tivesse que escolher uma curva preferia a (3): parece mais geral, tem também o termo em *x*. Em (1) e (2) o *c* é zero, não têm termo em *x*, portanto são casos particulares” (p. 219). O facto de ser possível escrever uma expressão geral no registo simbólico mas o mesmo não acontecer no registo gráfico provocou uma situação de conflito à aluna. As diferentes possibilidades de utilização dos registos podem constituir um obstáculo à aprendizagem do conceito de função e dos procedimentos relacionados, particularmente quando não existe coordenação entre as diferentes representações, pelo que, o autor salienta a importância do professor em termos de clarificação e institucionalização do papel das representações e das propriedades de cada uma delas. Um aluno do 10.º ano, de uma escola em Portugal, provavelmente, não ficaria surpreendido com o facto de não ser possível identificar uma única forma gráfica geral para a classe de funções cúbicas, já que a calculadora gráfica é usada para analisar o efeito da mudança dos parâmetros na representação gráfica de certas classes de funções, incluindo, usualmente, a das funções cúbicas.

Em síntese, a calculadora gráfica, parece dar um contributo importante na aprendizagem das funções, essencialmente ao nível do estabelecimento de relações entre a representação gráfica e a representação algébrica; da atitude e motivação dos alunos em relação à matemática, uma vez que aumenta a sua confiança e reduz a ansiedade, permitindo-lhes por exemplo confirmar as suas respostas; contribuindo também para a melhoria das capacidades de raciocínio; e, contrariando os receios de alguns educadores mais céticos, parecem existir evidências de que os alunos dos grupos experimentais não têm piores desempenhos ao nível da capacidade algébrica (Harskamp *et al.*, 2000; Hunter, 2011; Quesada e Maxwell, 1994).

4.3. Modos de utilização da calculadora gráfica

A calculadora gráfica pode ser integrada na prática profissional do professor de Matemática mas tal não significa que esta seja substancialmente diferente da prática sem calculadora. Andrade (2007) realizou três estudos de caso com professores do ensino secundário, com o objetivo de investigar a integração da calculadora gráfica na prática profissional. Um dos professores demonstrava facilidade em trabalhar com a calculadora e promoveu o seu uso em tarefas não rotineiras, incentivando a exploração e uma utilização crítica, assumindo o papel de facilitador da aprendizagem. Em contraste, as duas outras professoras usavam a calculadora gráfica em tarefas rotineiras e preferencialmente para confirmar a resolução analítica, assumindo um papel de transmissoras de conhecimento. No caso destas professoras, a integração da calculadora gráfica na prática profissional não parece ter alterado o tipo de ensino, sendo este semelhante com ou sem calculadora gráfica, já que esta era usada principalmente para confirmar resultados.

O modo como o professor trabalha com a tecnologia e como usa diferentes representações reflete-se nas escolhas representacionais que os seus alunos fazem. Patterson e Norwood (2004) estudaram a relação entre as conceções de dois professores acerca da tecnologia e de múltiplas representações, assim como a sua capacidade para implementar um currículo baseado em múltiplas representações. Em particular, as autoras pretendiam investigar a relação entre o ensino do professor e a capacidade dos alunos para estabelecer conexões entre diferentes representações (algébrica, gráfica e numérica) e resolver equações quadráticas. Um dos professores participantes no estudo preferia usar o método algébrico e, apesar de considerar importante trabalhar com várias representações, sentia uma certa relutância em utilizar representações visuais por não se sentir muito à-vontade com esse método. Não valorizava o uso da calculadora gráfica, considerando que era necessário muito tempo para aprender e ensinar a trabalhar com ela e, muitas vezes, de acordo com as autoras, perdia a oportunidade para estabelecer conexões significativas entre os conceitos e as diferentes representações, usando a calculadora apenas nos últimos minutos da aula, para mostrar algum resultado a que já havia chegado por resolução algébrica. Como consequência, os seus alunos começaram a usar a calculadora gráfica apenas como um meio para verificar a resposta no fim de resolverem os problemas algebricamente. Em contraste, a outra professora participante no estudo integrava a calculadora gráfica no decurso da aula, usando cada uma das três representações quase equitativamente. Os seus alunos optavam por resolver os problemas usando várias representações e não dependiam totalmente do método algébrico. Contudo, em testes ou provas, os alunos desta professora também usavam em primeiro lugar o método algébrico, o que, segundo as autores, talvez se devesse ao facto dos enunciados pedirem para os alunos justificarem o seu trabalho. Também no estudo de Andrade (2007) os professores referiram que os bons alunos preferiam a resolução analítica relativamente à resolução com recurso à calculadora gráfica, talvez por considerarem que desse modo a sua resposta estava melhor justificada.

A influência da abordagem didática utilizada pelo professor no modo como os seus alunos usam a tecnologia é corroborada por outros estudos. Rocha (2001) refere que os critérios em que os alunos do 10.º ano se baseiam relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica são bastante influenciados pelas suas experiências na sala de aula, mostrando tendência para utilizar a máquina da mesma maneira que foram ensinados a fazê-lo. Semião (2007) concluiu também que o conhecimento que os participantes no seu estudo (alunos do 12.º ano) possuíam relativamente à calculadora gráfica se resumia praticamente ao que foi ensinado pelos professores ao longo dos três anos e que, no que toca à exploração individual da calculadora, esta foi muito reduzida e apenas se verificou no início do contacto com a mesma. Um resultado a salientar do seu estudo é o facto de os alunos nunca terem recorrido ao menu *Table*, desconsiderando assim uma das representações das funções.

Rocha (2000) refere a existência de alguns critérios comuns a todos os alunos do seu estudo no que diz respeito à utilização da calculadora gráfica, por exemplo, quando era pedida a elaboração de um gráfico ou a resolução de uma equação ou inequação. A calculadora foi também considerada útil na exploração de problemas que, à partida, os alunos não sabiam abordar. Os alunos participantes na investigação de Semião (2007) recorreram à calculadora gráfica quando os enunciados o indicavam explicitamente e, em consonância com os resultados de Rocha (2000), nas situações em que a questão envolvia gráficos mesmo que o enunciado não impusesse o recurso à calculadora gráfica. Em consonância com outros estudos atrás referidos, o principal papel que a calculadora desempenhou, e que é comum a todos os alunos do estudo de Semião (2007), é o de confirmação das respostas obtidas analiticamente. Além disso, parece que os alunos do seu estudo esperavam ver mais valorizada uma resolução analítica, o que poderá ter a ver com a cultura da sala de aula vigente, a qual, segundo a autora, se orienta fortemente nesse sentido.

Os resultados de Weigand e Bichler (2009) apontam, em parte, no mesmo sentido dos de Rocha (2000) e Semião (2007), embora seja de salientar que os alunos participantes deste estudo não tenham usado simples calculadoras gráficas mas calculadoras simbólicas (*Voyage* 200 ou TI-*Nspire* CAS). Os autores concluíram que o tipo de representação utilizada pelos alunos (11.º ano) ao resolverem problemas com calculadoras simbólicas dependia muito fortemente, por um lado, das turmas onde os alunos estavam inseridos, o que mostra a importância que o professor tem neste processo, e, por outro lado, não só do tipo de problema mas também das expressões utilizadas no enunciado: quando era pedida a "solução de uma equação" o trabalho principal era desenvolvido ao nível simbólico, se era pedido um "ponto de intersecção de dois gráficos", os alunos trabalhavam com a funcionalidade gráfica. Esta pesquisa revelou também que os alunos utilizavam essencialmente as potencialidades gráficas e simbólicas da calculadora, sendo o uso numérico muito limitado. Foi também possível perceber que os alunos não estavam familiarizados com vantagens ou desvantagens de cada representação e não estabeleciam conexões entre diferentes representações. Os alunos integraram a calculadora predominantemente no início e durante a resolução de problemas, mas, do primeiro teste para o segundo, notou-se quer um aumento da utilização da calculadora no fim da resolução, o que pode significar que a confirmação da solução "ganhou importância", quer um aumento na frequência da utilização da calculadora, o que confirma que o processo da génese instrumental requer bastante tempo.

Doerr e Zangor (2000) identificaram cinco modos de utilização da calculadora gráfica pelos alunos: (i) *ferramenta computacional* – a calculadora foi usada rotineiramente para calcular o valor de expressões numéricas, estimar e arredondar; (ii) *ferramenta transformacional* – a calculadora foi utilizada para transformar tarefas tediosas em interpretativas, o que foi essencialmente evidente nas investigações dos alunos acerca de vários problemas envolvendo a taxa de variação; (iii) *ferramenta de recolha e análise de dados* – neste contexto a calculadora foi usada durante atividades com o CBL; os dados eram recolhidos, guardados, comparados, e recolhidos até que os alunos decidissem que tinham adquirido um conjunto "satisfatório"; através deste tipo de uso da calculadora os alunos precisavam de se engajar no contexto da tarefa e decidir, através de um processo de conjetura, refinamento e negociação o que constituía "um conjunto satisfatório de dados"; (iv) *ferramenta de visualização* – como ferramenta de visualização a calculadora foi utilizada para: desenvolver parâmetros visuais combinando estratégias para encontrar equações que se ajustassem a um conjunto de dados; determinar imagens apropriadas do gráfico e determinar a natureza da estrutura subjacente da função; ligar a representação visual ao fenómeno físico e resolver equações e inequações; (v) *ferramenta de confirmação* – a calculadora foi usada para verificar as conjeturas dos alunos nas tarefas de investigação, o que era seguido pela rejeição da conjetura, pela tentativa de prova ou pela sua simples aceitação; o papel da calculadora como ferramenta de confirmação foi evidente no contexto das tarefas de transformações de funções (tanto no sentido da representação gráfica para a representação simbólica como no sentido inverso), embora, no início, a calculadora fosse usada nessas tarefas como ferramenta de visualização, rapidamente passou a ser usada como ferramenta de confirmação assim que os alunos apreenderam as ideias das transformações. Semião (2007) adotou a terminologia proposta por estas autoras e concluiu que os alunos do seu estudo usaram a calculadora gráfica apenas como ferramenta computacional e de visualização, o que, mais uma vez, remete necessariamente para o tipo de cultura instituída na sala de aula.

Doerr e Zangor (2000) encontraram duas limitações relativamente ao uso da calculadora gráfica, por um lado, esta foi, por vezes, usada como uma "caixa negra", ou seja, em situações para as quais os alunos não tinham uma estratégia adequada e, por outro lado, os alunos usavam-na como um dispositivo privado, dificultando as interações no grupo. Para Burril (2005) os professores devem ter em conta que a calculadora gráfica, mais do que um computador, é uma ferramenta privada e preparar as suas aulas de acordo com esse facto. Doerr e Zangor (2000) referem também algumas questões relacionadas com as limitações técnicas das calculadoras gráficas. Essas questões foram controladas, pois a professora, estando consciente delas, encorajava os alunos a questionar os resultados obtidos e a efetuar conjeturas ou provas com base no raciocínio matemático.

Hershkowitz e Kieran (2001, 2003) relatam o caso de um grupo de alunos que investigou uma situação problemática sobre o tópico das funções, tendo calculadoras gráficas à sua disposição. A análise do trabalho do grupo revelou um processo dialético de resolução do problema que se desenvolveu entre dois modos de uso da calculadora gráfica: um algoritmo mecanicista, por um lado, e, por outro lado, a procura de significado por parte dos alunos. O grupo começou por gerar uma tabela de dados com a informação verbal disponível e recorreu à opção de regressão linear da calculadora gráfica para obter o modelo algébrico, de forma mecânica, sem ter atendido à adequação desse tipo de regressão. Ao efetuarem as representações gráficas correspondentes, os alunos sentiram que algo estava errado e só então prestaram atenção ao enunciado do problema e à tabela de valores que haviam obtido anteriormente. Apesar de, em dada altura, a calculadora ter sido utilizada de forma mecanicista, a procura de significado prevaleceu e, através da conjugação de várias representações, os alunos conseguiram resolver o problema.

O facto de a calculadora estar presente na sala de aula não significa necessariamente que possa ser uma mais-valia na resolução de problemas. Mesa (2008) menciona um pequeno estudo *quase-experimental* conduzido com quatro pares de alunos que resolveram dois problemas envolvendo funções com e sem recurso à calculadora gráfica. Os resultados não mostraram diferenças significativas em termos das estratégias que os alunos utilizaram quando a calculadora era permitida ou não. O principal uso da calculadora foi para visualização de representações gráficas, com o objetivo de verificar as soluções encontradas no caso do primeiro problema e para testar os valores para os parâmetros das funções envolvidas no segundo problema. A única vantagem dos alunos que usaram calculadora gráfica relativamente aos que não usaram no segundo problema foi o facto de poderem testar mais funções no mesmo período de tempo. Para o autor o estudo mostra evidência que o que guia a resolução de problemas envolvendo funções é, por um lado, o modo como o conhecimento é usado e, por outro lado, a familiaridade do aluno com esse conhecimento, e não tanto as ferramentas disponíveis. O autor enfatiza que o tipo de ensino tem que ser um fator a ter em conta quando se pretende compreender o papel que as ferramentas podem desempenhar na aprendizagem:

> A afirmação de que a calculadora gráfica pode ser usada como um amplificador para o conhecimento conceptual, como catalisador do espírito crítico, ou como veículo de integração, como sugerido por Smith (1998), é uma afirmação que se pode aplicar a outras ferramentas, desde que a instrução, com essas ferramentas, incluam esses propósitos. (Mesa, 2008, p. 131)

Ao permitir trabalhar com várias representações das funções a calculadora gráfica pode proporcionar ao aluno uma oportunidade para desenvolver uma visão orientada para o objeto, essencial ao desenvolvimento do conceito. A valorização e o modo de utilização desta ferramenta dependem fortemente da cultura de sala de aula, como mostram vários estudos analisados nesta secção. O tipo de ensino será sem dúvida, como reclama Mesa (2008), um importante fator a considerar quando se pretende compreender o papel da calculadora gráfica na aprendizagem e, como refere o autor, outras ferramentas poderão desempenhar semelhantes papéis. Rocha (2012) desenvolveu um modelo do conhecimento para ensinar matemática com a tecnologia (CEMT), onde:

> é reconhecido um papel importante ao conhecimento da matemática, do ensino-aprendizagem, da tecnologia e do currículo, mas o principal destaque é atribuído a dois conjuntos de conhecimentos interdomínios: o conhecimento da matemática, tecnologia e currículo (CMTC) e o conhecimento do ensino-aprendizagem, tecnologia e currículo (CEATC) (p. 398).

O CMTC engloba a fidelidade matemática da tecnologia, a ênfase que esta permite colocar nos conteúdos, as novas sequências de aprendizagem potenciadas e o conhecimento das múltiplas representações fornecidas pela tecnologia e o modo adequado de as integrar. O CEATC envolve o conhecimento das novas questões com que os alunos são confrontados ao trabalhar com a tecnologia, em particular, devido aos seus constrangimentos, das situações de concordância matemática e das potencialidades da tecnologia para o ensino. Este modelo expressa bem a ideia de que o simples facto de a tecnologia estar presente nas salas de aula não é suficiente para que possa trazer um contributo significativo para o ensino e aprendizagem da matemática. A integração da tecnologia no ensino requer da parte do professor um conjunto de saberes ao nível científico, pedagógico, didático e técnico e a sua articulação coerente. O professor desempenha um papel crucial na estruturação das tarefas baseadas na tecnologia e na moldagem da atividade mediada pela tecnologia (Ruthven, Deaney & Hennessy, 2009).

Capítulo 5

Metodologia

Neste capítulo é descrita a metodologia da investigação. Começo por expor as opções metodológicas gerais, tendo em conta os objetivos do estudo e as questões de investigação. Em seguida faço uma breve caracterização dos participantes do estudo, explicitando os critérios que nortearam a sua escolha. Passo então a apresentar e justificar os métodos de recolha de dados e, finalmente, a descrever o processo de recolha e análise dos dados.

5.1. Opções metodológicas gerais

5.1.1. Paradigma da investigação e abordagem do estudo

Esta investigação insere-se no paradigma interpretativo seguindo uma abordagem qualitativa. O paradigma interpretativo centra-se nas especificidades do significado e da ação na vida social (Erickson, 1986), valorizando a compreensão de uma situação no seu contexto, não tendo como objetivo efetuar previsões ou generalizar hipóteses. Contrariamente ao paradigma positivista onde "o individual é considerado sem interesse e não significativo em si mesmo" (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994, p. 38), no paradigma interpretativo o objetivo do investigador é compreender como é que os indivíduos pensam e como é que desenvolvem os seus quadros de referência (Bogdan & Biklen, 1994), ou seja, é compreender o mundo subjetivo da experiência humana (Cohen, Manion & Morrison, 2000). No contexto do paradigma interpretativo o trabalho do investigador baseia-se na variabilidade das relações comportamento/significado incidindo sobre o modo como se desenvolvem os sistemas de significado e não tanto sobre os comportamentos observáveis (Lessard-Hébert *et al.*, 1994).

A condução de uma pesquisa interpretativa na área da educação requer "uma observação participante intensa e de longo termo (…), seguida de uma deliberada reflexão de longo termo acerca do que foi visto" (Erickson, 1986, p. 156). Como refere o autor, essa reflexão "envolve um deliberado e minucioso exame do seu próprio ponto de vista interpretativo, das suas fontes teóricas, das suas origens culturais e dos seus valores pessoais" (p. 156).

O presente estudo segue também uma abordagem qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa possui cinco características fundamentais (que não têm que ter o mesmo grau de incidência nem que estar todas presentes): (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o principal instrumento; (ii) a investigação é descritiva; (iii) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos; (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (v) o significado é de importância vital.

Estas cinco características podem ser identificadas nesta investigação. Uma das fontes de dados será a sala de aula, contexto natural onde se desenvolve o processo de ensino/aprendizagem, através da observação participante, sendo a investigadora o principal instrumento de recolha, embora não dispensando equipamentos de vídeo e áudio.

Os dados recolhidos e os resultados da investigação serão de natureza descritiva. O principal objetivo do estudo será compreender e descrever como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica, a integram na atividade matemática e qual o seu papel na aprendizagem das funções. Nesse sentido, estou mais interessada em compreender os esquemas cognitivos e o modo como estes são desenvolvidos do que nos resultados (desempenho dos alunos).

A análise de dados será feita de forma indutiva, não havendo, à partida, o objetivo de confirmar ou rejeitar hipóteses, serão "os dados a falarem por si". De acordo com Ponte (1994), para se descobrir aspetos novos e, por vezes, escondidos, de uma dada situação é muito importante que o investigador possa "tirar partido da possibilidade de se surpreender por não estar afetiva e intelectualmente comprometido com os resultados que nela possam surgir" (p. 3). Finalmente, é de referir a importância do significado atribuído pelos participantes em relação às experiências que vivenciam durante a atividade matemática, indo para além dos comportamentos observáveis (Lessard-Hébert *et al.*, 1994), pelo que, neste estudo, se recorre também à realização de entrevistas com os alunos.

5.1.2. Modalidade do estudo

Dentro do paradigma interpretativo a modalidade escolhida para esta investigação é o estudo de caso. De acordo com Yin (1989) um estudo de caso é uma investigação empírica com o objetivo de estudar um dado fenómeno contemporâneo da vida real, no seu contexto natural, particularmente quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são claramente evidentes. Segundo Merriam (1988) e Yin (1989) os estudos de caso são particularmente adequados quando se pretende; (i) responder às questões "como?" e "porquê?" e não "o quê?" ou "quantos"; (ii) estudar uma situação tão complexa que se torna impossível separar as variáveis do fenómeno do seu contexto; (iii) descrever profundamente um fenómeno e o contexto em que ele ocorreu; (iv) descobrir interações entre fatores significativos característicos do fenómeno ou entidade; (v) compreender a dinâmica de um dado programa ou processo.

Atendendo a que o principal objetivo deste estudo é compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica na sua atividade e qual o seu contributo para a aprendizagem das funções, a opção por realizar estudos de caso é fundamentada, por um lado, tendo em conta o tipo das questões de investigação e, por outro lado, tendo em conta que se pretende compreender um fenómeno complexo, a apropriação, dependente do contexto em que ocorreu.

Um estudo de caso pode ser intrínseco ou instrumental. Dizemos que um estudo de caso é intrínseco quando se tem interesse em estudar aquele caso em particular, ou porque ele é imposto ao investigador ou porque o investigador tem um interesse intrínseco nele devido às suas próprias características (raro, excecional). Um estudo de caso diz-se instrumental quando visa alcançar mais do que a compreensão daquele caso em especial, considerando-se que a sua compreensão irá permitir compreender melhor outros casos (Stake, 2007). De acordo com as definições dadas irei realizar estudos de caso instrumentais, uma vez que, não pretendo estudar nenhum caso pelo seu interesse intrínseco mas sim acrescentar informação que permita compreender melhor outros casos, no âmbito das questões de investigação. Além disso, com o objetivo de acrescentar alguma evidência, abrangência e possível diversidade de informação, realizo dois estudos de caso. Assim, espero poder efetuar uma comparação entre os dois, no sentido de salientar diferenças ou semelhanças.

No que diz respeito ao propósito principal existem vários tipos de estudos de caso em educação: exploratórios, analíticos e avaliativos. Os estudos de caso exploratórios pretendem "retratar" o que se pretende estudar sem que haja uma preocupação analítica; os estudos de caso analíticos pretendem "teorizar", ou seja, pretende-se analisar e dar um contributo acrescido para a teoria e os estudos de caso avaliativos pretendem "ajuizar", isto é, emitir um juízo avaliativo (Merriam, 1988). O propósito desta investigação não é apenas descrever o mais fielmente possível o que se pretende estudar, mas também efetuar uma análise que permita contribuir para o conhecimento na temática em estudo, sendo, portanto, do tipo analítico.

5.2. Participantes

Tendo em atenção a problemática do estudo, decidi que este deveria ter um carácter longitudinal de modo a conseguir perceber a evolução dos alunos na apropriação da calculadora gráfica como instrumento integrante da atividade matemática. Assim, optei por realizar o estudo acompanhando os alunos durante o 10.º e o 11.º anos, pois é no 10.º ano que os alunos tomam pela primeira vez contacto com a calculadora gráfica como ferramenta de carácter obrigatório. Não me pareceu conveniente prolongar o estudo ao 12.º ano porque, por um lado, os alunos e professores estão mais pressionados com o tempo, com o cumprimento do programa e com o exame nacional e, por outro lado, parece-me aceitável que a maior evolução em termos da integração da calculadora gráfica se verifique nos dois primeiros anos, estando já consolidada no 12.º ano.

5.2.1. A professora

Após tomada de decisão sobre o nível de escolaridade em que iria realizar o estudo, era necessário encontrar um professor que estivesse disponível para participar e que possuísse algumas características consideradas importantes para o estudo em questão. Por um lado, considerei importante que este tivesse vários anos de experiência no ensino secundário de modo a conhecer bem o programa da disciplina de Matemática A, ao longo dos três anos do ensino secundário, assim como as características gerais dos alunos deste nível de ensino, no que diz respeito à aprendizagem da Matemática. Por outro lado, o professor deveria interessar-se pelo uso das novas tecnologias no ensino da matemática, e em particular, ter à-vontade na utilização da calculadora gráfica na sala de aula, já que, o conhecimento, atitude e crenças do professor em relação à tecnologia são determinantes no modo como esta é usada (Doerr & Zangor, 2000). Surgiu, assim, a ideia de contactar uma colega que possui uma longa experiência de ensino no secundário e que tem mostrado interesse pela utilização da calculadora gráfica, estando na altura inclusivamente a frequentar o Mestrado em Inovação Pedagógica, entretanto concluído, cuja dissertação incidiu sobre a temática da calculadora gráfica no ensino/aprendizagem da matemática. Além disso, pretendia realizar a investigação num contexto em que os alunos trabalhassem na sala de aula com algumas tarefas de carácter não rotineiro, englobando a resolução de problemas e tarefas de natureza exploratória ou investigativa, o que, do conhecimento que tinha da professora, me pareceu estar assegurado.

A professora mostrou imediatamente a sua disponibilidade para que eu pudesse conduzir a investigação numa das suas turmas de Matemática A, do 10.º ano. Lecionando duas turmas, a opção por uma delas recaiu sobre a que parecia possuir condições mais favoráveis para a investigação: um bom ambiente de trabalho na sala de aula e, segundo a professora, alunos interessados e participativos.

5.2.2. A turma

A turma[20] é constituída por 27 alunos, 13 raparigas e 15 rapazes, estando um deles a frequentar apenas a disciplina de Matemática A. A média de idades ronda os 15 anos. A maioria dos alunos já frequentava aquela escola no ensino básico e vive na sua proximidade.

As habilitações literárias dos pais variam entre o 4.º ano de escolaridade (2) e a licenciatura (4). As suas atividades profissionais são muito diversas, havendo a destacar dois desempregados. Relativamente às mães, as habilitações literárias variam também entre o 4.º ano de escolaridade (1) e a licenciatura (8), sendo as atividades profissionais igualmente muito diversas, salientando-se uma mãe desempregada e outra doméstica. A idade dos progenitores encontra-se maioritariamente entre os 40 e os 50 anos. Todos os alunos vivem num agregado familiar com, pelo menos, um dos progenitores.

No que diz respeito ao percurso escolar, existem quatro alunos que tiveram, pelo menos, uma retenção, dois deles no ensino básico e dois no ensino secundário. Todos os alunos referem estar na área vocacional pretendida. Entre as disciplinas preferidas por estes, salienta-se as Ciências Naturais. A Matemática e as Ciências Físico-Químicas são identificadas pelos alunos como as disciplinas onde têm mais dificuldades.

Relativamente à ocupação dos tempos livres, a televisão concentra as preferências dos alunos, seguindo-se as atividades ligadas à informática. O computador é essencialmente usado para navegar na Internet e, mais de metade dos alunos da turma, refere usá-lo como instrumento de trabalho para a escola.

Quanto às futuras áreas profissionais, a medicina é a profissão que é apontada por mais alunos (4), havendo uma dispersão na sua preferência por várias outras profissões. No entanto, muitos alunos (14) ainda não sabem qual a profissão que desejam ter no futuro.

No 11.º ano o grupo turma sofreu algumas alterações, tendo saído os três alunos que obtiveram classificação inferior a 8 valores, um aluno que ficou retido e o aluno que se encontrava apenas inscrito a Matemática A. Foram entretanto integrados três novos alunos, um deles apenas inscrito a Matemática A. Um dos alunos que progrediu com 8

[20] A caracterização da turma foi feita com base nas fichas biográficas dos alunos, a que tive acesso através da Diretora de Turma, com o conhecimento do Diretor da Escola.

valores no 10.º ano, obteve 7 valores nos dois primeiros períodos do 11.º ano e anulou a matrícula na disciplina. Assim no final do 11.º ano foram avaliados 24 alunos.

A tabela seguinte mostra as classificações obtidas pelos alunos da turma no final dos dois primeiros anos do ensino secundário.

Tabela 6 – Classificações no final do 10.º e 11.º, obtidas pelos alunos da turma selecionada

Classificações	10.º	11.º
≤ 7	3	1
8 – 9	5	5
10 – 13	11	11
14 – 17	7	5
18 – 20	1	2
Total	27	24

5.2.3. Os alunos

Depois de escolhida a professora e a turma era necessário proceder à seleção dos alunos que iriam constituir os casos. Com vista a poder fazer uma escolha mais informada, decidi recolher dados envolvendo quatro alunos. Esses quatro alunos deveriam formar, preferencialmente, dois pares naturais na sala de aula, quer por uma questão de facilidade em termos da recolha de dados, quer devido ao reconhecido papel da interação social na génese instrumental. De modo a garantir alguma diversidade e uma vez que o género poderia ter alguma influência no processo de apropriação da calculadora gráfica, pretendia que os quatro alunos não fossem todos do mesmo sexo e que tivessem diferentes níveis de desempenho na disciplina, adotando como referência as classificações obtidas no final do primeiro período no 10.º ano. Esperava, assim, conseguir uma diversidade que me permitisse escolher dois casos que ilustrassem o processo de apropriação da calculadora gráfica, permitindo simultaneamente alguma comparação.

Inicialmente pretendia selecionar um grupo de quatro alunos de modo a incluir um com classificação entre 10 e 13; dois com classificação entre 14 e 17 e um com classificação entre 18 e 20 valores, contudo, as classificações no primeiro período não ultrapassaram os 17 valores, pelo que, foi necessário adaptar o critério, optando por incluir três alunos com classificação entre 14 e 17 valores. A opção de não selecionar alunos com classificação inferior a 10 valores foi tomada tendo em conta que deveria ser salvaguardada, na medida do possível, a continuidade de frequência da disciplina pelos quatro alunos, no ano letivo seguinte.

Antes de iniciar a recolha de dados propriamente dita, foram observadas algumas aulas, referentes ao tema de Geometria, com o objetivo de ficar a conhecer a turma, de os alunos se habituarem à minha presença, de experimentar o material de registo áudio e vídeo e de efetuar a pré-seleção dos alunos, já que, presumivelmente, é mais fácil obter informação de um aluno que goste de participar nas discussões e sinta à-vontade para expor os seus pontos de vista do que de um que usualmente não intervém. A opinião da professora acerca dos alunos que poderiam ser bons informantes para o estudo foi também um fator a pesar na seleção. Assim, tendo em conta os critérios referidos, foram selecionados quatro alunos que formavam dois pares na sala de aula: Diogo e Francisco e Helena e Sofia[21]. Relativamente às classificações do primeiro período, no 10.º ano, o Diogo, o Francisco e a Sofia obtiveram 16 valores e a Helena 12 valores. O Diogo manteve alguma regularidade em termos da avaliação ao longo dos dois anos, os restantes alunos de um modo geral subiram as classificações, com o Francisco e a Sofia a conseguirem resultados bastante bons no final do 11.º ano. A Tabela 7 mostra os resultados obtidos pelos quatro alunos no final de cada período, durante os dois anos letivos.

Tabela 7 – Classificações por período obtidas pelos quatro alunos durante os dois primeiros anos do ensino secundário.

Classificações por período	**10.º**			**11.º**		
	1.º	2.º	3.º	1.º	2.º	3.º
Diogo	16	16	17	16	17	17
Francisco	16	15	16	18	19	19
Helena	12	13	14	16	15	15
Sofia	16	18	19	18	18	19

[21] Pseudónimos atribuídos pela investigadora aos participantes.

Ao longo do período em que decorreu a recolha de dados, e após alguma análise, optei por realizar apenas dois estudos de caso, uma vez que, por um lado, me apercebi que o volume de dados a analisar seria excessivo e, por outro, que, em particular no 11.º ano, as duas alunas não recorriam muito à calculadora gráfica, optando quase sempre por uma resolução analítica. Esta evidência facilitou a seleção dos dois alunos, Diogo e Francisco, para a construção dos estudos de caso, de modo a poder corresponder ao objetivo da investigação.

5.3. Opções metodológicas instrumentais

A maioria dos estudos qualitativos envolve mais do que uma técnica de recolha de dados (Bogdan e Biklen, 1994). Nesta investigação a recolha de dados foi feita, por mim, através da observação participante e da realização de entrevistas. Foram também recolhidos documentos escritos, realizados pelos alunos na sala de aula, assim como materiais produzidos pela professora. A recolha de dados foi auxiliada por equipamentos de registo áudio e vídeo. Passo, de seguida, a descrever e fundamentar os métodos e instrumentos usados nesta investigação.

5.3.1. Observação participante

A observação tem servido de alicerce para a construção de conhecimento desde que os seres humanos se começaram a interessar pelo estudo do mundo natural e social, e continua a ser a base fundamental de todos os métodos de pesquisa (Adler & Adler, 1994). Segundo estes autores a observação consiste em "recolher impressões do mundo que nos rodeia através de todas as capacidades humanas relevantes" (p. 378), o que, de modo geral, pressupõe um contacto direto com o objeto da observação. Tradicionalmente uma das marcas da observação tem sido a "não intervenção" (Adler & Adler, 1994, p. 378). Estes autores distinguem os "observadores" (simples observadores) dos pesquisadores que colocam questões ou dão tarefas aos seus sujeitos para resolver, ou dos pesquisadores experimentais que, muitas vezes, controlam certas condições com vista a medir a covariância entre as variáveis em estudo:

> Os observadores não manipulam nem estimulam os seus sujeitos. (…) Os simples observadores seguem o curso dos acontecimentos. Os comportamentos e as interações continuam a decorrer como decorreriam sem a presença do pesquisador, não interrompidos pela intrusão. (p. 378)

O modo como a observação é encarada depende do paradigma que é seguido. As observações qualitativas são fundamentalmente naturalistas, ocorrendo no contexto natural onde os sujeitos se movimentam e não pressupõem categorias predeterminadas de medida ou resposta (Adler & Adler, 1994). Segundo Bogdan e Biklen (1994), os investigadores qualitativos "tentam agir de modo que as atividades que ocorrem na sua presença não difiram significativamente daquilo que se passa na sua ausência" (p. 68), uma vez que, pretendem compreender como é que os sujeitos se comportam no seu ambiente natural. No entanto, apesar de ser geralmente assumido que a observação naturalista não deve interferir com as pessoas ou atividades que estão a ser observadas, muitos cientistas sociais têm reconhecido que a presença dos observadores afeta o que observam (Angrosino, 2005), pois pode conduzir a alterações do comportamento dos indivíduos observados. Bogdan e Biklen (1994) referem-se a este fenómeno como "efeito do observador" (p. 68).

Segundo Adler e Adler (1994), a observação participante é uma das formas de observação mais reconhecida. Desenvolvida a partir da antropologia e sociologia (Lüdke & André, 1986), é a forma de observação geralmente utilizada na investigação qualitativa (Flick, 2005). Marshall e Rossman (2006) definem-na como um método de pesquisa qualitativa que pressupõe o envolvimento do observador no mundo social escolhido para o estudo, oferecendo oportunidade ao pesquisador de ver, ouvir e experienciar a realidade próximo do modo como os participantes o fazem. Seguindo a mesma perspetiva, Fiorentini e Lorenzato (2006) consideram a observação participante um tipo de estudo naturalista em que o pesquisador frequenta os locais onde os fenómenos ocorrem naturalmente:

> A recolha de dados é realizada junto aos comportamentos naturais das pessoas quando estas estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em classe, brincando, comendo (…) O

> termo "participante" aqui significa principalmente participação com registo de observação, procurando produzir pouca ou nenhuma interferência no ambiente de estudo. (p. 107)

Lüdke e André (1986) encaram a observação participante como uma estratégia que envolve "não só a observação direta mas todo um conjunto de técnicas metodológicas pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada" (p. 28). Esta ideia é partilhada por outros autores que associam a observação participante à observação direta dos acontecimentos relevantes durante a interação social, em conjunto com outras técnicas que podem incluir entrevistas, consulta de documentos, etc. (Fiorentini & Lorenzato, 2006; Flick, 2005; Igea, Augustín, Beltrán & Martín, 1995; Jorgensen 1989).

Jorgensen (1989) considera que através da observação participante é possível "descrever o que está a acontecer, quem ou o que é que está envolvido, quando e onde as coisas se passaram, como é que ocorreram e porquê – pelo menos do ponto de vista dos participantes" (p. 12). Este autor identifica sete características que definem a observação participante: (i) um interesse concreto no significado e interação humanos, do ponto de vista dos observados; (ii) um envolvimento nas situações da vida do dia-a-dia; (iii) uma forma de teoria e de teorizar que valoriza a interpretação e compreensão da natureza humana; (iv) uma lógica e um processo de pesquisa em aberto, que requerem flexibilidade, sentido de oportunidade e uma redefinição constante da problemática baseada nos factos observados; (v) uma abordagem e *design* de estudos de caso, qualitativos e em profundidade; (vi) o desempenho de um ou mais papéis de participante que envolve o estabelecimento e a manutenção de relações com os observados; e (vii) o uso da observação direta em conjunto com outros métodos de recolha de informação.

Para que a observação se torne um instrumento de investigação válido e fidedigno necessita de ser controlada e sistemática, o que significa que é necessário determinar com antecedência "o quê" e "o como" observar (Estrela, 1994; Lüdke & André, 1986). Os investigadores têm ainda de tomar uma série de decisões, nomeadamente, quanto à forma de inserção na realidade, explicitação do seu papel e dos propósitos da investigação junto dos sujeitos e do seu grau de participação no trabalho (Lüdke & André, 1986).

Gold (1958) caracterizou os papéis que os investigadores naturalistas podem assumir enquanto observadores. Num dos extremos encontra-se o *participante total* e no extremo oposto o *mero observador*, no entanto, são considerados por este autor dois outros papéis que se situam entre estes: o *participante como observador* e o *observador como participante*. Segundo esta perspetiva, o *participante total* esconde dos observados a sua verdadeira identidade e propósito enquanto investigador. Embora o papel de participante total ofereça ao pesquisador oportunidades de aprendizagem sobre aspetos do comportamento que de outro modo lhe poderiam escapar, exige um contínuo relembrar de que, acima de tudo, está inserido naquele contexto como observador. O *participante como observador* desempenha um papel similar, embora diferendo significativamente do papel de participante total pelo facto de que ambos os intervenientes, observador e observados, estão conscientes da sua relação. Para o autor este tipo de papel é frequente no estudo de comunidades, onde o observador desenvolve relação com os informantes através do tempo, por vezes, observando formalmente, como nas situações de entrevistas e, por vezes, observando informalmente. O papel de *observador como participante* é usado em estudos envolvendo entrevistas e apela para uma observação mais formal do que informal ou participação de algum tipo, sendo o contacto com o observado breve e, por vezes, superficial. E, por último, o papel de *mero observador* exclui qualquer interação social com os observados.

Adler e Adler (1994) consideram que as variedades contemporâneas para o papel de mero observador podem incluir gravação vídeo e áudio ou ainda fotografia não interativa. Estes autores, contudo, consideram que nenhum dos papéis defendidos por Gold (1958) é correntemente popular entre os pesquisadores qualitativos e fornecem outra perspetiva que enfatiza uma variedade de *membership roles*. Segundo Angrosino (2005), esta mudança foi ocasionada porque se constatou que a observação pura era, por um lado, difícil de se conseguir na prática e, por outro lado, eticamente questionável, particularmente, no que dizia respeito ao consentimento dos informantes. Adler e Adler (1994) apresentam a seguinte classificação relativamente ao grau de participação: (i) *papel de membro periférico* – o pesquisador considera que é essencial ter uma perspetiva do interior de modo a poder formar uma apreciação rigorosa da vida do grupo, pelo que, observa e interage com os membros de modo a estabelecer uma "identidade de dentro", sem participar naquelas atividades que constituem o núcleo dos membros do grupo; (ii) *papel de membro ativo* – o pesquisador envolve-se mais nas atividades centrais, assumindo responsabilidades de fazer avançar o grupo, mas sem se comprometer completamente com os valores e objetivos dos membros do grupo; e (iii) *papel de membro completo* – o pesquisador estuda cenários onde já é membro ou torna-se um membro genuíno durante o curso da pesquisa.

Nesta pesquisa, tendo em conta a problemática do estudo e as opções metodológicas gerais, decidi pela realização de uma forma de observação participante optando, no entanto, por uma participação reduzida, que corresponderá ao que Adler e Adler (1994) denominam de *papel de membro periférico*. O meu objetivo era observar os alunos no seu contexto natural – a sala de aula – durante o estudo das funções, tentando minimizar a minha intervenção de modo a que não houvesse grande perturbação no ambiente natural da sala de aula. Apesar de ser expectável que os alunos me encarassem como professora, dado ser essa a minha atividade profissional principal, não pretendia de forma alguma assumir esse papel.

A observação das aulas decorreu em dois anos letivos consecutivos, iniciando-se no ano letivo 2009/2010 com os alunos no 10.º ano. No primeiro ano observei todas as aulas referentes ao tema *Funções e Gráficos*, exceto as correspondentes a testes de avaliação. No ano seguinte a observação não foi tão intensiva, incidindo em duas aulas do tema *Geometria no Plano e no Espaço II* e em algumas aulas do tema *Introdução ao Cálculo Diferencial I*, onde fosse expectável que a calculadora gráfica pudesse vir a ter um papel importante, tendo em conta a planificação da professora. Observei assim um total de 32 aulas no 10.º ano, entre o segundo e terceiros períodos, e um total de 17 aulas no 11.º ano, duas delas em meados do primeiro período e as restantes no segundo período. Na Tabela 8 encontra-se uma síntese cronológica referente à observação participante, no primeiro ano de recolha de dados, e na Tabela 9 uma síntese cronológica referente à observação participante, no segundo ano de recolha de dados.

Durante a observação das aulas, sentava-me numa mesa livre, ao fundo da sala, de modo a ter uma visão do conjunto turma e ia tomando algumas notas, as quais especificarei mais adiante. Era aí que permanecia sempre que a professora se dirigia à turma, o que acontecia com muita frequência. No entanto, quando a professora concedia algum tempo aos alunos para resolverem determinada tarefa, por vezes, deslocava-me pela sala e ia acompanhando o trabalho desenvolvido pelos alunos, em particular dos quatro selecionados. Apesar de, como referi, não pretender assumir o papel de professora, os alunos muitas vezes chamavam-me e colocavam-me questões, pelo que, em maior ou menor grau, acabei por interagir com todos os alunos da turma. A minha atenção estava, porém, mais focada no trabalho dos quatro alunos e, por vezes, era eu que lhes colocava algumas questões para compreender o que se encontravam a fazer e o modo como estavam a pensar, com o objetivo de conseguir obter o máximo de informação relevante para a investigação. Enquanto observadora estava particularmente interessada em compreender o modo como os alunos integravam a calculadora gráfica na sua atividade, tentando perceber o seu propósito, as dificuldades sentidas, as interações que estabeleciam a propósito da calculadora gráfica e o modo como iam sendo instituídos e desenvolvidos os esquemas instrumentados.

Sendo este um estudo predominantemente naturalista, o meu objetivo era documentar o ambiente de ensino aprendizagem e não intervir. Contudo, depois de observar várias aulas em que os alunos tinham algum tempo para pensar numa tarefa, mas esta começava pouco tempo depois a ser resolvida no quadro, abordei a professora no sentido de questionar acerca da possibilidade de algumas das fichas de trabalho propostas serem primeiro resolvidas pelos alunos a pares e só depois feita a correção. A professora mostrou-se disponível para recorrer a essa estratégia, pelo que houve momentos em que os alunos tiveram mais tempo para interagir, sendo a discussão com o grupo turma feita posteriormente.

Tabela 8 – Síntese cronológica da observação de aulas no ano letivo 2009/2010 (10.º ano)

Fevereiro	**Data**	**1**	**5**	**8**	**11**	**12**	**18**	**19**	**22**	**25**	**26**
	Aula observada	**A1_10**	**A2_10**	**A3_10**	**A4_10**	**A5_10**	**A6_10**	**A7_10**	**A8_10**	**A9_10**	**A10_10**
	Assunto Principal	Ficha *Funções, gráficos e generalidades* Primeiras utilizações da CG	Ficha *Funções, gráficos e generalidades* Definição de função.	Propriedades das funções	Propriedades das funções	Propriedades das funções	Ficha *Propriedades das funções. Função quadrática* Função afim	Correção da ficha *Proprie-dades das funções. Função quadrática*	Correção do TPC *Investigações com a função afim*	Ficha *Investigando a função módulo*	Ficha *Investigando a função módulo*
Março	**Data**	**1**	**4**	**8**	**11**	**12**	**15**	**22**	**25**	**26**	
	Aula observada	**A11_10**	**A12_10**	**A13_10**	**A14_10**	**A15_10**	**A16_10**	**A17_10**	**A18_10**	**A19_10**	
	Assunto Principal	Função módulo	Ficha *Funções – Composições.* Preparação para o teste	Conversa sobre o teste. Correção de algumas alíneas	Correção do teste. Definição de função módulo por troços	Função quadrática. Estudo a partir de transformações	Função quadrática. Estudo analítico	Vértice de uma parábola (determinação analítica). Ficha *O Concerto*	Conclusão e correção da ficha *O concerto*	Resolução analítica de inequações do 2.º grau	
Abril	**Data**	**12**	**15**	**16**	**19**	**22**	**23**	**26**	**29**	**30**	
	Aula observada	**A20_10**	**A21_10**	**A22_10**	**A23_10**	**A24_10**	**A25_10**	**A26_10**	**A27_10**	**A28_10**	
	Assunto Principal	Correção TPC. Tarefa sobre transfor-mações de funções	Correção da tarefa sobre transfor-mações de funções	Conclusão da tarefa. Ficha *Relacionando a função quadrática e afim*	Polinómios. Operações. Divisão inteira de polinómios	Teorema do resto. Correção Problemas GAVE	Fatorização de polinómios	Fatorização de polinómios	Correção problemas GAVE	Ficha *Funções Polinomiais*	

Maio	**Data**	3	7
	Aula observada	**A29_10**	**A30_10**
	Assunto Principal	Problemas GAVE. Resolução teste intermédio ano anterior	Correção do teste intermédio 5 maio
Junho	**Data**	**7**	**11**
	Aula observada	**A31_10**	**A32_10**
	Assunto Principal	Correção do teste de avaliação	Ficha *Prismas partindo de quadrados*

Tabela 9 – Síntese cronológica da observação de aulas no ano letivo 2010/2011 (11.º ano)

Outubro	Data	**21**	**22**				
	Aula observada	**A1_11**	**A2_11**				
	Assunto Principal	Ficha Funções trigono-métricas	Correção ficha funções trigono-métricas				
Janeiro	**Data**	**10**	**13**	**14**	**17**		
	Aula observada	**A3_11**	**A4_11**	**A5_11**	**A6_11**		
	Assunto Principal	Início funções racionais. Estudo da função $y=\frac{1}{x}$	Continuação do estudo da função $y=\frac{1}{x}$	Assintotas. Estudo de funções racionais a partir de transfor-mações	Estudo analítico de equações e inequações fracionárias		
Fevereiro	**Data**	**4**	**17**	**18**			
	Aula observada	**A7_11**	**A8_11**	**A9_11**			
	Assunto Principal	Ficha *Funções Racionais*. Correção da ficha	Função composta. Ficha função composta	Correção da ficha. Função inversa			
Março	**Data**	3	4	11	14	17	18
	Aula observada	**A10_11**	**A11_11**	**A12_11**	**A13_11**	**A14_11**	**A15_11**
	Assunto Principal	Funções com radicais quadráticos e cúbicos	Operações com radicais. Equações irracionais	Ficha *Funções racionais e irracionais* Taxa média de variação	Correção da ficha avaliação	Taxa de variação instantânea	Taxa de variação instantânea
Abril	**Data**	**1**	**4**				
	Aula observada	**A16_11**	**A17_11**				
	Assunto Principal	Ficha Derivadas	Correção ficha *Derivadas*				

Relativamente às notas tomadas durante a observação, adotei a proposta de Bogdan e Biklen (1994) que sugerem que as notas de campo podem ser divididas em duas partes: (i) a parte descritiva, onde o investigador tenta registar objetivamente os detalhes do que observou, e (ii) a parte reflexiva, onde assinala os seus pontos de vista, as suas ideias, interpretações e preocupações. Essas notas eram em parte tomadas na sala de aula, e posteriormente completadas após o termo da aula, quando ainda conservava presente a observação. A observação seguiu assim, o que Igea *et al.* (1995) referem como observação descritiva, focalizada e seletiva, num processo em espiral que "permite otimizar a reconstrução e representação da realidade social" (p. 282). Estes autores fazem uma analogia com as lentes de microscópio, considerando que quando o investigador pretende captar diferentes níveis do contexto, diminui a potência da lente e focaliza fragmentos cada vez mais amplos do contexto e, de maneira análoga, pode delimitar progressivamente a observação de modo a conseguir explicar aspetos distintos, com diferentes níveis de focalização.

Tendo em conta que a tarefa de registar toda a informação durante o decorrer da aula depende da capacidade de memória e de escrita, e pode ser perturbada por vários fatores, foram também feitos registos áudio e vídeo, com consentimento da Direção da Escola onde decorreu a recolha do material empírico, e dos Encarregados de Educação dos alunos da turma selecionada, garantindo-se o anonimato, quer da escola, quer dos alunos participantes (Anexo 21). Tais registos tinham, assim, o objetivo de complementar a informação das notas de campo. O registo áudio foi obtido nos dois pares de alunos e o registo vídeo abrangia a turma em geral, mas tentava focar em particular os dois grupos em causa. A câmara de vídeo era instalada por mim, no intervalo, de modo a não haver distração ou perturbação no início da aula. Assim que os alunos começavam a entrar na sala, ligava a câmara e colocava um gravador áudio em cada uma das mesas dos dois pares de alunos. Após algumas aulas, o material de registo vídeo e áudio já fazia parte do material da sala de aula e os alunos pareciam já não ligar à sua presença.

5.3.2. Entrevistas

A observação participante é muitas vezes combinada com outras formas de recolha de dados que, em conjunto, permitem ao pesquisador compreender melhor a situação em estudo (Cohen *et al.*, 2000), já que, a interpretação que o pesquisador faz do resultado da sua observação pode não ser consistente com o que o observado vê do seu próprio comportamento (Seidman, 2006). A triangulação dos dados, nomeadamente no que diz respeito a opiniões ou crenças que os participantes têm sobre acontecimentos que os tocam, é usualmente feita associando a observação participante e a entrevista (Lessard-Hébert *et al.*, 1994).

Na raiz das entrevistas "em profundidade" está um interesse em compreender as experiências vividas por outras pessoas e o significado por elas atribuído a essas experiências (Seidman, 2006). Para o autor, a entrevista é um instrumento precioso para se obter conhecimento acerca da educação e de outras áreas das ciências sociais.

Neste estudo as entrevistas, realizadas aos quatro alunos participantes, constituem um importante instrumento de recolha de dados. Foram pensadas para, em conjunto com as outras fontes de dados, contribuírem com informação relevante que permita responder às questões de investigação, bem como para o desenvolvimento de conhecimento fundamental sobre o modo como os alunos se apropriam da calculadora gráfica e a integram na sua atividade durante o estudo das funções.

A preparação da entrevista envolve a tradução dos objetivos da investigação em questões que reflitam adequadamente o que o investigador pretende estudar, sendo desejável que, antes da preparação dos itens, se pense no formato das questões e nos modos de resposta (Cohen *et al.*, 2000).

Tendo em conta a problemática do estudo, optei por realizar entrevistas clínicas, onde é dada uma tarefa para o aluno resolver e lhe é pedido para ir explicando as suas ações e pensamentos, com o objetivo de "capturar o que o indivíduo faz, mas também como o entrevistado desenvolve a compreensão matemática, incluindo a presença e interação de conceitos e procedimentos (Heid, Blume, Zbiek & Edwards, 1999). Hunting (1997) considera que as entrevistas clínicas são particularmente adequadas quando se pretende: (i) compreender as capacidades e competências matemáticas dos alunos de modo a tomar decisões curriculares que facilitem o seu progresso; (ii) obter elementos que permitam avaliar os conhecimentos matemáticos dos alunos; e (iii) contribuir para o desenvolvimento de conhecimento fundamental sobre o ensino e aprendizagem da matemática e conceções dos alunos. Será na perspetiva desta última vertente que se justifica a pertinência deste tipo de entrevista no presente estudo.

Long e Ben-Hur (1991) referem-se também à relação entre as entrevistas clínicas e a aprendizagem da matemática, considerando que estas fornecem informações que não são facilmente disponíveis através de outras fontes, permitindo que o professor compreenda os significados que os alunos encontram nos problemas matemáticos, conheça os seus sentimentos, o seu potencial e as suas lacunas relativamente à matemática. Mencionam ainda um fator que, no âmbito deste estudo, é bastante importante e que diz respeito à possibilidade de perceber se os alunos se restringem a um único método de resolução de problemas e colocam uma maior confiança nesse método ou, se pelo contrário, são capazes de usar métodos alternativos.

A primeira e a última entrevista, para além da parte correspondente à entrevista clínica, englobaram uma parte com carácter semiestruturado, ou seja, obedecendo a um guião com um certo número de questões preparadas com antecedência, havendo, no entanto, flexibilidade para formular outras questões improvisadas a partir das respostas dadas pelos entrevistados (Wengraf, 2001), ou para alterar a sua ordem, caso isso se releve pertinente na altura da entrevista (Cohen *et al.*, 2000). Com essa parte da entrevista pretendia obter informação sobre a relação dos alunos com a matemática e com a calculadora gráfica, as suas opiniões relativamente à importância da matemática e da calculadora gráfica na aprendizagem das funções e o tipo de dificuldades por eles sentidas na realização de tarefas envolvendo funções e na utilização da máquina.

Foram realizadas oito entrevistas, quatro no primeiro ano da recolha de dados e quatro no segundo ano, as quais foram áudio gravadas, naturalmente com consentimento dos alunos e respetivos Encarregados de Educação. Em todas as entrevistas, com exceção da primeira, foram também realizados registos vídeo. A decisão de efetuar registo vídeo foi tomada após a realização da primeira entrevista, dada a dificuldade sentida em tomar nota do trabalho desenvolvido pelos alunos no que diz respeito ao manuseamento da calculadora gráfica. O registo vídeo permitiu-me visualizar as teclas utilizadas e as operações efetuadas pelos alunos na máquina, o que seria praticamente impossível efetuando notas escritas. Desta forma, a perturbação no trabalho desenvolvido pelos alunos foi também minimizada, uma vez que a tomada de notas do género envolveria, com alguma regularidade, algum tipo de questionamento aos alunos sobre as operações efetuadas e visualização do ecrã da calculadora. Nalguns estudos internacionais relacionados com a utilização da calculadora gráfica, foi utilizado um *software* que permite gravar todas as operações efetuadas pelo utilizador – *Keyrecord software*, facilitando assim a recolha de dados. Berry e Graham (2005) consideram que esse *software* é uma excelente ferramenta para recolher dados deste tipo já que permite "observar os alunos a usarem a calculadora gráfica sem estarem sempre a ser recordados que estão a ser observados" (p. 147). Os dados gravados podem depois ser transferidos para um PC e o investigador pode analisá-los calmamente, podendo visualizá-los as vezes que entender (Berry & Graham, 2005). Neste estudo, a câmara de filmar conseguiu cumprir um objetivo semelhante, já que os ficheiros de vídeo permitiram-me visualizar o trabalho desenvolvido pelos alunos com a calculadora gráfica, sendo também possível parar, ampliar e visualizar o número de vezes que considerei necessário durante o tratamento dos dados. Nalguns casos houve alguma dificuldade em conseguir uma boa imagem, devido à iluminação do espaço e às sombras que se projetavam no visor da máquina, mas de um modo geral os ficheiros de vídeo foram uma mais-valia em termos da recolha de dados. A perturbação no trabalho dos alunos foi mínima, sendo que apenas lhes foi pedido que trabalhassem com a máquina pousada na mesa, já que a câmara era montada de forma a focar o visor da calculadora. Por vezes, os alunos levantavam-na para visualizar melhor algo, mas logo se lembravam e voltavam a pousá-la.

No momento das entrevistas, os alunos já se encontravam familiarizados comigo, pois tinha assistido a algumas das suas aulas de matemática, o que foi um aspeto facilitador do processo, conseguindo-se um ambiente agradável, de mútua confiança e empatia entre mim e os entrevistados. Os alunos foram informados do propósito do estudo, sendo-lhes explicado que não se pretendia saber se respondiam certo ou errado a cada tarefa, mas sim conhecer com mais profundidade os seus raciocínios e os processos de resolução.

As entrevistas decorreram na escola onde os alunos estudavam, sendo quase sempre realizadas no gabinete da área disciplinar de Matemática. Inicialmente esperava que as entrevistas tivessem a duração aproximada de 60 minutos, mas após a segunda entrevista foi necessário ajustar a duração das restantes, uma vez que os alunos demoravam bastante tempo a resolver as tarefas. Assim, as restantes entrevistas passaram a durar aproximadamente 90 minutos.

Foi elaborado um conjunto de tarefas a propor aos alunos durante as entrevistas, não perdendo de vista, tal como salienta Hunting (1997), que "os dados dependerão da qualidade e incidência da tarefa" (p. 148).

Em geral as questões a colocar nas entrevistas clínicas devem: (i) ser abertas, para que os alunos tenham liberdade para escolher as suas próprias maneiras de responder; (ii) maximizar as oportunidades de discussão e diálogo, de modo que os processos do pensamento possam ser revelados; e (iii) permitir que quer o aluno quer o entrevistador possam refletir nos seus respetivos processos de pensamento (Hunting, 1997). Este autor enumera uma série de formas de questionamento usadas por entrevistadores experientes que podem ajudar na condução de entrevistas clínicas, nomeadamente: *Podes dizer-me o que estás a pensar?* – Esta questão é pertinente após cerca de 10 segundos de silêncio sem se ter a certeza que o aluno esteja a pensar sobre o assunto; *Podes dizer em voz alta o que estás a fazer?* – Quando o aluno está envolvido em pensamentos, após 10 a 15 segundos o entrevistador pode interromper; *Podes dizer-me como lá chegaste? Como é que sabes? Como é que decidiste?* – Quando um aluno responde a um problema sem que haja uma pista de como chegou à solução, é feita para encorajar a explicação verbal e para transmitir o interesse do investigador no modo de pensar do aluno; *No outro dia outro aluno disse-me ...* – quando há evidência que o aluno não está seguro da resposta dada ou quando o entrevistador quer testar a certeza da convicção do aluno; *Sabes o que (__) significa?* – Por vezes o sucesso da tarefa depende do conhecimento de certo termo particular; *Conheces uma maneira de confirmar se estás certo?* – Encorajar o aluno a fazer a verificação das suas soluções pode ajudá-lo a uma compreensão mais profunda; *Porquê?* – Perguntar porquê é uma maneira de encorajar explicações adicionais. Na condução das entrevistas aos quatro participantes tentei ter em atenção estas sugestões de questionamento, embora por vezes, pelo menos nas primeiras entrevistas, tivesse sentido alguma dificuldade em efetuar apenas estas questões neutras.

Uma questão que Hunting (1997) levanta é se o entrevistador deve esclarecer algo ao aluno durante a entrevista clínica. Segundo o autor, isso depende do propósito da entrevista, contudo, refere que tal poderá permitir que o entrevistador perceba até onde é que o aluno consegue chegar, mas salienta que é necessário ter um certo cuidado no modo de responder e colocar as questões, pois o aluno poderá querer agradar ao entrevistador e procurando neste sinais que lhe indiquem se está a responder correta ou incorretamente, podendo, portanto, a sua resposta ser influenciada por esses sinais. Assim, o autor sugere o encorajamento do aluno com algumas expressões desde que usadas consistentemente e sem mudança de entoação.

Estes foram aspetos que tentei ter em consideração na condução das entrevistas. O esclarecimento de algum ponto, ou um questionamento mais dirigido foram ponderados durante a condução das entrevistas, já que sem esse tipo de interação algumas das questões ficariam sem resposta. Assim, foi também possível comparar o que é que cada um dos alunos conseguiu atingir após esse esclarecimento ou questionamento.

Hunting (1997) assinala ainda um aspeto que deve ser desmistificado com os alunos que é o facto de se colocarem várias questões acerca de uma solução não significa que não esteja correta mas apenas que se pretende saber como é que chegaram à solução. Isto porque, habitualmente, na sala de aula, o professor não questiona uma resposta em detalhe a não ser quando esta está incorreta. Enquanto professora tenho o hábito de questionar, quer a resposta esteja correta, quer esteja incorreta, contudo, o tipo de interação que mantenho com os alunos é diferente do tipo de interação numa situação de entrevista vestindo o papel de investigadora. Penso que fui conseguindo assumir cada vez mais o papel de investigadora ao longo das entrevistas. Ainda assim, no final de cada entrevista, por vezes, prestei alguns esclarecimentos, uma vez que não me parecia correto que os alunos saíssem a pensar que tinham resolvido corretamente alguma das tarefas, quando de facto tal não tinha acontecido.

Foi necessário dar, também, atenção à linguagem não-verbal, já que entrevistador e entrevistado comunicam também não verbalmente, através da expressão facial ou corporal, o que pode transmitir informação acerca dos estados de espírito do entrevistador (Cohen *et al.*, 2000). Ouvir deve ser a grande preocupação do entrevistador. Para Seidman (2006) o entrevistador tem que ouvir pelo menos a três níveis: num primeiro nível, deve concentrar-se no conteúdo de modo a garantir que o compreende e a avaliar se o que está a ouvir é tão completo e detalhado como pretende; num segundo nível, deve ouvir a "voz interior" do entrevistado por oposição a uma voz mais pública, ou seja, o entrevistador pode pedir ao entrevistado para elucidar certas expressões que por vezes são usadas; e, num terceiro nível, o entrevistador tem que ouvir enquanto permanece consciente do processo e do conteúdo, tem que estar consciente do tempo de duração da entrevista, do que já foi coberto e do que ainda falta e tem que ser sensível ao nível de energia do participante e às pistas não-verbais que ele oferece. Estes foram também aspetos que tentei ter em conta, nomeadamente em termos da decisão para avançar para uma nova questão, ou da decisão de terminar a entrevista, mesmo que ainda houvesse questões por responder.

Tendo em conta que a interação é, por um lado, um dos aspetos relevantes para o processo de génese instrumental e que, por outro lado, na sala de aula por vezes os alunos tinham pouco tempo para interagir, decidi realizar em cada ano letivo uma entrevista conjunta, a cada par de alunos. Assim, no primeiro ano da recolha de dados, a última entrevista (quarta) foi composta por uma parte individual, e uma parte conjunta aos pares respetivos, e, no segundo ano de recolha de dados, a primeira entrevista (quinta) foi também realizada a pares.

A tabela seguinte mostra a calendarização das entrevistas ao longo dos dois anos de recolha de dados.

Tabela 10 – Calendarização das entrevistas.

<table>
<tr><th rowspan="2">10.º ano
2009/2010</th><th rowspan="2">E1</th><th rowspan="2">E2</th><th rowspan="2">E3</th><th colspan="2">E4</th></tr>
<tr><th>Parte
Individual</th><th>Parte
conjunta</th></tr>
<tr><td>Helena</td><td>14 janeiro</td><td>25 fevereiro</td><td>15 abril</td><td>15 junho</td><td rowspan="2">15 julho</td></tr>
<tr><td>Sofia</td><td>13 janeiro</td><td>25 fevereiro</td><td>14 abril</td><td>15 junho</td></tr>
<tr><td>Diogo</td><td>14 janeiro</td><td>25 fevereiro</td><td>22 abril</td><td>15 junho</td><td rowspan="2">15 julho</td></tr>
<tr><td>Francisco</td><td>13 janeiro</td><td>26 fevereiro</td><td>21 abril</td><td>14 junho</td></tr>
<tr><th rowspan="2">11.º ano
2010/2011</th><th>E5</th><th rowspan="2">E6</th><th rowspan="2">E7</th><th rowspan="2" colspan="2">E8</th></tr>
<tr><td>Conjunta</td></tr>
<tr><td>Helena</td><td rowspan="2">17 dezembro</td><td>24 fevereiro</td><td>6 abril</td><td colspan="2">9 junho</td></tr>
<tr><td>Sofia</td><td>21 fevereiro</td><td>4 abril</td><td colspan="2">8 junho</td></tr>
<tr><td>Diogo</td><td rowspan="2">17 dezembro</td><td>22 fevereiro</td><td>4 abril</td><td colspan="2">9 junho</td></tr>
<tr><td>Francisco</td><td>25 fevereiro</td><td>5 abril</td><td colspan="2">7 junho</td></tr>
</table>

5.3.3. Tarefas a propor nas entrevistas

As questões propostas nas tarefas das entrevistas foram elaboradas de modo a abranger situações em que os alunos podiam optar por uma resolução recorrendo ou não à calculadora gráfica e situações em que a calculadora gráfica era efetivamente um recurso indispensável, tendo em conta os conhecimentos matemáticos que possuíam no momento da sua realização. A generalidade das questões formuladas não apela explicitamente ao uso da calculadora gráfica, ficando ao critério do aluno quando e como é que usa a ferramenta.

5.3.3.1. Tarefas para o 10.º ano

A tarefa proposta na primeira entrevista (Anexo 1) foi desenvolvida com o objetivo de avaliar os conhecimentos dos alunos acerca das funções, tendo em conta os tópicos abordados no ensino básico. Essa entrevista foi realizada antes do tema das funções começar a ser lecionado no 10.º ano, sendo a única concretizada sem recurso à calculadora gráfica, uma vez que os alunos no momento da entrevista não possuíam esse artefacto, nem nunca tinham trabalhado com ele.

A segunda entrevista foi realizada após as primeiras aulas sobre as funções, na fase da introdução da função módulo (Anexo 2). A primeira questão envolvia uma função desconhecida para os alunos, pelo que, a abordagem a realizar por estes deveria envolver o recurso à calculadora gráfica. Pretendia-se compreender como é que os alunos a utilizavam e quais as dificuldades sentidas, quer no que diz respeito ao domínio técnico, quer no que respeita aos conceitos matemáticos envolvidos. A segunda questão não requeria a utilização da calculadora gráfica, tendo como objetivo perceber se os alunos a utilizavam para explorar a tarefa e de que modos o faziam.

A terceira entrevista foi realizada após ter sido lecionada a função quadrática (Anexo 3). Apenas a última alínea da questão 3 exigia o recurso à calculadora gráfica, dado que os alunos não tinham conhecimentos suficientes que lhes permitissem abordá-la por processos analíticos. O problema proposto nessa questão envolvia conhecimentos de geometria que poderiam não ser evocados nas alíneas anteriores, contudo, esperar-se-ia que a visualização da representação gráfica da função levantasse a questão do domínio e da sua relação com o problema geométrico.

A última entrevista, no primeiro ano de recolha de dados, foi realizada após a lecionação do tema das funções (Anexo 4). A questão 1.2 da parte individual da última entrevista requeria a utilização da máquina, já que esse era o único procedimento que, à data, lhes permitia encontrar os extremos relativos de uma função polinomial de grau superior a 2. Pretendia-se assim recolher elementos que permitissem conhecer melhor o processo de génese instrumental desenvolvido pelos alunos ao longo do tema das funções. Na parte conjunta da entrevista, as questões eram essencialmente de natureza exploratória, sendo a calculadora gráfica um recurso importante nessa atividade de exploração. Pretendia-se assim observar a interação dos pares, analisando o modo como a calculadora gráfica era por estes utilizada.

5.3.3.2. Tarefas para o 11.º ano

A primeira entrevista no 11.º ano foi realizada depois da abordagem do tópico *Geometria no plano e no espaço II* (Anexo 5). O objetivo era compreender como é que os alunos recorriam aos conhecimentos sobre funções, adquiridos no 10.º ano, e os utilizavam numa nova classe de funções, analisando o papel da calculadora gráfica nesse processo. As questões propostas eram de natureza essencialmente exploratória, daí a decisão de realizar a entrevista aos pares e não individualmente. Assim, em caso de dificuldade, os alunos poderiam trocar impressões entre eles, sem estarem tão dependentes da interação com a entrevistadora.

A segunda entrevista foi realizada depois da lecionação das operações com funções (Anexo 6). Com a primeira questão pretendia-se conhecer a representação escolhida pelos alunos na abordagem de um problema idêntico aos que tinham sido trabalhados na sala de aula e os procedimentos por eles utilizados. A segunda questão envolvia funções não familiares, uma vez que as funções racionais trabalhadas em contexto de sala de aula foram essencialmente do tipo $y = a + \frac{b}{x - c}$, com $b \neq 0$. Pretendia-se compreender se os alunos sentiam necessidade de apelar à calculadora, se recorriam às várias representações disponibilizadas pela máquina, e, nesse caso, se conseguiam conjugar a informação proveniente das várias representações. Não sendo obrigatório o recurso à calculadora gráfica, o tratamento algébrico envolvia alguma dificuldade.

A terceira entrevista decorreu depois da lecionação da função derivada. As questões foram pensadas para avaliar quando e porque é que os alunos sentem necessidade de recorrer à calculadora gráfica e o modo como o fazem (Anexo 7).

A última entrevista foi realizada no final do ano letivo (Anexo 8) e pretendia avaliar a evolução do conceito imagem de função dos alunos, ao longo dos dois anos do ensino secundário, procurando-se também compreender qual o papel que a calculadora gráfica poderia ter tido nessa evolução.

5.3.4. Recolha documental

Alguns documentos escritos, produzidos em contexto de sala de aula pelos alunos durante a sua atividade matemática, foram também uma importante fonte de dados. Entre estes encontram-se as resoluções de algumas fichas de trabalho realizadas na aula e testes escritos de avaliação. Embora os dados assim obtidos possam não ter a riqueza dos recolhidos numa entrevista, pois, muitas vezes, não se consegue perceber quais as dificuldades que os alunos sentiram e quais os raciocínios utilizados, aqueles proporcionaram uma fonte adicional de recolha de informação. Além disso alguns dados obtidos a partir de documentos, nomeadamente das resoluções das fichas de trabalho, puderem ser complementados com as gravações áudio feitas na sala de aula e com as notas de campo referentes à observação participante. O caderno diário dos alunos, a que fui tendo acesso, proporcionou também alguma informação relevante, em particular no segundo ano de recolha de dados, uma vez que a observação não foi tão intensiva. Assim, foi possível perceber como os tópicos foram sendo abordados em contexto da sala de aula, mesmo não estando presente.

Foram também recolhidos os enunciados das fichas de trabalho e dos testes sumativos produzidos pela professora respeitantes ao tópico das funções.

5.4. Análise de dados

A análise de dados é "o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205). Esse processo tem o objetivo de aumentar a nossa compreensão sobre esses materiais e de encontrar um modo de a transmitir aos outros. Tal como refere Erickson (1986), as notas de campo, as transcrições de entrevistas, as gravações e os documentos escritos pelos alunos não são, em si mesmos, dados, mas sim, fontes de dados. Sem a tarefa analítica de interpretação do material recolhido não existem dados de investigação.

Miles e Huberman (1994) propõem um modelo interativo para a análise de dados, na investigação qualitativa, composto por três componentes: (i) redução dos dados, que consiste na seleção, delimitação, simplificação, abstração e transformação do material compilado; (ii) apresentação dos dados, que gira em torno do tratamento de dados e consiste sobretudo em condensação e representação; e (iii) interpretação/verificação das conclusões, que consiste na atribuição de significado aos dados reduzidos e organizados através da formulação de relações, pondo em evidência regularidades, explicações e configurações possíveis. A redução dos dados ocorre ainda antes da sua recolha – redução antecipada – com o esquema conceptual, a formulação das questões de investigação, a seleção dos participantes e dos instrumentos. A redução será feita também durante a recolha de dados – redução concomitante – e posteriormente à recolha de dados – redução posterior. A apresentação dos dados e a interpretação e verificação das conclusões ocorrem desde o início da recolha de dados (Figura 38). Porém o processo não é linear, formando antes um processo interativo, como se procura esquematizar na Figura 39.

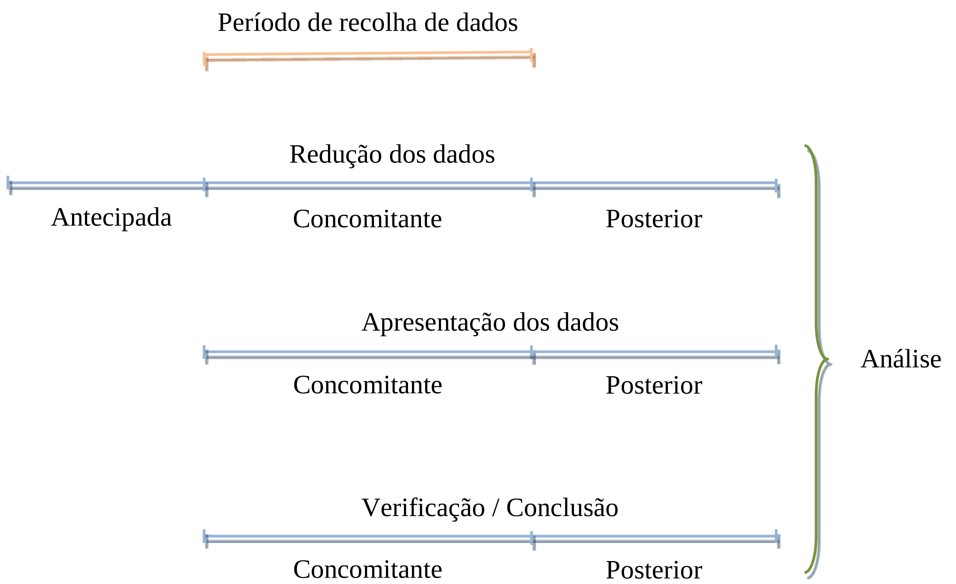


Figura 38 – Componentes da análise de dados.
(Adaptado de Miles & Huberman, 1994, p. 10)

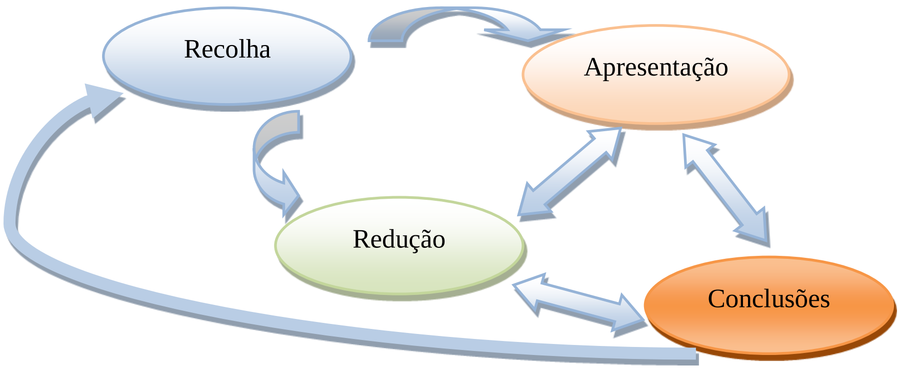


Figura 39 – Modelo interativo da análise de dados.
(Adaptado de Miles & Huberman, 1994, p. 12)

Bogdan e Biklen (1994) consideram que a tarefa de efetuar a análise concomitantemente com a recolha de dados é difícil, sobretudo para investigadores inexperientes, mas é indispensável, caso contrário, a recolha de dados não tem orientação e os dados recolhidos podem não ser suficientemente completos para realizar a posterior análise.

A tarefa de efetuar a análise concomitantemente com a recolha de dados é efetivamente difícil de concretizar, uma vez que as transcrições das notas de campo e das entrevistas exigem um enorme dispêndio de tempo. Apesar da dificuldade fui tentando seguir o modelo de Miles e Huberman (1994), no que toca ao processo da análise de dados, o que me permitiu, por exemplo, ajustar algumas das tarefas a propor nas entrevistas, de modo a que não houvesse uma grande discrepância entre estas e as que os alunos habitualmente resolviam nas aulas.

Nesse sentido, apesar de propor algumas tarefas de natureza não familiar, que pela sua natureza podem proporcionar muito mais informação, do que as tarefas que lhes são rotineiras, acerca do modo como os alunos pensam, da compreensão que têm dos conceitos e do modo como recorrem ou não aos artefactos disponíveis, não deixei de propor algumas tarefas semelhantes às que realizavam na aula. Pretendia que os alunos se sentissem confortáveis e confiantes nas suas capacidades matemáticas durante a realização das entrevistas, o que poderia não acontecer se as tarefas fossem todas muito distintas das que realizavam em contexto de sala de aula. Foi também por essa razão que ponderei a decisão de realizar duas entrevistas em grupo, não obstante a realização individual dos casos. Essas entrevistas aos pares envolviam questões de natureza mais exploratória e o facto de estarem a trabalhar aos pares poderia diminuir alguma ansiedade que a natureza das questões pudesse provocar nos alunos.

Relativamente às notas de campo referentes à observação participante, optei por efetuar transcrições apenas das partes que pudessem ter alguma relevância, tendo em conta os objetivos do estudo e as questões de investigação. Para tal começava por efetuar uma leitura das notas tomadas, e selecionava as partes que diziam essencialmente respeito às interações estabelecidas a propósito da calculadora gráfica ou que me parecesse que poderiam ter alguma utilidade para o estudo ou para descrever o contexto de aprendizagem. Estas eram depois transcritas e completadas com o registo áudio feito a partir das mesas de cada um dos pares. Dada a intensidade das observações realizadas, em particular no primeiro ano da recolha de dados, não seria viável a transcrição integral dos registos de cada aula observada. Bogdan e Biklen (1994) sugerem um processo semelhante relativamente às transcrições das entrevistas quando é o próprio investigador a fazê-las: "As pessoas que trabalham sem fundos para a investigação optam muitas vezes por atalhos. Um desses atalhos consiste em datilografar vocês as transcrições, mas deixando de fora o material que não diz respeito às suas preocupações" (p. 175).

Em relação às entrevistas optei por transcrevê-las integralmente, num intervalo de tempo próximo da sua realização. Para além dos diálogos entre mim e os alunos entrevistados obtidos através do registo áudio, foi possível descrever o trabalho desenvolvido pelos alunos com a calculadora gráfica, através da visualização dos registos de vídeo. Wengraf (2001) recomenda que enquanto é feita a transcrição da cada entrevista sejam anotadas nas margens memórias e associações livres (memorandos) que, segundo o autor, constituirão os *blocos de construção* da secção de interpretação, pois ajudam a construir o processo de evolução da própria reflexão e, por vezes, correspondem mesmo a parágrafos ou páginas do relatório final. Ao longo do trabalho de transcrição fui tentando seguir esta sugestão, o que facilitou a posterior análise.

À medida que ia estando na posse das transcrições das notas de campo e das entrevistas e de alguns documentos produzidos pelos alunos comecei um processo de seleção dos dados que poderiam contribuir com evidência empírica para a investigação, tendo sempre em mente o objetivo do estudo e as questões de investigação. Em seguida passei para um trabalho de organização, condensação e representação da informação recolhida com vista à escrita dos casos.

Para Stake (2007) o estudo de caso depende de dois métodos: a interpretação direta da circunstância individual e a agregação de circunstâncias até que se possa constituir uma classe. Estes dois métodos dependem fortemente da procura de padrões que, por vezes, serão conhecidos antecipadamente, retirados das questões de investigação e, outras vezes, serão emergentes da análise. Tendo em conta que pretendo efetuar estudos de caso instrumentais, a necessidade de dados categoriais é, segundo Stake (2007), maior do que num estudo de caso intrínseco pois, deixa-se de "dar atenção à complexidade do caso para nos concentrarmos nas relações identificadas nas nossas perguntas de investigação" (p. 93). Não perdendo de vista que é o caso que se pretende compreender "analisamos episódios ou textos com o sentido de uma correspondência" (Stake, 2007, p. 93).

Assim iniciei o processo de categorizar os dados de modo a obter a estrutura a transmitir aos casos. Tendo em conta que pretendia estudar a aprendizagem do conceito imagem de função ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário, uma das categorias a incluir na estrutura dos casos foi *Conceito imagem de função no final do ensino básico,* de modo a identificar os conhecimentos sobre funções dos alunos antes da introdução do tema no 10.º ano. As restantes categorias definidas surgiram naturalmente das questões de investigação: *Esquemas de utilização desenvolvidos pelos alunos ao longo do 10.º e 11.º ano*; *Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada*; *Aprendizagem das funções e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno*. Relativamente às subcategorias em cada uma das categorias, algumas foram emergentes dos dados empíricos recolhidos, nomeadamente as que dizem respeito aos esquemas desenvolvidos pelos alunos, e às situações e objetivo com que a calculadora gráfica é utilizada. As subcategorias referentes à aprendizagem das funções surgiram da revisão de literatura. Considerei assim várias vertentes identificadas por diversos autores como essenciais para a aprendizagem das funções, entre elas o reconhecimento e identificação de funções, a capacidade para trabalhar com transformações de funções e para efetuar conversões, e a fluência e flexibilidade representacional.

Comecei por elaborar o caso Diogo, que me pareceu trazer elementos interessantes para o problema em estudo. O segundo caso foi escolhido tendo em conta que deveria trazer alguma diversidade relativamente ao caso Diogo no que respeita ao processo de apropriação da calculadora gráfica. A escolha recaiu sobre o Francisco, já que tanto a Helena como a Sofia, como referi atrás, optavam quase sempre por uma resolução analítica, recorrendo com pouca frequência à calculadora gráfica. Em termos do processo de apropriação do artefacto estes dois casos não trariam informação revelante a acrescentar ao caso Diogo.

A apresentação dos casos foi feita de forma narrativa expondo um conjunto de dados, onde consta alguma interpretação da minha parte. O processo de comparação começou após a descrição e análise dos dois casos. Surgiu assim a discussão dos resultados obtidos, e por fim a elaboração das conclusões com o objetivo de responder às questões de investigação.

Capítulo 6

Contexto de aprendizagem

Neste capítulo pretendo dar a conhecer o contexto de aprendizagem em que o estudo decorreu. Tendo em conta os objetivos da investigação, selecionei alguns episódios, resultantes de algumas aulas observadas ao longo dos dois anos em que decorreu a recolha de dados. Esses episódios pretendem ilustrar o modo como foi sendo feita a integração da calculadora gráfica na atividade matemática da turma, e a dinâmica de trabalho na sala de aula. Destaco, em particular, as intervenções de quatro alunos: Diogo, Francisco, Helena e Sofia. O capítulo está dividido em duas secções, na primeira secção faço referência às primeiras aulas em que a calculadora foi utilizada, momento em que começaram a ser desenvolvidos os esquemas de utilização referentes a esse artefacto, no âmbito do trabalho com funções. Na segunda secção apresento alguns excertos relativos a momentos de discussão proporcionados por algumas tarefas propostas pela professora.

6.1. As primeiras aulas com a calculadora gráfica

6.1.1. Identificação de algumas teclas; Introdução da expressão analítica de uma função no editor de funções; Janela de visualização; Cálculo de imagens

Na **primeira aula** dedicada ao tema das funções a professora projetou, a partir do Portal da Matemática A[22], algumas indicações gerais sobre a utilização da

[22] http://www.mat.pt

calculadora gráfica, começando pela TI-84 *Plus*, e passando, posteriormente, para a CASIO CFX-9850GB *Plus*. As calculadoras dos alunos da turma correspondem a modelos iguais ou muito semelhantes aos que foram apresentados.

Figura 40 – Exemplo de imagens projetadas a partir do Portal da Matemática A.

A professora lê as indicações relativas à calculadora TEXAS e efetua alguns esclarecimentos. Foram referidos aspetos como: Teclas de introdução do sinal de menos e da operação de subtração; tecla de inserção da variável independente; teclas de deslocamento do cursor; tecla *2ND*, com particular destaque para o *INS*; edição da expressão analítica no editor de funções.

A professora salienta que, embora a tecla de introdução da variável independente tenha outras letras impressas, nas funções é sempre usada a letra *x*. Aconselha os alunos a irem tomando notas. O Francisco pergunta se só os professores é que podem aceder ao Portal e a professora responde que não: “Os alunos também podem, penso eu, pelo menos eu inscrevi-me normalmente!” (A1_10). Relativamente ao comando *INS* dá um exemplo:

> **Professora**: Por exemplo, escrevi $y = 2x + 4$ (escreve no quadro) mas a função que eu queria era $y = 2x^2 + 4$, não preciso de apagar tudo, basta colocar o cursor em cima da letra, fazer inserir, e inserir o expoente nessa altura. Se quiserem experimentem. (A1_10)

Enquanto a professora vai dando indicações, os alunos vão experimentando, mas, por vezes, não encontram logo as teclas pretendidas. A Helena e a Sofia experimentaram a funcionalidade *Insert* muito rapidamente, a Sofia exclama: “Oh! Que giro” (A1_10); já o Diogo e o Francisco passam algum tempo à procura:

> **Francisco**: Onde é que está o "inserir"?
> **Diogo**: Não sei.
> **Francisco**: Onde é que está o *insert*?
> **Diogo**: Estou à procura. (A1_10)

A professora dá particular realce à introdução da expressão analítica no editor de funções, embora os alunos que experimentaram a tecla *INS* já tenham recorrido ao editor de funções:

> **Professora**: Aceder à tecla *y* igual, agora é aquilo que nós queremos, escrever a expressão analítica de uma função. […] Neste ecrã podemos escrever a expressão algébrica de 10 funções diferentes, portanto tem da *y*1 até à *y*10, embora só sejam visíveis 7 opções, mas com o cursor é possível visualizar as restantes. Logo de início não veem todas mas há mais três hipóteses. Podemos obter o gráfico de várias funções em simultâneo. Para isso, basta selecionar as expressões ao mesmo tempo ou selecionar apenas uma das funções, para isso coloca-se o cursor sobre o sinal de igual e pressionar a tecla *enter*. (A1_10)

Apesar de a professora estar apenas a dar indicações para os alunos que possuem uma calculadora TEXAS, os restantes alunos, com calculadoras CASIO, tentam também acompanhar as indicações. Uma das alunas, com uma CASIO, exclama: "Mas não colocamos o *y*, o *y* já lá está" (A1_10). Nessa altura a professora decide projetar também indicações semelhantes relativas à calculadora CASIO, de modo a que todos os alunos possam seguir o exemplo.

Após a apresentação das informações correspondentes, relativas à CASIO, a professora solicita a todos os alunos que editem a expressão analítica da função presente na questão 1 da ficha de trabalho *Funções e Gráficos: Generalidades* (Anexo 10). Faz referência ao facto de na calculadora se usarem as variáveis *x* e *y*. Pede para não apagarem a expressão que tinham introduzido anteriormente, mas selecionarem somente $c = 2,54p$.

Um aluno chama a professora referindo que a sua calculadora não dá. A professora vai ao seu lugar e exclama que ainda não mandou fazer gráfico nenhum. Reclama por estarem a fazer mais rápido, pois acabam por não acompanhar o que está a dizer. O Diogo já tinha percebido como selecionar/desselecionar uma função, mesmo antes de a professora o ter explicado, pelo que foi ele que esclareceu o Francisco. No entanto, a Helena e a Sofia, como outros alunos, não acompanharam a explicação da professora, sendo necessário que esta fosse percorrendo as várias mesas para esclarecer as dúvidas:

> **Sofia**: Como é que isso se faz?
> **Helena**: Hemm …
> **Professora**: Então como é que eu disse há bocado? Como é que se selecionava? (Pausa) Então têm que colocar (pausa), esta aqui está selecionada, eu não quero esta ativa, não é? Fazemos *enter* e aparece apenas a outra. Só a outra é que está ativa neste momento. Há dúvidas?
> **Helena**: Ah! Mas com o azul *(2ND)*?
> **Professora**: Com o azul e este. Não, não é com o azul, é só no *enter*, na outra [calculadora] é que é no de cima. (A1_10)

Numa das mesas surge um problema relacionado com a ativação dos gráficos estatísticos nas calculadoras da marca TEXAS, tendo a professora aproveitado a oportunidade para chamar a atenção de todos os que possuem calculadora daquela marca para a necessidade de desativar a funcionalidade referente aos gráficos estatísticos, acabando, contudo, por ter que repetir o mesmo em vários grupos. Pede então que obtenham a representação gráfica, carregando em *DRAW* (*GRAPH*, nas TEXAS*)*. Há uma grande agitação: uma aluna diz que o seu não está a dar, outros alunos chamam a professora, alguns perguntam porque é que os gráficos ficam diferentes dos gráficos dos colegas. A professora diz que só mandou desenhar e não mexer em mais nada. Nessa altura salienta a importância da janela de visualização na representação gráfica devolvida pela calculadora:

> **Professora**: Ora bem, alguns gráficos, o que é que vos aconteceu? Alguns gráficos não apareceram, outros gráficos são diferentes do dela, como disse a Helena "porque é que o meu ficou diferente?" (As alunas riem), outros nem sequer aparecem. Mas todos os que veem, o que é que chegam à conclusão? Que se trata do gráfico de uma quê? (Os alunos respondem função) De uma função mas cujo gráfico é representado por o quê? Uma curva? Uma reta? O que é que vocês acham? (Os alunos respondem uma reta) Ora, porque é que não se vê? É o eu estava a dizer há bocado, que uma das, o mais importante nesta parte é vocês perceberem porque é que o gráfico não se vê, nalguns casos. Tem a ver, terá a ver com quê? Todos vocês, alguns já andaram a fazer experiências, andaram a carregar no *Zoom*, o que é que será que isso significa? (Alguns alunos respondem que o gráfico é aumentado) O que é que significa? Que mostrou

> o gráfico noutro sítio. Ora, é o que está a acontecer nas vossas. A janela que vocês aí têm não está adaptada ao gráfico que nós pretendemos ver. Ora, como é que nós neste momento acedemos à janela? É a primeira coisa, vamos tentar aceder à janela, é um dos passos mais importantes na calculadora. Em cada exercício vocês têm que adaptar o gráfico da função a uma janela conveniente, que esteja de acordo com os dados do problema. […] Vamos pegar na CASIO (pega numa calculadora de um aluno) e quero aceder à janela, *Window*, não é? Como é que nós vamos fazer? (Alguns alunos dizem *F3*) *Shift*, *shift* porquê? Porque nós queremos aceder à função que está a amarelo. Repete *shift*, *window*, aparece-vos valores, comparem com o colega do lado, todos vocês vão olhar para a janela do outro. (A1_10)

Os alunos experimentam e observam os valores que estão definidos para o retângulo de visualização. O Diogo e o Francisco têm a mesma janela de visualização definida e o Francisco exclama: "Temos resultados iguais Diogo, será que isso quer dizer que estamos certos?" (A1_10). A sua exclamação mostra como, na altura, o processo de representação gráfica na calculadora não era de todo transparente para o aluno.

A professora indica como podem alterar o retângulo de visualização, utilizando como referência os valores que se encontram na representação gráfica (questão 1 da ficha de trabalho):

> **Professora**: Só mandei comparar não disse que tinha que estar igual ao de nenhum. Nem sabemos qual é que está certo. Ora já viram na janela que lá está, que não temos a janela igual. Ora vamos então introduzir os dados na janela. Quais dados? Vamos alterar de modo a poder ver exatamente o gráfico assim. Como? O que é o nosso *x* neste caso? No caso da nossa função que está aí desenhada?
> **Aluna**: É o *c*.
> **Professora**: É o *c*. (Pausa) É o *c*?
> **Diogo**: Não.
> **Professora**: Vejam lá bem.
> **Diogo**: É o *p*.
> **Professora**: Ah! Bem me parecia. Então o que é que nós temos? Temos a expressão analítica, vamos à janela. Nós queremos que o nosso *x* varie entre que valores? Zero e?
> **Francisco**: Três.
> **Professora**: Zero e três. Eu quero ver exatamente o que aí está. Então vamos mudar a janela. O, *x*, vou pôr de zero a três, *x* mínimo, zero, e *x* máximo, três. Todos estão a cumprir aquilo que eu mandei? (A1_10)

A professora diz que não é necessário mudar a escala, parecendo que pressupõe que todos os alunos têm a calculadora com a escala igual a uma unidade ou então não atribui grande importância a essa funcionalidade:

> **Professora**: Na escala não vamos mexer agora, não é necessário. E depois no *y*, quais os valores do *y*? Zero e oito, vírgula oitenta e nove.
> **Carolina**: Ó *Stora* mas não chega lá!
> **Professora**: Não faz mal, mas para podermos ver o gráfico, como aí está. Mas também podiam fazer dez, não quer dizer que tenha que ser exatamente o que aqui está. (A1_10)

O Francisco não percebe que *slc* significa escala e questiona a professora, que esclarece referindo que fica igual, apesar de não ser referido o seu valor. Em seguida, pede para efetuarem a representação gráfica na máquina:

> **Francisco**: *Stora* e em relação aqui ao *scl*, fica igual?
> **Professora**: Fica, a escala é a mesma.
> **Francisco**: Ah, é a escala.
> **Diogo**: *scl*, não sabíamos que era a escala. Também podia lá estar outra coisa.
> **Professora**: Já todos conseguiram fazer? Mandem desenhar o gráfico agora. Não mexam em mais tecla nenhuma.
> **Carolina**: Como é *Stora*?
> **Professora**: Então, como fizeram há bocado.
> **Francisco**: Clica na parte do gráfico. (A1_10)

Volta a haver uma certa agitação. Um aluno chama a professora e esta questiona-o se a sua calculadora está de acordo com o que tinha sido pedido, pois este já havia deslocado o cursor e alterado o retângulo de visualização:

> **Professora**: Eu disse para não fazerem mais nada, senão não consigo avançar. É assim, não podem estar …, chiu. Todos viram um gráfico igualzinho ao da ficha? (Os alunos respondem sim, a professora continua a ver em cada mesa). Posso? É importante ver que agora o gráfico está feito na janela que eu queria e, que esta é uma janela conveniente para esta função, porquê? Porque nós estamos a falar de polegadas, no mínimo zero, não é um número negativo, portanto não nos interessa ver o gráfico, ver o que se passa para o *x* negativo. Da mesma maneira, também não nos interessa ver, ver a outra unidade (uma aluna diz os centímetros), os centímetros negativos, não é? Por isso, daí que o gráfico esteja adaptado para essa janela que nós escolhemos, que é a janela que está aí. Não podem depois de

> ter feito o gráfico andar com o cursor para a direita e para a esquerda porque estão a alterar a janela, que é o que se está a passar aqui com alguns casos. Aliás eu disse para vocês terem calma, seguirem exatamente o que eu estava a fazer mas vocês, como é o caso de alguns alunos, já alteraram a janela, já não estão a ver o gráfico onde eu mandei. Já se viu que basta andar com o cursor para alterar a janela, o que às vezes pode ser conveniente, não neste momento em que eu estou a explicar, certo? (A1_10)

Em seguida a professora indica aos alunos como podem calcular a imagem de um dado valor da variável independente, recorrendo à máquina. Começa por mostrar como se faz na CASIO enquanto vai efetuando os procedimentos na calculadora de um aluno:

> **Professora**: Ora quero calcular as abcissas de alguns pontos desse gráfico. Como é que nós vamos fazer? Quero saber, quero saber quando o *x*, quando o nosso *x*, estou a falar exatamente do primeiro valor que aí nos aparece, se o *x* for zero, vírgula cinco quanto é o *y*? Vamos ver se o *x* for zero vírgula cinco quanto é o *y*. Ora o que é que nós fazemos, na CASIO há uma tecla, tudo se explica ali [Portal da Matemática A], tudo, eu depois daqui a um bocadinho dou-vos o endereço para experimentarem em casa, só não estou agora a passar porque é quase igual e demoraria mais tempo. Portanto, se o *x* for zero, vírgula cinco quanto é o valor do *y*? Há aí uma tecla que é, resolver as condições, que é o *Gsolv*, para aceder a essa tecla o que é que eu tenho que fazer? (Os alunos respondem *shift F5*) *Shift*, *F5*, e agora apareceu-nos o quê?
> **Manuel**: *Root*, máximo, mínimo, …
> **Professora**: A vossa é diferente, já lá vamos (para os que têm TEXAS). Então vamos lá tomar atenção, aparece-nos zeros, máximos, mínimos, intersecções e depois setinha para andar para a direita, quando vocês andam para a direita, todos andaram para a direita? O que é que vos apareceu neste momento? António, diz lá o que é que apareceu?
> **António**: *xcal*, *ycal* e …
> **Professora:** Exatamente, aparece *xcal*, *yca*l e outro símbolo que vocês não conhecem e que tem a ver com a derivada que não é do programa deste ano. Eu quero saber, *x* é zero, vírgula cinco, eu sei que (escreve no quadro), se o *x* for zero, vírgula cinco quero saber quanto é o valor do *y*? Ora, então vamos lá ver quanto é o valor do *y*.
> **Aluno**: Tem que se por *ycalc*?
> **Professora**: Queremos calcular o quê? O *y*, então temos que por *ycal*, sim. Agora, *ycal*, e aqui perguntava-vos qual o valor de *x*. Têm que, qual é? (respondem 0,5) (A1_10)

Seguidamente passa a explicar os procedimentos na calculadora TEXAS:

> **Professora**: Então vá. […] Bem, então o que é que nós queremos? Há também aqui uma tecla, segunda função cálculo, segunda função *calc*, estão a ver? Todos viram? (Pausa) Nesta é diferente, na CASIO aparece em baixo todo aquele menu, aqui não, nós vamos escolher aquilo que nós queremos agora. O que é que nós queremos calcular?
> **Sofia**: O valor de *y*.
> **Professora**: O valor de *y*, então é o valor (acentuando). Então em que tecla é que vamos carregar? (Uma aluna responde na 1) Na um, então vá experimentem. (A1_10)

Os alunos experimentam, tanto o grupo da Helena e da Sofia como o do Diogo e do Francisco, questionam se é necessário carregar no *enter*.

> **Helena**: Temos que carregar no *enter*? No *enter*? *x* igual a zero, vírgula cinco, (pausa). Oh! Que lindo. Ohhhh! Um, vírgula vinte e sete.
> **Professora**: O que é que apareceu no *y*?
> **Helena**: Um, vírgula vinte e sete.
> […]
> **Diogo**: Temos que carregar onde *Stora*, *enter*?
> **Francisco**: É *enter*.
> **Diogo**: É *enter*?
> **Professora**: Quanto é que vos deu o *y*? Um, vírgula vinte e sete, era o que nós queríamos que aparecesse ou não de acordo com o gráfico (alguns alunos dizem que sim)? Ora experimentem para outros pontos, vá. (Pausa) Experimentem para outros pontos. Utilizem valores que aparecem aí nos vossos dados, no exemplo, só por uma razão, têm certeza que está correto. (A1_10)

Num dos pares gera-se uma certa confusão. Uma das alunas queria calcular a imagem de um valor de *x* superior ao valor máximo definido no retângulo de visualização para a variável independente, e obteve mensagem de erro. O aluno da mesa da frente percebe logo a que se deve a mensagem de erro. A professora aproveita para chamar a atenção de todos os alunos:

> **Professora**: Ora, posso? Saber o que é que se passa aí? Rita o que é que se passa?
> **Rita**: Coloquei *x* igual a quatro e deu erro.
> **Manuel**: Então se isso só vai até três não pode dar quatro.
> **Aluno**: Claro!
> […]

> **Professora**: Ora vamos lá ver porque é que agora aconteceu aqui uma coisa. No caso da Rita, escreveu *x* igual a quatro. E no caso de *x* igual a quatro apareceu-lhe o quê?
> **Manuel**: Erro.
> **Diogo**: *Incorret!*
> **Professora**: Então experimentem (pausa, alguma agitação). Só temos o gráfico de zero até três. Não está definido, porquê? Porque o *x* só vai de zero até três.(A1_10)

O Diogo chama a professora pois em vez de carregar *value*, enganou-se e carregou em *maximum*. A professora refere que a máquina dará a indicação que não existe máximo mas o aluno diz que a máquina devolveu um valor. A professora sugere então que a calculadora devolve o máximo no intervalo onde está definida, mas, de facto, a máquina devolve um valor no intervalo definido para o cálculo do máximo. Seria interessante discutir o valor obtido pelo aluno e a diferença entre as duas máquinas, já que a calculadora CASIO, se a função for crescente na janela definida, devolve mensagem de erro no cálculo do máximo. No entanto, talvez por ainda não ter abordado a definição de extremos, a professora não explora a situação, deixando a ideia que a máquina devolve o máximo para a função no intervalo onde está definida: “Ela dá o máximo que tem naquele intervalo, porque está definida naquele intervalo” (A1_10).

A professora finaliza a primeira aula com um resumo do que viram relativamente ao uso da calculadora gráfica e menciona ainda que a funcionalidade *Gsolv* (CASIO) ou *Calc* (TEXAS) permite determinar pontos e outras propriedades das funções como zeros, máximos, mínimos, etc.

Na segunda aula os alunos usaram a calculadora gráfica para visualizar a representação gráfica da função $y = x^2$. Alguns alunos já não sabiam onde deviam editar a expressão analítica da função. A professora pretende, novamente, salientar a importância da janela de visualização na representação gráfica devolvida pela máquina.

> **Professora**: Ora, todos vocês estão a ver o gráfico? (…) Então vamos lá tomar atenção. Nalguns casos, o Afonso agora perguntou-me e muito bem, se o gráfico que ali lhe apareceu na calculadora, apareceu-lhe na calculadora este gráfico, aliás na maioria de vocês apareceu este gráfico, apareceu este gráfico só (representa no quadro apenas o ramo direito da parábola). […] E o Afonso perguntou-me, posso falar eu? Então não quero ouvir ninguém. Isto não tem a ver com a janela que introduzimos na última aula?
> **Francisco**: Tem.

> **Professora**: Tem, porquê? Na última aula num exercício, nós tínhamos estado a introduzir, o que é que vos apareceu? Qual era a janela que nós tínhamos? Tratava-se de polegadas, a relacionar com centímetros, e tínhamos definido o x mínimo, nem foi bem isto (aponta para a representação feita no quadro), porque não vos aparecia o eixo dos *yy* para baixo.
> **Diogo**: O x mínimo era zero e o x máximo era três.
> **Professora**: Mínimo e máximo, zero, mínimo zero, mínimo do x e mínimo do y. Será que esta janela está adaptada, adaptada à função que nós estamos a estudar neste momento?
> **Diogo e Francisco**: Não.
> **Professora**: Houve aí outro caso que eu já vi que o gráfico deu outro tipo de função, não é?
> **Tatiana**: Uma parábola.
> **Professora**: Deu o quê? Uma parábola, diz a Tatiana. Porquê? Porque ela tem o gráfico numa outra janela. Então agora vocês vão pensar o que é que vão alterar para aparecer outro gráfico, de facto para esta função. (A2_10)

A professora incentiva os alunos a procurarem uma janela de visualização que se adeque à função em estudo. Estes alteram a janela, mas, desta vez, cada um escolhe os valores que entende para o retângulo de visualização.

A professora faz um esboço da representação gráfica, no quadro, e questiona a turma:

> **Professora**: (Para a turma) O que é que vocês estão a ver? Estão a ver um gráfico desta forma? (Os alunos respondem que sim)
> **Professora**: Quem é que não está a ver?
> **Aluna**: Eu (a professora vai ao pé da aluna). […]
> **Professora**: Já viram aquele gráfico que está ali no quadro? Todos viram o gráfico? Então reparem, vamos lá agora então concentrarmo-nos outra vez. Neste exercício (espera que os alunos se calem), neste exercício apareceu-nos logo um problema no início. A janela que tínhamos, do exercício anterior, não se adaptava a este problema. […] Porque não nos aparecia a parábola, aparecia apenas um dos ramos, o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola, não é? […] Mas agora, digam-me um exemplo de uma janela que se adapte a este gráfico.
> **Diogo**: Dez, menos dez.
> **Professora**: Mas menos dez, o quê?
> **Diogo**: No x.
> **Professora**: x mínimo (escreve no quadro), menos dez, x máximo, dez, y mínimo, menos dez, e y máximo dez. Nesta, neste ecrã eu consigo ver o gráfico. Nesta janela de visualização, que se pode indicar assim, como também podem escrever assim, podiam ter indicado aqui os valores todos ou podem escrever,

> retângulo de visualização, o *x* varia, neste exemplo de menos dez a dez, e o *y* de menos dez a dez, dá para ver. (A2_10)

A professora pede em seguida para os alunos determinarem a imagem de menos quatro, sem recorrerem à expressão analítica da função. O Francisco responde de imediato: “Vamos a calcular valor” (A2_10), contudo, o Diogo não entende bem o que a professora pretende e questiona: “Sem expressão analítica?” (A2_10). A professora explica que pretende que utilizem a máquina e que não façam cálculos.

À medida que os alunos vão participando na atividade vão esclarecendo alguns tipos de erro que podem surgir e aprendendo a distinguir em que calculadoras tais erros se verificam. O Francisco obteve mensagem de erro ao tentar determinar a imagem de menos quatro:

> **Francisco**: Queremos saber o quê? Menos quatro?
> **Professora**: A imagem de menos quatro.
> **Francisco**: *Stora*, agora é *enter*?
> **Professora**: É.
> **Francisco**: Uau! (obteve erro)
> **Professora**: Faça, vá ver qual foi o erro que cometeu.
> **Diogo**: Foi aqui, se calhar o menos não puseste sinal.
> **Professora**: O sinal! (Em voz alta para toda a turma) Ora cuidado, o Francisco acabou de cometer aqui um erro para o qual se chamou a atenção na outra aula. Ele escreveu menos quatro, sinal de menos, como sendo o sinal de operação, e máquina disse-lhe que tinha um erro. Ela fala connosco (ri).
> **Francisco**: (O aluno emenda o sinal) Mas a mim dá igual! *Stora*, dá igual!
> **Diogo**: Carrega no um, carrega valor … (A2_10)

O aluno altera a notação, colocando o sinal de menos, no entanto, volta a obter mensagem de erro. Na altura a professora já estava junto de outro grupo mas o Francisco volta a chamar:

> **Francisco**: *Stora*, não dá na mesma.
> **Diogo**: Estragaste a tua calculadora Francisco.
> **Professora**: (Volta ao pé do aluno) Diga lá, Francisco.
> **Diogo**: Carregaste no *Shift*, quando fizeste aqui calcular?
> **Francisco**: Yah!
> **Professora**: Valor, sim. Menos quatro. (Dá erro).
> **Diogo**: Não carregaste no *Shift*! (A2_10)

Teria sido útil descodificar a mensagem de erro, já que, poderia logo dar uma indicação acerca do tipo de erro, mas isso não é feito pelos alunos e a professora parece também não dar grande relevância à mensagem de erro devolvida pela máquina. No caso do sinal de operação em vez do sinal de menos, a mensagem que ocorre, na calculadora TEXAS, é "*ERR: SYNTAX*", enquanto o erro devido ao pedido de cálculo de uma imagem cujo objeto não pertence ao intervalo definido na janela de visualização é "*ERR: INVALID*". A professora pergunta então se a janela estará correta e o Diogo percebe logo o que falhou:

> **Professora**: A janela estava correta?
> **Francisco**: Acho que sim.
> **Diogo**: Não, já sei, tu puseste uma janela de menos três!
> **Professora**: Veja a janela que aqui tem!
> **Francisco**: É verdade, é verdade.
> **Professora**: Porque é que acha que não deu, então?
> **Francisco**: Porque não há, porque não está dentro dos valores. (A2_10)

Já na aula anterior havia ocorrido um erro semelhante a uma das alunas, contudo, a professora aproveita para chamar novamente a atenção da turma para os erros cometidos pelo Francisco. Refere, por exemplo, a propósito do segundo erro cometido pelo aluno:

> **Professora**: Ora, teve que pôr o sinal correto, o menos quatro como o sinal do número. E agora continuou a aparecer um erro! Porquê? Porque ele tinha a janela de menos três até três, no *x*, ora se eu pergunto o de menos quatro, a máquina não sabe! Porquê? A função estava definida aonde? De menos três a três, não estava definida no menos quatro. (A2_10)

Seguidamente, a professora refere que a função tem um zero e questiona os alunos sobre o que isso poderá significar e como o poderão determinar recorrendo à calculadora. Uma das alunas dá a definição e a Helena indica o seu valor. A professora insiste de modo a realçar uma das funcionalidade da máquina que permite determinar os zeros:

> **Professora**: Há outra coisa que nós pudemos ver neste caso, no nosso exemplo […] (Escreve no quadro *y* igual a *x* quadrado), No nosso exemplo, esta função, neste caso, a nossa função tem também um, um zero. O que é que será um zero da função?

Tatiana: Quando toca.
Professora: Quando o quê?
Tatiana: Quando toca no eixo do *x*.
Professora: Quando intersecta o eixo do *x*, sim! Um zero da função, vamos ver melhor na próxima aula, mas um zero da função é quando a função intersecta o eixo do *x*. Chamam-se zeros da função. Ora, como calcular o zero?
Helena: Quando *x* é zero.
Professora: Neste caso via-se logo, mas vamos aprender na próxima aula, há outros exemplos, mas como calcular o zero?
Aluno: É a intersecção de …
Professora: A intersecção com o eixo dos *yy*, podia ser. Ou, como? Como é que está a dizer? A própria calculadora também diz zero, vão lá ver.
Diogo: Com o *Trace*?
Professora: Quando vocês vão ao *Gsolv*, aparece lá o quê em primeiro lugar?
Aluno: *Root*.
Professora: São zeros. *Root*, zeros! (A2_10)

Naquele caso, o zero é também um mínimo relativo, pelo que a professora sugere que encontrem outra funcionalidade no menu *Calc* (*Gsolv*) que permita obter o zero da função:

Professora: […] *Maximum* o que é que quererá dizer? Máximo. E mais, o que é lá que aparece? Mínimo. O que é que eu podia olhar para aquela função e procurar também? Neste caso? Olhem para este gráfico (aponta para o quadro).
Francisco: Não estou a perceber nada.
Professora: Para além de tocar o eixo do *x*, também tem um quê?
Aluna: Um máximo.
Professora: Tem um máximo? Onde é que ele está? Onde é que está, Ana Filipa?
Aluno: Num valor maior.
Professora: Num valor maior? Acha? Se eu mudar a janela e puser um valor maior as imagens não vão sendo cada vez maiores?
Aluna: Sim.
Professora: Vão? Então acha que tem ali um máximo?
Aluna: Não!
Professora: Então tem um quê?
(Alguns alunos respondem um mínimo)
Professora: Tem um mínimo, que naquele caso é zero. A calculadora também vos permite chegar a esse mínimo. (A2_10)

Estas indicações foram dadas já no final da aula, e portanto, os alunos já não tiveram oportunidade de determinar efetivamente o zero recorrendo à máquina. Por vezes, o facto de existirem na turma duas marcas diferentes de calculadoras, com diferentes notações, provoca alguma confusão. O Diogo, por diversas vezes, tentou chamar a atenção da professora, pois não conseguia encontrar o menu pretendido – *Gsolv* – que não tem essa denominação na sua calculadora:

> **Diogo**: (Desta vez mais alto) *Stora*, onde é que é o *Gsolv* ou o que é que a *Stora* estava a dizer?
> **Professora**: Aí nessa não! É no *Calc* que aparece a listagem de tudo.
> **Diogo**: Hamm. E depois temos que fazer o quê?
> **Aluno**: Tens que instalar programas e depois … (referindo-se à calculadora TEXAS).
> **Professora**: (Vai à mesa do aluno) Zeros, máximos e mínimos. (A2_10)

Nas duas primeiras aulas dedicadas ao tema das funções os alunos tiveram oportunidade de trabalhar um pouco com a calculadora gráfica, começando o processo da génese instrumental. Por um lado, foram sendo atribuídos significados a algumas teclas, iniciando-se assim o processo de instrumentalização, e, simultaneamente, começaram a desenvolver-se alguns esquemas de utilização, dando início ao processo de instrumentação, tais como, a procura de uma janela de visualização adequada à representação gráfica de uma função e a influência da janela de visualização na determinação de coordenadas de pontos pertencentes ao gráfico quando é utilizado o menu *Calc* ou *Gsolv*.

A calculadora não foi utilizada nas duas aulas seguintes, embora no **final da quarta aula,** quando uma aluna sugeriu o recurso à máquina para determinar o zero de uma função, a professora tenha realçado o facto de ser necessário a expressão analítica da função, caso se pretenda utilizar este recurso para determinar, por exemplo, os zeros de uma função:

> **Professora**: Vocês olhando para o gráfico, na *g*, qual é o zero da função *g*? […] Será que não há maneira de vocês saberem?
> **Diogo**: Há, razão de semelhança. Uma razão de semelhança e um Teorema de Pitágoras.
> **Rita**: Há, com a máquina.
> **Professora**: Como?
> **Rita**: Com a expressão analítica.

Professora: Onde é que ela está? A expressão analítica?
Rita: Sim, não temos a expressão analítica.
Professora: Ah, pois não! (A4_10)

Este diálogo veio realçar a necessidade de se conhecer a representação algébrica para ser possível recorrer à calculadora para determinar imagens, zeros ou outras propriedades da função.

6.1.2. Resolução gráfica de condições

No **final da quarta aula**, quando corrigem uma tarefa do manual, a professora refere que também se podem resolver equações graficamente utilizando a calculadora:

Professora: Este tipo de condições também pode ser resolvido com a calculadora.
Diogo: Pois.
Professora: Se desse a expressão analítica da função, o que é que nós teríamos que pensar? Na próxima aula vamos fazer isso, com uma função. O que é que nós teríamos que fazer aqui, neste caso?
Francisco: Representávamos o gráfico, depois …
Professora: Representávamos a função e depois?
Diogo: Fazíamos a reta.
Francisco: Não, íamos calcular o valor. (A4_10)

A sugestão do Francisco, calcular o valor, não é considerada, no entanto, valeria a pena discuti-la já que na calculadora TEXAS, no menu *Calc*, não existe a opção de, sabendo o *y*, obter o valor de *x*, como existe no menu *Gsolv* da calculadora CASIO. O Diogo conseguiu facilmente transferir o esquema desenvolvido para resolver condições a partir da representação gráfica no papel para a calculadora gráfica, referindo que representavam a reta e determinavam os pontos de interseção das duas representações gráficas:

Diogo: A reta que intersectava a função …
Professora: Fazíamos a reta, é verdade. Como? Que reta?
Diogo: *y* igual a dois.
Professora: *y* igual a dois e depois o que é que fazíamos a seguir?
Diogo: Depois a seguir, os pontos de intersecção.

> **Professora**: O ponto de intersecção. Vamos fazer amanhã um exemplo, de uma situação com a calculadora, neste caso. Com o gráfico anterior do exercício de cima. (A4_10)

Na **aula seguinte** (A5_10), por indicação da professora, os alunos resolveram um problema do manual, recorrendo à calculadora gráfica (Anexo 12). Nessa altura tiveram oportunidade de resolver equações graficamente e experimentar algumas das funcionalidades vistas nas aulas anteriores. A professora começou por ler o enunciado e questionar os alunos sobre o que fazer em primeiro lugar:

> **Professora**: Então vamos utilizar a calculadora para fazer o exercício catorze. (Lê o enunciado, até à questão 1) Primeiro que tudo vamos tentar perceber o que é que nos dão no enunciado. Dão-nos a expressão, não é? E depois pergunta a quantos metros do solo estará o saco três segundos após ter sido largado? Podia-se fazer analiticamente mas também se pode fazer com a calculadora. Vamos fazer com a máquina, agora. (Pausa) Então o que é que vão fazer, em primeiro lugar?
> **Aluno**: Inserir a expressão.
> **Professora**: Inserir a expressão analítica na calculadora. Todos vocês se recordam como é que se faz? (Uns alunos respondem não, outros sim) (A5_10)

A professora deixou os alunos explorarem um pouco sozinhos, e estes começaram por compreender que os esquemas de utilização incluem sempre a procura de uma janela de visualização adequada à função em estudo, ou ao problema que se pretende resolver. Começa a haver muita agitação, com os alunos a perguntarem se o gráfico é assim, outros a reclamarem que não dá nada. A professora interveio:

> **Professora**: (Em voz alta) Oiçam lá uma coisa. Analisem o problema, o que é trata o problema, o que é que aconteceu neste problema? O que é que o enunciado nos diz? (Um aluno diz que o saco foi lançado) Mas o saco o quê? Foi lançado donde? Ora, o saco foi lançado lá de cima de um balão. Que tipo de gráfico é que vocês esperam que vos apareça? É que vocês aceitaram de bom grado todos os gráficos que a calculadora vos mostrou! (A5_10)

A professora questiona os alunos acerca do tipo de representação gráfica que esperam obter tendo em conta o contexto da situação referida no problema, no entanto, a situação não envolve apenas noções matemáticas, mas, também, noções de física, que foram levantados por alguns alunos, tais como, a resistência do vento e a velocidade a que o balão cai, pelo que a discussão acaba por não ser muito produtiva. A professora desvia a discussão para a janela de visualização, mas sem evocar aspetos particulares da física:

> **Professora**: Então mas o que é que nós temos que procurar ver? Primeiro, será que a janela que vocês estão a ver, está adaptada ao problema? (Alguns respondem não). Não? Porquê? (Pausa) Então o *x* variará entre que valores?
> **Aluno**: Zero e duzentos.
> **Diogo**: Não! O *x* entre os valores …
> **Professora**: O *x*, ou seja, o tempo.
> **Diogo**: Zero e dez.
> **Aluna**: *Stora*? Que valores é que pomos na janela?
> **Professora**: É isso que eu estou a perguntar! Agora, entre que valores varia o *x*?
> **Francisco**: Deixa ver …
> **Diogo**: (Para o Francisco) Tu tens *x* negativo.
> **Professora**: E não pode ser, pois não?
> **Diogo**: Pois não.
> **Francisco**: Não vale a pena.
> **Professora**: Pois não!
> **Diogo**: Entre zero e dez.
> **Professora**: Então que valores é que vocês têm que pôr na janela?
> […]
> **Professora**: Não sabemos quanto tempo, o tempo é dado em quê? No enunciado o tempo é dado em quê? (Vários respondem segundos) Segundos, podemos experimentar agora uns valores, experimentem um valor qualquer no *x*, mas também temos que pensar o valor do *y*. Qual é o valor mínimo para o y? (Vários respondem zero).
> **Professora**: Zero! Porque é quando acontece o quê?
> **Francisco**: Quando cai no chão.
> **Professora**: Quando toca no chão. Exatamente. E o máximo? (Vários respondem duzentos).
> **Francisco**: Pelo menos duzentos.
> **Professora**: Duzentos, diz a Helena. Porquê? (A5_10)

Ao responder à questão colocada pela professora, a Helena refere-se à imagem de zero como se a função fosse representada por uma reta e a professora corrige a linguagem utilizada:

> **Helena**: Porque o *b* é duzentos, a ordenada na origem é duzentos.
> **Professora**: Trata-se de uma reta? O gráfico, esta função é uma reta?

> **Helena**: Não.
> **Professora**: *x* ao quadrado, (emenda) menos cinco *x* quadrado, mais duzentos, será uma reta? (Os alunos ficam calados) Já viram alguns casos destes no nono ano, embora não se tratasse bem dessas funções. O gráfico não vai ser uma reta, é o valor do *y* quando o *x* é zero, é verdade, mas não se chama aqui ordenada na origem. Vamos ver depois quando falarmos deste tipo de funções que são as funções quadráticas. Contudo agora vamos ver com a calculadora apenas o que se passa. Portanto, a Helena diz que, pelo menos duzentos. E é verdade, porquê?
> **Francisco**: Porque o balão está a duzentos metros de altura.
> **Professora**: Porque no início, quanto o *t* for zero, de facto, está a duzentos metros, duzentos, é em metros? (Os alunos respondem que sim) Sim, a duzentos metros de altura. Então pronto, o *y* máximo, temos que colocar pelo menos duzentos, um bocadinho mais, podem pôr. Ora, vejam agora o que é que vos apareceu? Que tipo de gráfico é que vos apareceu? (Alguns alunos respondem igual) Semelhante a este gráfico que eu tenho aqui, é verdade, ou não? Então de facto, este gráfico adequa-se ou não ao contexto do problema? (Os alunos respondem sim) Então a primeira coisa que vocês têm de fazer é ver se o gráfico que a máquina vos apresenta é adequado, a máquina não sabe o que é que vocês querem, a máquina deu-vos o quê? Um gráfico desta função desenhado numa outra janela, em que não estavam a ver tudo, o retângulo de visualização não estava adaptado e para além disso também mostrou o quê? Vocês viram o gráfico, alguns viram só algumas partes da curva que pareciam quase umas retas. Não podem aceitar de bom grado, e agradecer muito bem à máquina que vos entregou o gráfico (os alunos riem). Não é? (A5_10)

Este problema permitiu reforçar o facto de ser essencial uma boa escolha da janela de visualização para uma utilização eficaz da calculadora gráfica, sendo uma das primeiras etapas em qualquer esquema de utilização referente ao uso da calculadora no âmbito das funções. A professora conduziu a discussão para aspetos do contexto, relacionando-os com os valores a atribuir a cada uma das variáveis. Além disso, estabeleceu conexão entre a representação gráfica e a algébrica, referindo que a representação gráfica de uma função quadrática não é uma reta, embora a representação gráfica na calculadora, em determinadas janelas, assim possa parecer. Em seguida, pediu aos alunos para fazerem um resumo dos procedimentos efetuados:

> **Professora**: Então o que é que nós tivemos que fazer em primeiro lugar? (Os alunos ficam calados) O que é que fizemos em primeiro lugar?
> **Francisco**: A janela.

> **Professora**: Não, primeiro que tudo?
> **Diogo**: A expressão, analítica.
> **Professora**: Introduzimos a expressão analítica. E a seguir?
> **Aluna**: A seguir adaptámos a janela.
> **Professora**: Procurámos um retângulo de visualização, uma janela, adaptada ao problema. Qual é que foi o retângulo que nós utilizámos? (Escreve no quadro, os alunos ditam). Ora o *x* varia de zero a dez e o *y* de zero até duzentos. Primeiro que tudo têm de encontrar uma janela que se adeque ao contexto do problema. Agora é que se pode responder às questões, certo? Vamos escrevendo isto no caderno também, registando, uma janela que se adeque ao problema, é necessário encontrar sempre a janela. (A5_10)

Passou-se então a responder às questões da tarefa. Relativamente à primeira os alunos não demonstraram qualquer dúvida, cada um respondendo de acordo com as marcas das suas calculadoras gráficas. A professora questiona, então, os alunos sobre o modo de resolução analítica e efetua os cálculos no quadro. Um aluno pergunta-lhe como é que deveria justificar se estivesse a responder a um teste:

> **Professora**: Diz lá se é analiticamente ou graficamente. No caso de ser graficamente, explica o que é que fez mas, mas aparecem outro tipo de exercícios, não sendo assim situações tão simples quanto isto. (A5_10)

A segunda questão veio salientar uma das diferenças entre as duas marcas de calculadoras utilizadas na turma, já que na TEXAS não é possível determinar diretamente, no menu *Calc*, o valor de *x* para um dado valor de *y*:

> **Professora**: Ao fim de quanto tempo o saco atinge o solo? Ora querem um valor aproximado e outro exato. O que é que a calculadora vos diz, como é que é que vão procurar, para já, e o quê?
> **Aluna**: *y* igual a zero.
> **Francisco**: *Stora*, como é que metemos aqui …?
> **Professora**: Colocar zero no *y*, é uma das formas, ou o quê?
> **Helena**: Como é que nós colocamos o zero?
> **Francisco**: *Stora*, não dava para fazer com *Calc*, em vez de ser *x* igual, metermos *y* igual?
> **Professora**: Não, nessa não dá.
> **Francisco**: Não dava? […] Quero uma CASIO! (A5_10)

Esta alínea conduz à determinação dos zeros. Em primeiro lugar a professora questiona sobre o que se pretende e o que isso significa matematicamente.

> **Professora**: Como é que vocês resolveram esta alínea?
> **Helena**: Zero, igual, a menos cinco *t* ao quadrado, mais duzentos.
> **Francisco**: Hum?
> **Professora**: Então foi fazer analiticamente?
> **Helena**: Não depois …
> **Professora**: É o que tem que fazer. É isso que está a dizer? Está a dizer o que tem que fazer. A Helena diz que tem que igualar a função a zero, e que não sabe como fazê-lo nesta calculadora (TEXAS).
> **Francisco**: Nem eu.
> **Professora**: Ora o que é que será igualar a função a zero? É achar o quê da função?
> **Francisco**: (Baixinho) A ordenada na origem.
> **Diogo**: Diz, Francisco.
> **Francisco**: Não, não é. É ao contrário.
> **Professora**: (Alguém diz zeros) Eu já ouvi. Ah, Pois! É ver os zeros da função.
> **Francisco**: Era ao contrário.
> **Diogo**: Estava quase.
> **Professora**: (Escreve no quadro) É achar os zeros, é verdade. Também se podia ir, pelo mesmo menu procurar, saber o valor do *x* quando o *y* era zero, nesta calculadora (CASIO). […] Queremos achar os zeros, o que é que a máquina nos diz? Quanto aos zeros? Quais os zeros da função? Que valor é que obtiveram?
> **Aluno**: Arredondado?
> **Professora**: Um valor aproximado, é qual?
> **Aluna**: Seis, vírgula três.
> **Professora**: Seis, vírgula três, pede-se um valor aproximado à décima. (A5_10)

A aluna que interveio possui uma calculadora CASIO que, carregando em *root*, dá logo o valor aproximado do zero da função. No entanto, nas calculadoras da marca TEXAS é necessário os alunos definirem um intervalo que contenha o zero, em seguida, dar à máquina um palpite – *guess* e só depois é que esta devolve o valor do zero. Talvez por isso alguns dos alunos que possuem esta marca, como é o caso dos quatro alunos em que incide a recolha de dados, não tenham conseguido obter um valor ou completar os procedimentos. A Helena, ao ouvir o valor indicado pela colega exclama: “Hum? Não me deu nada disso” (A5_10), também o Diogo e o Francisco se questionam: “Mas como é que se faz?” (A5_10). A professora, inicialmente, não parece dar conta da dificuldade destes alunos pois avança para o modo analítico. Nessa altura o Francisco questiona a professora acerca da possibilidade de determinar a interseção com a reta de equação $y=0$, mas esta refere que na próxima alínea terão oportunidade para ver como isso se faz. Só quando uma aluna que possui TEXAS volta a referir que não está a perceber como se faz, é que a professora dá conta que os alunos com esta marca estão com dificuldades:

> **Francisco**: Ó *Stora*, nesta calculadora podemos fazer a intersecção?
> **Professora**: Podemos. Mas para achar os zeros também podíamos ter feito, sim, com a reta *y* igual a zero.
> **Francisco**: Como é que se faz uma intersecção?
> **Professora**: Mas esse exercício vem já a seguir.
> **Carolina**: (Também tem TEXAS) *Stora*, eu não percebi como é que se faz.
> **Professora**: O quê?
> **Carolina**: O exercício.
> **Professora**: Não sabe achar os zeros com a calculadora?
> **Diogo**: Eu também não! Porque ela tem TEXAS.
> **Aluna**: Mas dá para fazer com a calculadora? Pensei que era fazer y igual a zero.
> **Professora**: Mas vou agora fazer também.
> **Diogo**: Ó *Stora* mas dá na TEXAS para achar os zeros?
> **Professora**: Dá!
> **Diogo**: Então e como é que isso se faz?
> **Professora**: Ah! Não sabem é determinar mesmo os zeros.
> **Diogo**: Não!
> **Helena**: Não, *Stora*! É isso!
> **Professora**: Então mas está aí uma tecla que diz zeros! (A professora vai para junto do Francisco e do Diogo) Onde é que está a tecla calcular valor, diga-me lá! (Pausa, os outros alunos estão agitados) O que é que diz aqui? Zero! Então vá. (A5_10)

A professora explica os procedimentos ao Diogo e ao Francisco e pede-me para ir ao pé da Helena e da Sofia que também têm calculadora TEXAS. A Helena e a Sofia entretanto mostram às colegas da mesa de trás os procedimentos a efetuar. Como não são muitos os alunos com calculadora dessa marca os procedimentos não são indicados a toda a turma, embora a professora exclame: “Têm que colocar um bocadinho antes e um bocadinho depois. Quem tem TEXAS está a ter mais dificuldades” (A5_10).

6.1.3. Menu tabela

A alínea a) da questão 3 do problema 14 (Anexo 12) do manual conduziu à introdução do menu tabela. A professora informa os alunos acerca da possibilidade de obter várias imagens e vai-se deslocando pelas mesas:

> **Professora**: […] Pede-se agora para construir, a função é *y* igual a *d* de *t*, e pede-se para construir um quadro de valores. A calculadora também tem outros menus para além do menu gráfico. Tem outro que me permite ver um quadro de valores desta função: que é a tabela. Na tabela nós conseguimos ver valores (pausa), sem estarmos exaustivamente, como estamos agora a fazer, a calcular a imagem de, a imagem de …, vamos à calculadora, a um outro menu, em que nos permite ver ao mesmo tempo uma tabela com vários valores. Ora, esse menu na calculadora chama-se exatamente *tabela*.
> **Francisco**: *Table*.
> **Professora**: Vamos à tabela ver (pausa), valores desta função. (Vai junto a um aluno) Com licença (utiliza a sua calculadora). Menu tabela. Já apagou a expressão analítica. Não apaguem nada! […] Ora, quem é que já conseguiu ir ao menu das tabelas?
> **Diogo e Francisco**: Eu.
> **Diogo**: Deu-me vários valores. (A5_10)

Enquanto a professora se deslocava pelas mesas, dirigi-me ao par Diogo/Francisco, acabando por indicar onde poderiam alterar o valor inicial da variável independente e o acréscimo:

> **Investigadora**: Já viram?
> **Francisco**: Era para chegar aqui não era?
> **Investigadora**: Porque será que só estão a ver valores inteiros?
> **Diogo**: Ó *Stora* porque é que a dele tem isto com dois? […] Como é que nós pomos valores, sem ser um, dois, três …
> **Investigadora**: Há de haver uma maneira de poderem colocar aquilo que querem ver, não é?
> **Diogo**: Ah, é? E qual é que é essa maneira?
> **Investigadora**: (Mostra a tecla *TBLSET*) Vocês introduzem onde é que querem começar e de quanto em quanto é que querem ir.
> **Diogo e Francisco**: Ah! (A5_10)

O Francisco entretanto explica às colegas da mesa da frente como devem proceder para alterar os valores que são observados na tabela, e o Diogo partilhou a sua descoberta relativa à opção de os valores da variável independente serem apresentados automaticamente ou então pedidos ao utilizador:

> **Francisco**: (Para as colegas da frente) Vens aqui, *TableStart*, é onde começa a tabela, estás a ver? No zero. E depois aqui no *tbl*, onde está um é a grandeza, se puseres um, vai de um em um, se puseres zero, vírgula um, vai de zero, vírgula um, em zero, vírgula um, certo?
> **Diogo**: Olha aqui o que eu descobri, aqui podes mudar, tipo estar automático, quando vais para a tabela perguntarem-te os valores, ou então estar automático. (A5_10)

A professora salienta à turma a diferença dos procedimentos a efetuar em cada uma das máquinas. Nalgumas máquinas estava ativada a função derivada, aparecendo uma coluna com os seus valores, e a professora refere que não têm que se preocupar com isso.

6.1.4. Refinamento do esquema de utilização para resolução gráfica de condições

Com a alínea c) da questão 3 do problema 14 (Anexo 12), no final da **quinta aula**, os alunos assinalaram os vários modos de resolver uma condição na calculadora:

> **Professora**: Se querem setenta e cinco metros de altura, o que é que queremos saber? (Pausa) Quando é que está aqui a setenta e cinco (marca na representação gráfica), é verdade ou não? (os alunos dizem sim) Há várias formas de proceder, quais?
> **Aluno**: Intersecção.
> **Professora**: Pode ser a intersecção, exatamente, com a reta …
> **Francisco**: Com a reta y igual a setenta e cinco.
> **Professora**: Pode ser, na CASIO mais, pode ser feito como?
> **Aluno**: Na tabela.
> **Professora**: Também podia ser numa tabela. E também pode ser como? Pelo gráfico ir procurar o quê?
> **Aluno**: O ponto. (A5_10)

No início da **aula seguinte**, a professora deu algum tempo para os alunos resolverem a questão que tinha ficado pendente na aula anterior. Nessa altura foi possível perceber que alguns alunos, com calculadoras da marca TEXAS, não conseguiam aplicar corretamente o esquema envolvendo a interseção das duas representações gráficas. Uma das alunas, a Helena, indicou-me o procedimento utilizado para chegar à solução "Vou aqui à intersecção e depois procuro, vou andando a procurar o setenta e cinco" (A6_10). A aluna tinha apenas selecionado a função original e, ao escolher a interseção, deslocava o cursor até obter o ponto de ordenada 75 sem dar atenção à pergunta expressa no ecrã (Figura 41). Na janela definida era possível visualizar as coordenadas exatas do ponto pretendido.

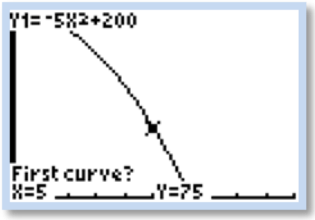


Figura 41 – Ecrã obtido pela Helena, depois de supostamente terminar os procedimentos.

Entre o par Diogo/Francisco e uma das colegas da mesa de frente estabeleceu-se um diálogo em que foram partilhados os esquemas a utilizar. A colega da frente, Susana, pergunta se é para usarem o menu tabela, e o par que não tinha procedido dessa forma, relembrou também esse processo:

Edna: É na *Table*, não é?
Francisco: Diz?
Susana: É procurar a *Table*, não é?
Francisco: No cinco, intersecta-se em cinco.
Susana: É o cinco?
Francisco: Sim.
Susana: Sabes uma maneira mais fácil?
Francisco: Espera aí.
Diogo: *Table*? Ah, eu não sabia que era na *table*. Já não me lembrava. Como é que Susana? (Pausa) Como é que fizeste? Tens o gráfico, faz lá o gráfico normal.
Susana: Tens aqui o gráfico, carregas e vais ao cinco, (emenda) e vais ao setenta e cinco no *y*.
Diogo: Pois, a *Stora* já tinha mostrado isto. Carrego e agora vou …
Susana: E vais ao *y* no setenta e cinco.
Francisco: Como é que vais ter à *table*?
Diogo: Mas há vários *y* igual a setenta e cinco.
Susana: Espera aí (pega na máquina), ai, estás aqui.
Francisco: Não, como é que se modifica, em vez de ser zero, vírgula um.
Susana: *Tblset*.

Francisco: Ham?
Diogo: *Tblset*, aqui (aponta).
Francisco: Ah!
Susana: Mas eu não sei fazer isto. Acho que é assim … (A6_10)

A exclamação do Diogo referente ao facto de haver "vários *y* igual a setenta e cinco" não foi discutida pelos colegas e, aparentemente, o aluno também não se preocupou com isso, passando antes a explicar, à Susana, os procedimentos a efetuar recorrendo ao menu *Calc*. Analisando o seu discurso percebe-se que, tal como a Helena, não deu grande atenção às questões apresentadas no ecrã da calculadora, uma vez que, na janela escolhida por este, ao selecionar a tecla interseção, o cursor posicionou-se automaticamente no ponto de coordenadas pretendido, levando-o a pensar que o procedimento estaria terminado. Depois da discussão com os colegas é que as indicações no ecrã captaram a sua atenção:

Diogo: Olha outra forma, traças o *y*, pões aqui *y* igual a setenta e cinco, traças o gráfico e vês a intersecção. (Pausa) Calcular, cinco (opção 5 do menu *Calc*), isto mostra-te logo a intersecção, *x* igual a cinco.
Susana: E onde é que mostra os valores? O meu não mostra.
Diogo: Diz aqui, calcular, vai a calcular (pausa) e agora põe *intersect*, é o cinco, isso, dá? Ham? Fizeste aí qualquer coisa mal, deixa ver. Posso ver? (pausa) Ah, não põe o máximo e põe o mínimo.
Francisco: A mim deu-me *x* igual a dez!
Susana: Não se consegue mexer, olha aqui!
Diogo: Diz? O meu foi direto.
Susana: (Não se percebe) Bolas!
Diogo: Tenta lá, outra vez. (Pausa) E agora carrega o cinco.
Susana: Não dá!
Diogo: Deixa ver! Olha tens que fazer, marcar um ponto aqui …
Susana: (Para o Francisco) O teu não fica?
Francisco: O meu quê? O meu dá uma coisa …
Susana: Faz como o Diogo está a fazer.
Diogo: Olha tens que marcar um ponto em cima …
Susana: E um ponto em baixo
Diogo: E um ponto em baixo.
Francisco: Isso é calcular os zeros.
Diogo: Não é calcular os zeros.
Francisco: É, é.
Diogo: Espera aí, o vosso é assim? O nosso não é assim. Dá de outra maneira, porque o meu foi direto ao setenta e cinco, não sei se foi … O teu diz aqui *second curve*, *curve* (repete com entoação).
Susana: *Curve* (repete também com entoação).

Diogo: E o meu diz *first*. (A6_10)

Entretanto a professora chega junto do par e explora com eles a situação. Inicialmente tenta perceber porque é que o Diogo obteve logo o valor correspondente à interseção:

Professora: Já fizeram vocês?
Francisco: A mim dá-me mal.
Diogo: Ó *Stora*, porque quando é que eu faço aqui, eu tracei outra reta.
Professora: Que reta é essa?
Diogo: *y* igual a setenta e cinco. E depois fiz a intersecção. Mas a mim quando eu ponho calcular e depois ponho o cinco da intersecção dá-me logo o valor, da intersecção. No deles não.
Francisco: Mas a mim é assim, dá-me um valor diferente. Calcular … intersecção.
Professora: Então é porque tem alguma coisa mal introduzida, a função ou não? Tem a expressão analítica correta?
Francisco: Tenho. Dá-me *x* igual a dez.
Professora: Então e o que é que tem? Mas ainda não acabou, ainda não está!
Francisco: Ah, ainda não acabei. Então tenho que meter?
Professora: Tem que se aproximar, à esquerda, à direita e ver, tem que encontrar …
Diogo: É que eu tentei encontrar mas depois não consegui.
Susana: Não deu *Stora*.
Professora: Deixe ver Susana, (pausa) tem que procurar, a intersecção, ela pode não aparecer. E no caso do Diogo, apareceu logo?
Diogo: Logo. (A6_10)

A professora utiliza então a calculadora da Susana e efetua os procedimentos, chamando a atenção dos alunos para os dados solicitados pela máquina. Mesmo assim, parece que os alunos ficam um pouco confusos acerca dos procedimentos necessários para determinar a interseção:

Professora: Primeira curva, agora vamos colocar a segunda curva, já está.
Susana: Humm!
Professora: Têm que se colocar na primeira e na segunda curva. A máquina pergunta! Deu logo.
(A professora dirige-se para outras mesas)
Diogo: E depois, Susana? Como é que a professora fez no teu? Susana? Como é que a professora depois fez no teu?
Susana: *Enter* e depois andou para aqui.

> **Diogo**: Ah, mas é nessa curva. Hamm! Então sabes o que eu estava a fazer mal na tua? Estava a fazer no coiso de baixo.
> (A6_10)

A professora dirige-se de seguida a toda a turma, e, apesar de serem referidas as várias hipóteses de resolução, o que fica registado no quadro aponta para o esquema recorrendo ao menu *Calc* ou *G-Solv*, com a representação gráfica das duas funções e as coordenadas do ponto de interseção assinaladas na representação.

Numa aula posterior, noutra equação, questão 4.3 da ficha *Propriedades das Funções e Função Quadrática* (Anexo 10), voltou a ser reforçado o esquema de utilização envolvendo o menu *Calc* ou *G-Solv*:

> **Professora**: […] Vimos analiticamente, agora pensem lá numa estratégia, de resolução gráfica do exercício. Não apago nada do que tenho ali (quadro), já tenho ali o gráfico feito, e agora vou pensar se é possível resolvê-lo graficamente. Aí pedia-se, no enunciado, determine o valor de *x* para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira, não diz se quer analiticamente, se quer graficamente.
> **Helena**: Podíamos fazer a intersecção?
> **Professora**: Com quê?
> **Helena**: Haa, com (pausa), outra (pausa), equação? (pausa) Igual a setenta.
> **Professora**: Então não é uma equação.
> **Helena**: Com a função …
> **Professora**: Com a reta …
> **Helena**: Sim, com a reta igual a setenta, *y* igual a setenta.
> […]
> **Professora**: […] Todos já conseguiram?
> **Francisco**: Sim.
> **Manuel**: Não!
> **Professora**: Então? Porquê? (A professora vai ao pé dos alunos) Ó Gonçalo, não é assim a intersecção, é no *G-solv* e depois *intersect*. (A8_10)

6.1.5. Determinação de extremos relativos

A questão 4.2 da ficha de trabalho *Propriedades das Funções e Função Quadrática* (Anexo 10) conduziu ao desenvolvimento do esquema para determinação dos extremos relativos de uma função. Apesar de a professora já ter referido que no menu *Calc* ou *G-Solv* poderiam encontrar várias opções, entre elas os máximos ou os mínimos, os alunos ainda não tinham tido oportunidade de resolver uma questão desse tipo:

> **Professora**: Então como é que se determina a área mínima? Recorrendo às capacidades da calculadora, como é que se faz?
> […]
> **Alexandre**: Ó *Stora*, é na fórmula resolvente?
> **Professora**: Porquê, na fórmula resolvente? Como é que acha o mínimo? Com a calculadora como é que determina o mínimo, Alexandre?
> **Diogo**: Clica-se no menos.
> **Francisco**: Vamos tentar aqui no calcular … (Muito alto) Está aqui!
> **Aluno**: Grande descoberta!
> **Diogo**: Passaste-te? (Ri) É o três! É o *minimum*!
> **Professora**: (Ri) Está aqui o quê?
> **Francisco**: Vi aqui uma coisa a dizer mínimo.
> **Professora**: Ah! Então mas só hoje é que viu?
> **Francisco**: Pois!
> **Diogo**: (Ri).
> **Francisco**: Sério!
> **Professora**: Eu acho que vocês precisam de treinar um bocadinho mais com a calculadora também em casa.
> **Diogo**: Não tínhamos falado ainda do mínimo, ou já? (A7_10)

Como a aula estava a terminar a professora mandou os alunos fazerem em casa. Na aula seguinte, começou por introduzir a expressão analítica da função numa calculadora TI-83, ligada a um *view-screen*, e reforçou a ideia de que o esquema de utilização envolve sempre a procura de uma janela de visualização adequada. A escolha da janela foi feita em discussão com os alunos, relacionando os valores das variáveis com o contexto do problema:

> **Professora**: Há alguém que não tenha ainda conseguido introduzir? A expressão analítica da função na calculadora? Não? Como podem observar no nosso caso, agora também temos ali a expressão analítica da nossa função, certo? Vou observar o gráfico que me vai aparecer. Vamos ver o gráfico (pausa), na calculadora. E, o que é que vimos?
> […]
> **Professora**: A Helena diz que, colocou o x a variar de zero a cinco, porque diz no enunciado que o x pertence ao intervalo de zero até cinco. Então vamos fazer essa mudança. Vou escrever, vou colocar o x a variar entre zero e cinco. E o y qual é o valor que vocês acham que pode ser mínimo, António? Diz lá.
> **António**: Mínimo?

Professora: Mínimo do *y*. O que é que representa o *y* neste caso? Deste enunciado? (Silêncio). […] É a área! Então no mínimo a área é quanto?
António: No mínimo é um.
Professora: Porquê um? (Pausa) Não pode ser zero, vírgula, …
Afonso: Pode ser zero.
[…]
Professora: Qual é o valor máximo? Que aqui podia ser?
Diogo: Cento e quarenta.
Professora: Se for tão reduzido, tão reduzido, tão reduzido a área da parte sombreada, a área da figura toda pode ser o quê?
Diogo: Cento e quarenta.
Professora: Cento e quarenta. E se for ao contrário, se aumentarmos muito, muito, muito o *x* e deixarmos o espaço branco, da parte de madeira, muito pequenino, pode ir até próximo dos cento e quarenta. Então é isso que eu vou aqui introduzir, não é?
Diogo: Sim.
Professora: Cento e quarenta. (A8_10)

A escolha do retângulo de visualização foi feita com base no contexto, apesar de alguma imprecisão relativamente ao valor máximo que a área da parte de metal poderia tomar. De seguida, a professora faz realçar aquilo que se pretendia determinar – o mínimo – e efetua os procedimentos, que nas calculadoras TEXAS incluem a definição de um intervalo a que o extremo pertença e uma aproximação.

Nesta altura gera-se alguma agitação, nomeadamente em relação aos alunos que têm calculadoras da marca TEXAS, uma vez que obtêm valores distintos para a variável independente, dependendo da aproximação efetuada. Pelo diálogo estabelecido entre a Susana e o par Diogo/Francisco, parece existir alguma confusão entre o valor mínimo da função e os diferentes valores devolvidos pelas máquinas para a variável independente.

Susana: Deu-te quanto? Um, noventa e nove, sete?
Aluno: Yah!
Diogo: A mim deu-me dois, zero, …
Francisco: A mim dá-me um, nove, nove, nove, nove, oito, quatro.
Susana: Ih! Ainda está menos.
Suasana: Deixa ver.
Francisco: A mim dá-me um, nove, nove, nove, nove, oito, quatro.
[…]
Professora: Na CASIO dá logo.
Aluno: Ah, isto na CASIO, pois!

Susana: (Para o Francisco) A mim dá-me sempre o mesmo. Quanto é que te deu? Um, vírgula nove, nove, nove, nove, sete?
Francisco: Não. Deixa ver.
Susana: A mim acaba no sete.
Francisco: Dois, a mim deu-me *x* igual a dois.
Susana: Portanto, ainda é mais pequeno que o vosso.
Diogo: Como é que tu conseguiste pôr *x* igual a dois? Certinho?
Susana: Oh! Mas o meu ainda tem um valor mínimo, mais mínimo.
Diogo: Andaste à procura?
Francisco: Não. (Alguma agitação) (A8_10)

A professora tenta fazer diminuir a agitação, sugerindo que poderiam efetuar um *zoom* mais próximo, e conduz os alunos para o modo de responder à questão, reforçando o que devem apresentar quando resolvem um problema do género graficamente:

Professora: Pois, se fizéssemos um *zoom* mais próximo também conseguíamos ver, mas também aqui suspeitávamos que era logo o valor. […] Agora, agora tomem atenção. Como é que vocês responderiam a esta questão?
[…]
O valor mínimo que obtivemos foi quarenta e seis, e depois analiticamente, também vamos provar, mais para a frente, quando falarmos da função, da parábola, que é o caso desta função, da quadrática, quando falarmos da função quadrática vamos verificar que seria mesmo, o valor, o *x* seria mesmo dois, certo? Aqui têm que se aproximar o mais possível, no retângulo mais pequeno de visualização de forma a poder ver, determinar melhor o ponto, nalguns casos. Nas máquinas novas, dá logo, da CASIO. (A8_10)

O Diogo questiona a professora acerca do *zoom* que deve fazer para melhorar a aproximação, contudo, a professora diz que mais tarde falarão dos *zooms* e sugere que, tal como um dos alunos referiu, perante um valor cuja aproximação sugere um número inteiro, confirmem essa suspeita através de substituição:

Diogo: Ó *Stora*, qual é o *zoom* mais adequado?
Aluna: Está ali no quadro.
Diogo: O *zooom*!
Professora: Diga. (Pausa) O que é que foi?
Diogo: Qual é que é o *zoom* mais adequado para nós pormos na calculadora?
Professora: É que depende, do exercício.
Diogo: Ai é?

> **Professora**: Cada caso é um caso, não é?
> […]
> **Professora**: Se nós fizéssemos no retângulo mais curto de visualização, veriam logo que era o dois. O Tomás também diz que na dele deu um vírgula nove, nove, nove, nove … e o que é que ele foi fazer? Substituir na função, o *x* por dois e ver se de facto dava quarenta e seis. Aqui para responder à pergunta, qual é que era o mínimo, era quarenta e seis. O minimizante é que quando viu que era um, vírgula nove, nove, nove, …, suspeitou que era dois e foi, foi comprovar se o *x* fosse dois, se de facto a imagem era quarenta e seis e viu que era verdade. Agora também se pedia o valor mínimo. (A8_10)

6.1.6. Normas relativas à utilização da calculadora

Com o desenvolvimento da atividade vão sendo instituídas algumas normas relativas à utilização da calculadora gráfica na sala de aula. Na **quinta aula**, após terem determinado o zero da função presente na questão 14 do manual (Anexo 12) a professora passa para a resolução analítica, pedindo a colaboração dos alunos. Enquanto é feita a resolução analítica, um grupo de alunos está a conversar e a professora interrompe para perguntar o que se passa. Os alunos respondem que estavam a ver na calculadora e a professora mostra alguma impaciência:

> **Professora:** Agora não é a calculadora! (pausa) A máquina, a aula não é só a calculadora! […] Não estiveste com atenção nenhuma aquilo que se esteve a fazer. Não vou ter que vos tirar as máquinas quando estamos a fazer as coisas analiticamente! Têm que saber utilizar, a calculadora no tempo em que ela está a ser utilizada, quando está, quando é oportuno. (A5_10)

A professora chama a atenção dos alunos que não passaram a resolução analítica para o caderno e volta a referir que não podem estar a manusear as calculadoras quando ela está “a fazer outras coisas” (A5_10). O aluno refere que sabia o que a professora estava a fazer mas estava a testar se a calculadora dava o valor exato. No entanto, a professora não aproveita essa oportunidade para discutir o modo de apresentação dos resultados nas calculadoras, passando de imediato à questão seguinte.

Entretanto o Francisco pergunta à professora se não é possível determinar os zeros com a calculadora através da intersecção. A professora responde afirmativamente mas refere que na próxima alínea terão oportunidade de ver como isso se faz. A calculadora gráfica deve ser utilizada apenas quando os alunos têm indicação para isso.

O modo de apresentação de uma questão resolvida com a calculadora faz também parte das normas referentes à sua utilização. Na correção da questão 4.2 da ficha *Propriedades das Funções e Função Quadrática* (Anexo 10), a professora deixa bem claro o que deve ficar registado numa resolução com a calculadora:

> **Professora**: […] Ora, era necessário apresentar o gráfico, tínhamos que apresentar o gráfico, aqui também não se pede ainda, apenas pede para determinar o valor mínimo, contudo, tinham que apresentar o gráfico, convinha determinar mais alguns pontos, ou seja, este valor aqui (aponta), a intersecção com o eixo dos *yy*, também convinha determinar. Convinha saber quanto era a imagem para cinco, porque a função só estava definida para cinco, portanto, eu deixei ali em aberto, para irem ver, vejam aí, quanto é a imagem de zero, se o *x* fosse zero, quanto é que seria que dava?
> […]
> **Professora**: É o valor da função quando o *x* fosse zero, no início, era setenta, iam à expressão. E agora? Mais?
> **Aluno**: Quando é cinco, é cem.
> **Professora**: Quando é cinco?
> **Aluno**: A imagem é cem.
> **Professora**: Cem. Convém fazer com algum rigor. Reparem, não estou aqui a fazer com muito rigor, convém serem rigorosos. Escolherem uma escala correta, aqui não tenho bem as unidades, convém terem em conta aí no caderno. Verem mais ou menos e escolherem de forma a ficar representado corretamente. Aqui era bola aberta (cinco) se eu quisesse representar o que se passava. Também o mesmo aqui no início porque o *x* variava de zero até cinco, certo?
> **Helena**: Sim.
> **Professora**: Representávamos o gráfico, este é o gráfico completo desta função. E íamos determinar o mínimo com a calculadora. Indicavam o retângulo de visualização que utilizámos, ou também não era muito necessário, dado que está aqui, tudo, estava cá tudo indicado. Nós representámos no intervalo, o *x*, (escreve o intervalo para cada uma das variáveis no quadro), neste retângulo, variava entre zero e cinco e o *y* entre zero e cento e quarenta. (A8_10)

6.2. Exploração de algumas tarefas ou tópicos abordados na sala de aula

6.2.1. Investigações com a função afim

Esta tarefa (Anexo 13) foi proposta para trabalho de casa, a entregar na aula seguinte, depois de a professora abordar o tópico da função afim. Os alunos, de modo geral, sentiram dificuldades na resolução da tarefa, não conseguindo efetuar generalizações na forma algébrica. A professora conduziu a correção, recorrendo a um *view-screen*, e pedindo a colaboração dos alunos. No final da correção questionou-os sobre a tarefa e quase todos responderam que não gostaram de a fazer, contudo, o Francisco, referiu algo bastante interessante, o facto de tentarem resolvê-la em colaboração:

> **Professora**: Em relação a esta atividade, ainda há muitas dúvidas? Não? Gostaram de a fazer?
> (os alunos respondem que não)
> **Professora**: Não? Porquê?
> **Francisco**: Quer dizer, até gostei …
> […]
> **Francisco**: Quando resolvi, primeiro não consegui resolver a primeira, mas depois não fiz sozinho. Fiz com o Diogo, fizemos os dois.
> **Professora**: Fez com o Diogo, está bem.
> **Francisco**: Depois, como não conseguíamos chegar lá, ligámos à Sofia.
> **Diogo**: Pegámos no telefone …
> **Professora**: Ligaram à Sofia, então vá e depois?
> **Francisco**: E a Sofia disse-nos como é que devíamos fazer primeira. E nós depois, para compensar, dissemos que conseguimos fazer a segunda e dissemos como é que fizemos!
> **Diogo**: Mas ela já tinha feito. (A8_10)

Atribuição de valores aos parâmetros

Em relação à primeira questão, é a Tatiana que começa por indicar algumas funções da família, sendo depois seguida por outros alunos. É visível a tendência para atribuir valores inteiros e positivos aos parâmetros:

Professora: Como é que pensaram graficamente?
Manuel: Então se o *a* tem que ser diferente …
Tatiana: Eu introduzi várias, imaginei várias retas.
Professora: Quais?
Tatiana: Do tipo *y* igual a *ax* mais *a*.
Professora: Então mas quero exemplos, então.
Tatiana: *y* igual a *x* mais um.
Professora: (Escreve no quadro) *y* igual a *x* mais um.
Tatiana: *y* igual a dois *x* mais dois.
Professora: São exemplos desta, de retas que pertencem a esta família ou não?
Francisco: São.
Helena: Sim, só varia no, só o *a* é que varia.
Professora: *y* igual a quê?
Tatiana: Dois *x* mais dois.
Professora: (Escreve) *y* igual a dois *x* mais dois. Concordam?
Francisco: Três *x*, mais três.
Professora: (Ri) Sim.
Aluno: E por aí fora.
Professora: Mais?
Tatiana: *y* igual a três *x*, mais três. (A8_10)

Na questão seguinte participam mais alunos na discussão, continuando a notar-se a tendência para considerar valores positivos e inteiros.

Desenvolvimento e evolução de esquemas de utilização

A representação gráfica das funções consideradas na primeira questão proporcionou uma nova informação sobre o retângulo de visualização, a opção de recorrer ao *Zoom ZStandard*:

Professora: Na janela, reparem! Eu não mudei nada, só introduzi as duas primeiras expressões …
Manuel: Pois! A mim aconteceu-me o mesmo.
Professora: Pois, exatamente! Foi esse o objetivo, que acontecesse o mesmo. Ora bem, apareceu-me, tenho ali as duas expressões, não alterei nada, neste momento, no gráfico, aparece-me isto (Figura 42).
Professora: Parece-vos que este gráfico se adequa ao … (Os alunos respondem que não). Não? Porquê?
Francisco: Porque a janela está toda … (muito barulho não se percebe o que dizem).
Professora: Então eu posso de uma forma muito simples, tentar alterar a janela, mas muitas vezes, em muitas situações basta vocês procurarem o *ZOOM STANDARD* para ver se se vê bem. No *Standard*, aparece aqui *zoom* 6. Zoom standard, será que dá? Para, será que se adequa a este?
Diogo: Dá!

Francisco: Sim!
Professora: (Para os que têm CASIO) Na vossa também aparece aqui, (vai junto aos alunos), na CASIO vão à procura na *Window* do *zoom standard*.
Helena: Ah! Eu já estava a alterar a janela (alterar os valores).
Sofia: Eu também!
Professora: Experimentem com o *standard* para ver se se vê bem. (A8_10)

Figura 42 – Representação gráfica projetada por meio do *view-screen*.

A determinação do ponto de interseção dos gráficos das funções permitiu o fortalecimento do esquema de utilização respetivo, já que, recorrendo ao artefacto, só é possível efetuar a interseção de duas representações gráficas:

Professora: […] Coloquei as retas todas, e agora o que é que nós queremos? O que é que nós observamos ali? O que é que se passa?
Carolina: Está uma grande salganhada!
Francisco: As retas intersectam-se no ponto …
Professora: Todas as retas se estão a intersectar. Há ali um ponto comum a todas as retas.
Francisco: Pois há.
Professora: Vamos ter que saber quais as coordenadas desse ponto. Então procurem lá o ponto de intersecção.
Helena: Já está, menos um, zero.
Professora: Então mas fez a intersecção como?
Helena: Então, calcular intersecção. Com duas curvas, com duas curvas, com duas retas.
Professora: Ah! Não fez com todas as retas?
Helena: Não! Só dá para duas.
[…]
Professora: Ora, não deu nalguns casos, é isso que me querem dizer? É? Eu sei. Não deu, alguns de vocês detetaram que não deu a intersecção. É assim, só conseguimos encontrar a intersecção de duas. Têm que escolher duas para procurar a intersecção. Mesmo no caso da TEXAS, porque na TEXAS quando vocês se colocam na *first*, na primeira curva, ou na segunda, quando lá pergunta, no primeiro ou no segundo,

> também estão só a considerar duas! Contudo, observam que o ponto de intersecção é o mesmo. Mas também podem fazer todas as intersecções. (A8_10)

Dificuldades dos alunos

Uma dificuldade manifestada pela maioria dos alunos diz respeito à desvalorização da necessidade de prova, aceitando como suficiente a verificação de determinada propriedade para alguns casos particulares:

> **Professora**: […] Nós conseguimos ter a certeza de qual é o ponto de intersecção?
> (Alguns alunos respondem sim)
> **Professora**: Porque provar para dois, para duas ou para três ou para quatro, conseguimos ter a certeza? Para todas as retas daquela família o ponto de intersecção é o menos um, zero?
> **Francisco**: Sim.
> **Professora**: Conseguimos ter a certeza?
> **Carolina**: Acho que sim.
> **Professora**: Porquê?
> **Carolina**: Porque diz na máquina!
> **Francisco**: Não. Ó *Stora* porque é assim, nós experimentámos com valores negativos e com positivos, diferentes retas.
> **Diogo**: Mas tu não sabes se está tudo a passar exatamente no mesmo ponto.
> **Professora**: E basta procurar, basta encontrar casos particulares para nós podermos generalizar que é verdade para qualquer *a*?
> (Alguns respondem não)
> **Francisco**: Não vamos fazer a …, no caderno (ri). (A8_10)

Apesar da discussão, alguns alunos continuaram com a mesma dificuldade, sendo a mudança de registo de representação a única diferença relativamente ao que havia sido explorado anteriormente, ou seja, continuaram a pensar em particulares e não na generalização algébrica:

> **Professora**: O que é que nos parece com a nossa investigação? A nossa investigação sugere-nos que o ponto de intersecção é de facto o menos um, zero. Mas agora como é que nós vamos provar que de facto o ponto é esse? Como encontrar as coordenadas do ponto recorrendo a um processo algébrico?
> […]
> **Professora**: Então e nesse caso … Ora, a Helena diz: "fazemos a intersecção entre a reta *y* igual a *x* mais um e a reta *y* igual a dois *x* mais dois". […] Concordam que, com a resolução que a Helena fez? (A8_10)

Apenas a Tatiana reage, dizendo que fez outro caso particular, e depois o caso geral, sendo a professora a salientar esse facto:

> **Daniela**: Fiz outro. Fiz com outras duas para provar se era no mesmo ponto.
> **Professora**: A Daniela fez com mais outro caso. Em vez de fazer só com estas duas fez a mesma coisa mas com as duas últimas.
> **Daniela**: Mas depois ainda fiz outro caso.
> **Professora**: E ainda fez outro. Foi o caso de …?
> **Daniela**: Considerei aquele tipo, *y* igual a *a* de *x* mais *a* e depois, era um sistema, e fiz *y* igual a *bx* mais *b*.
> **Professora**: E depois?
> **Daniela**: E conclui que o *y* era zero e o *x* era menos um.
> **Professora**: Então considerou outro caso ainda.
> **Francisco**: Passaste a tarde nisso (ri).
> **Professora**: Fez este exemplo, este caso particular. E depois o que é que considerou? Tomou a reta, uma das retas da família, (escreve no quadro) considerou o *ax* mais *a*, e agora? *y* igual a *bx* mais *b*. (A8_10)

A professora pede à Tatiana para ir resolver ao quadro, e lança novamente a discussão acerca da verificação, para um ou mais casos particulares, ou da prova no caso geral:

> **Professora**: Então o que é que acham? Acham que é verdade que se prova, fazendo com dois exemplos, que se prova para todo o *a*, diferente de zero, todas as retas daquela família se intersectam no ponto menos um, zero?
> **Francisco**: Eu acho que não.
> **Professora**: Porque é que não?
> **Francisco**: Porque é assim, tal como nós fizemos na máquina graficamente, fizemos exatamente com os mesmos exemplos.
> **Professora**: Sim.
> **Francisco**: Logo, é assim se a máquina nos dá um valor e nós vamos fazer analiticamente e com valores iguais, vai dar o mesmo!
> **Professora**: Então, mas?
> **Francisco**. Eu penso que da maneira como a Tatiana fez ali (pausa), vai dar mesmo.
> **Professora**: Vai dar o quê? Vai dar mesmo, porque é que desta maneira que a Tatiana está a fazer vai dar mesmo? O que é que isso vai dar mesmo? […] Porquê?
> **Francisco**: Porque aí não estamos a funcionar com exemplos, estamos a, a …
> **Professora**: (Bastante alto) Com casos particulares!
> **Francisco**: Exatamente.

> **Professora**: Todas aquelas situações que nós estudámos até agora, eram casos particulares, é verdade ou não? […] E nós, nós só obtivemos a intersecção naqueles casos particulares, não se pode partir do particular e generalizar. Qual é a diferença para o que está a fazer a Daniela neste momento?
> **Francisco**: É que ela não está (pausa), a dar um exemplo.
> **Professora**: Não está a dar um exemplo, porque é que não está a dar um exemplo?
> **Cristina**: Está a utilizar um caso geral.
> **Professora**: Está a usar um caso geral, porquê?
> **Cristina**: Porque não está a utilizar valores.
> **Professora**: Não atribuiu a *a* e a *b*, valores concretos. *a* e *b* são números reais quaisquer. Verifica o enunciado. (A8_10)

Uma outra dificuldade diagnosticada diz respeito à impossibilidade da divisão por zero. A Tatiana obteve a fração representada na Figura 43, tendo-a simplificado sem indicar restrições, pelo que a professora tentou conduzir a discussão para a validade da simplificação. Após uma longa discussão, os alunos acabaram por concluir que deveria ser imposta a condição *a* diferente de *b*, mas esta é uma dificuldade irá continuar a manifestar-se mais tarde.

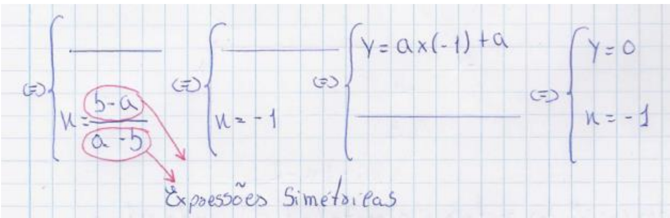


Figura 43 – Extrato da resolução da Tatiana (questão 1).

6.2.2. Investigando a função módulo

A tarefa *Investigando a Função Módulo* (Anexo 11) foi proposta na **nona aula** e ocupou três aulas, uma vez que os alunos iam resolvendo e, paralelamente, a correção ia sendo feita no quadro. Além disso a professora introduziu outras questões, que considerou pertinentes, envolvendo equações e inequações com módulos, que entretanto foram também sendo corrigidas.

Antes de entregar a ficha a professora foi questionando os alunos acerca do significado do módulo, conduzindo-os à representação gráfica da função $y = |x|$, partindo da função $y = x$, sem recurso à calculadora gráfica.

Desenvolvimento e evolução de esquemas de utilização

A professora começou por explicar como é que os alunos podiam introduzir o símbolo do valor absoluto nas duas marcas de máquinas, aconselhando-os a escrever no caderno, para não esquecerem:

> **Professora**: […] Como é que se define o módulo na calculadora? Como é que nós escrevemos a função módulo? No caso da TEXAS vamos à procura de escrever valor absoluto de *x*. *Abs* de *x*.
> **Helena**: *Abs*?
> (Alguns fazem comentários relacionados com o *abs*)
> **Professora**: *Abs*! *Abs* encontramos duas maneiras, ou vamos ao catálogo e no catálogo aparece logo o *abs* …
> **Diogo**: No catálogo?
> **Francisco**: (Ri).
> **Professora**: Está aí na última …
> **Diogo**: Ah! Está aqui, já vi.
> **Professora**: Ou então vão a, deixe-me ver (pega numa máquina da TEXAS), empresta-me só a calculadora, está aí, é logo o primeiro ou então pode-se ver doutra maneira. *Math*, Estou a falar para os da TEXAS, neste momento, matemática, número, *num*, e depois aparece outra vez *abs*. Quem é que tem TEXAS?
> **Francisco**: Eu, *Stora*, onde é que está o *math*?
> **Professora**: (Não houve o Francisco e dirige-se a outro aluno) Todos encontraram? Conseguiu?
> **Diogo**: Ó Francisco, *math*! (A9_10)

Enquanto resolvia a ficha com o Francisco, o Diogo questionou a professora sobre o modo de introduzir uma fração na calculadora, poi pretendia introduzir $\frac{1}{2}$, sob essa forma, na máquina. Essa opção, contudo, não é possível na sua calculadora, embora as mais recentes já o façam. A funcionalidade que a professora lhe indicou serve antes para converter uma dízima numa fração, pelo que o aluno a volta a chamar:

> **Diogo**: *Stora*, a *Stora* já explicou como é que se punha frações na calculadora?
> **Professora**: Frações?
> **Francisco**: Sim, mesmo …

> **Professora**: Ah, na tua, é no *math*, fração, também.
> **Diogo**: Ah! No *math*? *Frac*
> **Susana**: É a primeira, não é?
> **Diogo**: É. E agora? Isto não me está a parecer uma fração.
> **Francisco**: Agora fazes a fração.
> **Diogo**: Esquisito, como é que eu ponho a fração aqui? Eu queria era isto como tinha a outra calculadora (científica que usava no básico). Que era fração assim, ao alto, estás a perceber?
> (Os alunos vão trabalhando e a professora vai rodando pelas mesas, o Diogo chama-a)
> **Professora**: Mas queres a fração para quê? Para escreveres … zero vírgula, um meio? Põe menos zero, vírgula cinco.
> **Diogo**: Sim, mas é para saber já para as próximas vezes que eu precisar de usar.
> **Professora**: Então mas aí não era assim que se escrevia, era um, aqui, dois.
> **Diogo**: Ah! Ok. (A9_10)

Com a atividade vão sendo reforçados alguns esquemas de utilização. A professora vai corrigindo alguns dos problemas relacionados com a edição da expressão analítica, em particular no que diz respeito à introdução dos parêntesis.

Na correção a professora pede para as representações gráficas serem desenhadas com algum rigor. O Diogo foi corrigir a primeira questão ao quadro, determinando analiticamente três pontos (o vértice e um ponto de cada uma das semirretas) para cada uma das representações gráficas. A professora em seguida refere que também podem recorrer à calculadora para obter os pontos a representar, referindo-se à funcionalidade *TRACE*:

> **Professora**: Ora, tomem atenção, a calculadora mostra-vos a imagem dos gráficos das funções. Estamos a fazer, simultaneamente analiticamente, a indicar os cálculos todos, para vocês verem que o gráfico não apareceu, não é, a configuração do gráfico é em forma de quê? Todos os gráficos são em forma de quê?
> **Helena**: V.
> **Professora**: V, mas de qualquer maneira o V não é feito de qualquer forma. Se vocês percorrerem os gráficos também podem encontrar estes valores. (Silêncio) Se vocês fizerem *TRACE* sobre o gráfico, também podem encontrar, podem saber em qual das funções é que estão, para saber qual é que é o módulo …
> **Helena**: Ah!
> **Professora**: Fazem *TRACE* e conseguem saber em qual das funções estão.
> **Helena**: Eu sabia que era aqui!
> **Professora**: Pronto, é no *TRACE*, sim. (A9_10)

Na aula seguinte, a Helena recorreu à funcionalidade *TRACE* para obter os zeros da função $y = |x| - 2$, pedidos pela professora, não conseguindo assim uma correta aproximação. A aluna aceitou o valor que obteve, não estabelecendo conexão com a expressão algébrica, mesmo quando a professora tentou conduzir a discussão para esse aspeto:

> **Helena**: Não é menos dois e dois nada! […] Não é menos dois! É menos um, vírgula noventa e um, quatro, oito, nove, quatro.
> **Diogo**: Aí é que te enganas!
> **Professora**: Não! (A professora vai ao pé da aluna) Isso tem a ver com a aproximação, é menos dois mesmo!
> **Helena**: Não é não, *Stora*! Olhe ali!
> **Professora**: Ah, pois! A calculadora … Tem que se aproximar mais e pôr uma janela mais próxima para pôr o zero correto.
> **Helena**: Então vou para que janela?
> **Professora**: Já viu que é ali mais próximo, não é?
> **Helena**: Ponho zero, quatro?
> **Professora**: Menos quatro, por exemplo. Pois, na CASIO nunca acontece esse problema. Agora veja lá se já consegue.
> […]
> **Professora**: Ó Helena, aqui neste caso, tinhas que refletir sobre esse resultado, porquê? O que é que é o módulo?
> […]
> **Helena**: Mas eu não estava a fazer por aí, estava a fazer pelo *TRACE*.
> **Professora**: Ah! Há aqui um problema, é que a Helena não estava calcular o zero com a opção de determinar os zeros! (Os alunos exclamam Ah!) Estava a ir ao *TRACE*! Não é o *TRACE* que permite, com rigor, saber a resposta. Certo? Não é pelo *TRACE*, no *TRACE* vocês percorrem o gráfico, não conseguiste chegar exatamente àquele ponto, tens que fazer nos zeros, certo?
> **Helena**: Certo. (A10_10)

Quando os alunos estavam a resolver a inequação $f(x) > 5$, sendo $f(x) = |x| + 2$, o Francisco mostrou alguma dificuldade em encontrar uma janela de visualização, tendo a professora reforçado a ideia de que deveria começar sempre por experimentar *o Zoom ZStandard*:

> **Francisco**: Eu não estou a conseguir.
> **Professora**: Ó Francisco, experimenta o sempre *zoom standard*, a ver se se vê. No *standard*, porque muitas vezes dá para ver.
> **Francisco**: Ah!
> **Professora**: Se não der é que tens que ajustar, neste caso já dá.
> **Francisco**: Ah! (A10_10)

A questão acrescentada pela professora $f(x)+5 \leq 0$, sendo *f* a função anterior, permitiu aos alunos discutir a equivalência de procedimentos, já que alguns alunos passaram o termo 5 para o outro membro, enquanto outros recorreram à expressão analítica de *f* e efetuaram o tratamento no primeiro membro, só depois passando a constante para o outro membro. Porém, ninguém assinalou o facto de poderem determinar os zeros da função $y = f(x)+5$:

> **Carolina**: Ó *Stora* não sei, não sei!
> **Professora**: Não sabes o quê?
> **Carolina**: A reta … não sei.
> **Professora**: Não sabes o quê?
> **Carolina**: O que se faz ao cinco.
> **Professora**: Não consigo ouvir. (Risos) Então e nas outras, não é igual? Qual cinco?
> **Carolina**: O *f* de *x* mais cinco.
> **Sofia**: Passa para o outro lado! Passa para o outro lado e fica negativo.
> […]
> **Diogo**: Não podemos pôr módulo de *x*, menos dois, mais cinco, menor ou igual a zero, depois fica módulo de *x*, mais três.
> **Francisco**: Menor ou igual …
> **Professora**: Menor ou igual a …
> **Diogo**: Zero.
> **Professora**: Poder, podemos, não podemos?
> […]
> **Professora**: Em vez de considerarem a função *f*, faz a, simplificou primeiro e depois comparar, foi ver o gráfico da função módulo de x, e o gráfico da função y igual a menos três e viu o que é que se passava, quando é que o módulo estava abaixo do menos três. Fez uma parte analiticamente aqui, fez, mas não está mal, pode fazê-lo também. (A10_10)

Dificuldades dos alunos

Quando corrigiam a questão 2, uma das alunas coloca uma questão à professora, não conseguindo identificar o tipo de representação gráfica que deveria obter, nem o porquê de as suas representações gráficas estarem diferentes das da colega:

> **Carolina**: E isto é suposto não passar na origem?
> **Francisco**: Não passa na origem, não.
> **Professora**: (Pausa longa) Não faço ideia.
> **Carolina**: Mas a minha tem, a dela não está igual, *Stora*.

> **Professora**: Hum? Mostre lá, como é que escreveu a expressão analítica? (Pausa longa) *abs* de quê? Módulo de quê? Leia lá o que é que lá está escrito.
> **Carolina**: Eu meti ao contrário.
> **Professora**: Não, nem escreveu uma função, escreveu uma função constante (pausa), dois mais *abs* de três, é dois mais módulo de três, é cinco, é a função constante *y* igual a cinco. (A10_10)

O problema residia na introdução da expressão analítica da função na calculadora, no entanto, o estabelecimento de conexão entre a representação esperada e a obtida poderia conduzir facilmente à identificação do erro.

As conclusões referentes aos efeitos dos parâmetros foram feitas com base na visualização das representações gráficas. A professora assinala o facto de a translação horizontal ser um pouco contraintuitiva, referindo que o "*h* é mentiroso":

> **Professora**: […] Ou seja, no caso da família de funções igual a *a*, módulo de, *x* menos *h*, o gráfico obtém-se do gráfico de módulo de *x* fazendo uma translação associada a que vetor? Caso geral?
> **Rita**: (Pausa) *h*, zero.
> **Professora**: *h*, zero. É na horizontal, não é? *h*, zero. Agora reparem, quando está menos desloca-se para onde?
> **Rita**: Para a direita. (Mais alunos respondem).
> **Professora**: Para a direita. Quando está mais?
> **Rita**: Para a esquerda. (Mais alunos respondem).
> **Professora**: Para a esquerda. Costuma-se dizer, para fixar é melhor, que o *h* é mentiroso, quando está menos é que anda para a direita e quando está mais para a esquerda, não é o mesmo que se passa no caso da outra família de funções que nós estudámos na última aula, quando é *y* igual a módulo de *x*, mais *k*. Não é? O *k* se for positivo sobe, o *k* negativo desce, aqui é ao contrário, não é? Pronto, então vamos escrever isso (dita as conclusões). (A11_10)

Apesar de inicialmente os alunos terem retirado conclusões aparentemente sem dificuldade, um pouco adiante foi possível perceber que, de facto, os alunos têm mais dificuldade em identificar corretamente a primeira coordenada do vértice:

> **Professora**: Então vamos fazer um exemplo, *y* igual a módulo de, *x* menos dois, mais três, por exemplo. Caso particular. E depois já vamos escrever. Exemplo desta família, deixem ficar lá *a* igual a um, porque vocês já sabem qual a influência do a, ou

não? Então vamos ver, neste caso particular, tem vértice aonde sem calculadora?
João: Menos dois, três.
Professora: O vértice é o menos dois, três, diz o João.
Manuel: Não! (ouvem-se mais nãos).
Professora: Então, porquê?
Manuel e Cristina: É o dois, três!
Joana: Porque o *h* é mentiroso.
Professora: Pois é! Agora vejam na calculadora. Confirme com a calculadora que gráfico é que obteve nesta família de funções, nesta função, nesta.
António: Porque é que o *h* é mentiroso?
Professora: Então o que é vimos há bocado?
Afonso: Não estava a perguntar mesmo a sério, estava a brincar!
Professora: Ah! (Pausa longa) Então o que é que vimos há bocadinho, no anterior, João?
João: Que o *h* é mentiroso! (Risos) (A11_10)

Normas relativas à utilização da calculadora

A professora normalmente indica quando os alunos devem recorrer à calculadora, o que é visível no excerto seguinte, em que o Diogo ia explicar com base nas transformações de funções, o porquê da função $f(x) = |x| + 2$ ter dois zeros, e a professora interrompe e pede para usarem a calculadora:

Professora: Então, pensava só ver isso depois mas vamos lá pensar (escreve no quadro), módulo de *x* menos dois, a função *y* igual a módulo de *x* menos dois. Terá zeros ou não terá zeros?
Rita: Tem dois.
Professora: Eu vou pôr, haaa, tem dois. Tem? (Os alunos dizem que sim) Então? Porquê? Façam na calculadora.
Diogo: Como o *x*, como o módulo de *x* é positivo está voltado para cima …
Professora: Mas façam na calculadora! (Pausa) Peçam lá ajuda à máquina para vos responder à vossa pergunta. A ver se ela é mentirosa. Não?
Helena: Tem dois!
Professora: Então façam lá, eu quero ver. (A10_10)

Uma outra norma que vai sendo reforçada diz respeito ao modo de responder a uma questão resolvida, ou explorada, com a calculadora, como é visível nos seguintes excertos:

Professora: Quando vocês resolvem a atividade, podem ir logo pondo os gráficos na, que estão a utilizar, porque não chega ver só na calculadora, se não têm nenhum registo depois esquecem-se, convém estar aí, estar no caderno o registo da, os gráficos, para poderem registar a seguir as conclusões. Fazem na calculadora, mas depois não registaram nada. (Começa a ditar as conclusões). (A10_10)

Diogo: Ó *Stora* quando nós resolvemos com a calculadora apresentamos o gráfico que nós dá na calculadora?
Professora: Apresentam! Têm que apresentar o gráfico. Têm que apresentar o gráfico que corresponde à função. (A11_10)

Para a professora é necessário ter a atenção dos alunos quando está a discutir ou resolver algo com a turma, e uma norma que vai sendo estabelecida é que nessa altura não podem estar a trabalhar com a calculadora: "não se pode estar a trabalhar com a calculadora quando estamos a tirar conclusões" (A10_10). Contudo, o facto de estarem a fazer a correção paralelamente com a resolução acaba por não contribuir favoravelmente para essa exigência.

6.2.3. Uma tarefa sobre transformações de funções

Esta tarefa (Anexo 14) foi proposta pela professora nos trinta minutos finais de uma aula cuja atividade principal foi a correção de trabalhos de casa envolvendo a função quadrática. O enunciado da tarefa foi ditado pela professora, sendo a representação gráfica das funções desenhada por esta no quadro. A professora dá indicações aos alunos para resolverem em casa o que não conseguirem terminar na aula. Toda a tarefa foi sendo resolvida pela professora no quadro, através de questionamento para o grupo turma, ou para determinado aluno. A calculadora gráfica nunca foi utilizada.

Exploração da tarefa

Relativamente à primeira alínea, uma das alunas colocou logo uma questão, e a professora aproveitou para explorar o enunciado, pedindo a colaboração dos alunos:

Rita: Ali no *g* de *x* a professora põe menos três?
Professora: Menos três? Aonde? O vértice é no menos três menos quatro, é isso?
Rita: Não devia ser mais três?

> **Professora**: Ai, aqui? Está-me a perguntar este (alínea a))? Já sei. Ora bem, este exercício, neste exercício apareceram algumas coisas novas, é verdade. Não é? [...] Só tínhamos falado, só tínhamos escrito a expressão de *g* em função da *h*, em casos em que subíamos e em que descíamos. Também se pode fazer o mesmo em caso de andarmos para a esquerda, para a direita, como, como na situação da primeira alínea que aí vos é colocada. Ora, a Rita estava-me a perguntar há bocadinho se aqui não era mais três (enunciado), nada tem a ver com o vértice! Aquele três não tem a ver com o vértice, aquele três, o que é que esta função é em relação à função *g*? Pensem lá um bocadinho
> **Aluna**: Anda três, três unidades para a direita.
> **Professora**: Exatamente! O que é que a função é em relação à *g*? A *g* deslocou-se três unidades, não foi? Para que lado?
> **Aluno**: Direita.
> **Professora**: Para a direita! Porquê? Porque está *x* menos três! Então o que é que se pergunta naquela primeira questão? (Pausa, os alunos ficam em silêncio) Determinar os valores de *x* que verificam a condição *g* de, *x* menos três igual a zero. É o mesmo que estar a pedir para determinar o quê? (Silêncio) É determinar o quê? O que é que quer dizer *g* de, *x* menos três, igual a zero?
> **Cristina**: É o zero. (A20_10)

Houve alguma confusão na identificação dos zeros da transformação pedida, contudo, a professora foi questionando os alunos até chegarem à resposta correta. A professora terminou ditando as conclusões, e fazendo um resumo sobre as transformações de funções:

> **Professora**: (Escreve no quadro) *x* igual a menos dois, ou, *x* igual a dois. É então a resposta a esta questão. Há alguma dúvida? (Pausa) Mas podem escrever aí no caderno para ficar, para perceberem melhor, depois esquecem-se. O gráfico da função (pausa), *y* igual a *g* de, *x* menos três … (escreve no quadro). Isto é o mesmo que nós fazíamos com as parábolas, que nós fazíamos com os módulos, não é? [Dita] Ou seja, a partir do gráfico, dum qualquer gráfico de uma função qualquer, nós podemos fazer transformações, não é? Neste caso é uma parábola, mas podia ser outro tipo de função qualquer, podemos fazer novas transformações a partir desse gráfico, como fizemos a partir da parábola *y* igual a *x* quadrado, para todas as outras (pausa), ou do módulo de *x*. (A20_10)

A primeira parte da segunda alínea foi sendo resolvida de modo semelhante e entretanto a aula terminou. Na aula seguinte a tarefa continuou a ser corrigida, sendo suposto que os alunos já tivessem pensado em casa na sua resolução.

Apesar de a alínea b2) ser semelhante à b1) que já tinha sido corrigida, foi possível perceber ainda algumas dificuldades relativamente ao valor a atribuir ao parâmetro *h*:

> **Professora**: *h* não pode ser menos três, *h* é três diz a Susana. Então vamos lá ver, vou aqui à expressão substituir o valor que me está a dizer. y igual a *g* de *x* menos três, mais, seis, é isto então a função, ou não? (Pausa longa) O que está a dizer a Susana é isto.
> **Susana**: Não.
> **Professora**: Não?
> (Não se percebe o que a Susana diz)
> **Helena**: Então assim tem que ser menos três.
> **Professora**: É para ficar aqui mais três, é?
> **Helena**: Então para isso tem que ser menos três.
> **Professora**: Então para ficar ali mais três quanto é que é o *h*? (os alunos respondem menos três) Já cá está o menos! Então quer que fique aqui mais três, então o *h* tem que ser menos quanto?
> **Susana**: Menos três.
> **Professora**: Menos três! Menos três, então está certo que é menos três e não três, têm que estar com atenção ao sinal que têm aqui, se aqui está *x* menos *h*, realmente quer que fique isto, para andar três para a esquerda, então mas nesse caso para se deslocar três unidades para a esquerda, nesse caso o *h* tem que ser menos três e não três não é verdade? (A21_10)

Em relação à alínea c) a professora dá instruções para representarem cada gráfico num novo referencial. A primeira subalínea foi corrigida com a colaboração dos alunos sem grandes dificuldades, tendo a professora questionado acerca do significado do módulo e dos pontos que deveria usar para conseguir um esboço da representação gráfica.

As duas subalíneas seguintes foram corrigidas por ordem inversa, em primeiro lugar a representação gráfica de $y = |g(x)| + 3$ e só depois de $y = |g(x) + 3|$. Quando começou a corrigir a professora informou os alunos que, usualmente, não são pedidas as representações gráficas, uma vez que seria necessário efetuá-las com algum rigor, sendo mais usual pedir para escrever ou identificar a transformação.

A correção foi feita como nos restantes casos, com a participação dos alunos e o questionamento por parte da professora. Os alunos não mostraram dificuldades. Entretanto, a professora acrescentou duas alíneas, pedindo para representarem também

$y = g(x+3)$ e $y = | g(x+3) |$. Já depois da correção, uma das alunas, Cristina, pediu à professora para explicar melhor a diferença entre $y = g(x+3)$ e $y = g(x)+3$, no entanto, a "explicação" baseou-se essencialmente nas conclusões que os alunos haviam retido de explorações anteriores:

> **Cristina**: Ó *Stora*, mas pode explicar a diferença do outro lado, que eu não percebi lá muito bem? Sem módulo, sem módulo. Porque é que não tem nada a ver?
> **Professora**: Com qual? Com esta, por exemplo? (Escreve $y = g(x+3)$ e $y = g(x)+3$), ambas sem módulo, é isso?
> **Cristina**: Sim.
> **Professora**: Porque é que não tem nada a ver? Pense lá? (Pausa) Como é que se faz este? Como é que se obtém o gráfico desta? (Aponta $y = g(x)+3$)
> **Cristina**: Vai subir três unidades.
> **Professora**: Vai subir três unidades, exatamente. Então e nesta?
> **Cristina**: Vai andar três para a, esquerda.
> **Professora**: Então não é a mesma transformação! Esta transformação, o gráfico desta obtém-se do gráfico de *g* fazendo uma translação vertical de três unidades. Não é? Para cima, subindo três. E enquanto aqui é uma translação a quê?
> **Cristina**: É uma translação para a esquerda.
> **Professora**: Para a esquerda, na horizontal. (A21_10)

A subalínea seguinte levantou mais dificuldades aos alunos. Alguns alunos interpretaram o sinal negativo na expressão $y = -g(x)$ como sendo o simétrico de *a* em $y = a(x-h)^2 + k$, considerando apenas a mudança do sentido de concavidade, enquanto outros compreenderam efetivamente a simetria relativamente ao eixo das abcissas. O Francisco que inicialmente identificou a transformação geométrica corretamente, entretanto parece partilhar da opinião do Diogo:

> **Cristina**: Como o *a* é negativo a parábola está virada para baixo.
> **Manuel**: Uma rotação … Virava-se ao contrário.
> **Cristina**: Faz-se uma simetria …
> **Francisco**: No eixo dos *xx*
> **Cristina**: Sim.
> **Professora**: Em relação a quê?
> **Diogo**: Ao vértice.
> **Cristina**: Em relação ao eixo do *x*.
> **Professora**: Do *x*!
> **Cristina**: Sim.

> **Professora**: Basta uma simetria em relação ao eixo do *x*, porquê?
> **Cristina**: Porque, porque é menos.
> […]
> **Diogo**: Eu acho que faz uma simetria mas em relação ao, ao vértice. (Pausa) Passa para baixo, o vértice mantém-se.
> **Professora**: Não percebi isso. Não sei o que é …
> **Diogo**: O vértice não mantém o mesmo ponto?
> **Francisco**: O eixo de simetria ficava *y* igual a menos quatro.
> **Professora**: Como?
> **Francisco**: *y* igual a menos quatro.
> **Professora**: *y* igual a menos 4? (Representa a reta) É aqui?
> **Diogo**: Sim. (A21_10)

A professora segue então a indicação relativa a cada uma das sugestões, representando a parábola correta, de acordo com as indicações da Cristina, e a parábola simétrica da inicial relativamente à reta $y=-4$, seguindo a sugestão do Diogo e do Francisco. Ao considerar a segunda opção surge uma dúvida em relação ao ponto de interseção com o eixo das ordenadas. A professora acaba por não aproveitar a oportunidade para esclarecer qual deveria ser esse ponto, focando antes a atenção dos alunos na expressão, de modo a decidirem qual a representação correta:

> **Professora**: Pronto, alguns acham que é este gráfico. Agora vou fazer de outra cor, de outra cor, vou fazer a azul (pausa), vou seguir ali a linha do Francisco e do Diogo, e eles vão-me explicar o que é que querem dizer com, o eixo de simetria é a reta y igual a menos quatro, e vão-me dizer como é que eu desenho o gráfico, em relação, fazendo como eixo de simetria y igual a menos quatro.
> **Francisco**: Então fazíamos, exatamente para baixo.
> **Professora**: Chego aqui e inverto a parábola para baixo em relação a este eixo, é isso que estão a dizer?
> **Diogo**: Sim.
> **Professora**: Então é isto (representa), e aqui vai passar no menos dez.
> **Diogo**: Oito, no menos oito.
> **Professora**: No menos oito. (Pausa) Sim, porque ali é … Porquê?
> […]
> **Professora**: Tome lá atenção um bocadinho, não esteja preocupado com o menos oito neste momento, se é menos oito ou menos dez, não é aí a grande preocupação!
> **Diogo**: É menos doze!
> **Professora**: (Ri) Não esteja a … Espere! Não interessa nada o que é que está ali. O que interessa é perceber o que é que vocês acham que é aquele valor. Vamos lá ver, eu estou a partir do

> inicial. Vou aqui assinalar as imagens e os objetos que eu tinha do inicial. Quais são os objetos da função *g* que nós conhecíamos as suas imagens? (A21_10)

Nesse momento a professora sentiu necessidade de explicitar a representação numérica, representando uma tabela com os objetos cujas imagens eram conhecidas a partir da representação gráfica de *g*. Um dos alunos vai respondendo à professora enquanto esta questiona de modo a completar a tabela, mas a Cristina interrompe, não percebendo como vão preencher a tabela sem saber qual a representação gráfica que está correta. A professora então salienta que deveriam ter começado por pensar desse modo para decidir como seria a representação gráfica:

> **Cristina**: *Stora*, se nós não sabemos qual é que está certo, também não sabemos quais são as imagens!
> **Professora**: Não, eu não quero saber agora dos gráficos! Eu quero que vocês só reparem nas duas expressões, mais nada! Esqueçam aquilo que aqui está! Se aqui está no menos oito ou se está no menos sete, não interessa nada! Eu, aliás, eu deveria partir disto, na minha cabeça, para chegar aqui! Portanto estes gráficos neste momento não interessam nada! Não estou a olhar para o gráfico para poder pôr a resposta. Não é isso que eu quero, eu quero que a partir do que têm aqui escrito, consigam fazer, construir a tabela para poderem fazer o gráfico porque assim não sabem qual é que está certo. Então? Para zero diz o Pedro que é menos cinco.
> […]
> **Professora**: E para zero a imagem não é menos oito, nem menos nove, nem menos dez, nem menos onze.
> **Aluno**: Doze.
> **Professora**: Nem menos doze (ri). É menos cinco! […] As imagens passaram a ser o quê?
> **Cristina**: Simétricas.
> **Professora**: Simétricas. Está menos *g*. […] E não precisávamos de ter o gráfico desenhado, pois não, Cristina?
> **Cristina**: Não.
> **Professora**: Pois não. Porque nós, podemos é partir deste (tabela), e devemos pensar neste para poder esboçar o gráfico, é aí é que eu vejo o que é que acontece. (A21_10)

A subalínea seguinte poderia ter sido resolvida muito rapidamente, uma vez que a Cristina conseguiu de imediato identificar a transformação geométrica e dizer os valores que deveria colocar na tabela de modo a construir a representação gráfica, apesar de a professora ter começado por considerar uma tabela com os objetos que tinha usado na alínea anterior:

Professora: E neste caso? g de menos *x*?
Cristina: Aí o eixo de simetria vai ser o *Oy*.
Professora: Então mas porquê?
Cristina: Porque se nós agarrarmos no …
Professora: (Pausa, representa a tabela com os objetos) O que que a Cristina disse, há bocadinho?
Cristina: Eu não punha isso assim *Stora*!
Professora: Não?
Cristina: Não. Eu punha, punha o *y* como sendo as mesmas imagens e o *x*, punha menos *x*.
Professora: (Pausa) Ora bem, então diga-me lá o que é que na prática, houve?
António: Uma simetria em relação ao eixo dos *yy*.
Professora: Mas porquê? (Pausa) Uma simetria em relação ao eixo dos *yy*, então eu consigo desenhar o gráfico, assim sendo, eu desenho logo o gráfico, é? Como?
Cristina: Então, o vértice passa para três menos quatro. (A professora representa) Os zeros, o menos um passa para um o zero, e o menos cinco passa para cinco.
Professora: Um, zero …
Cristina: E cinco, zero.
António: E passa na mesma no cinco.
Cristina: Exatamente.
Professora: Não percebi, desculpa.
António: Tem que passar pelo cinco.
Professora: Passa aqui.
Cristina: Eu acho que é assim. (A21_10)

A discussão entretanto prolongou-se durante muito tempo, já que o Diogo acabou por lançar uma nova ideia para a discussão, dizendo que os objetos que a Cristina indicou corresponderiam a “menos *x*”:

Diogo: Posso dizer uma coisa, Stora?
Professora: Diz.
Diogo: Eu acho que dá das duas maneiras. Porque …
Professora: Mas quais duas maneiras?
Diogo: A maneira que a *Stora* tinha posto antes ali, *x* …
Professora: Não, eu pus ali os valores que estavam além, para ser se deveria pegar …
Diogo: Sim, os valores eram menos cinco, não era?
Professora: Menos cinco, menos três, menos um e zero (volta a fazer essa tabela)
Diogo: E vai dar igual porque ali era, o que a Cristina tem não é *x*, é o menos *x*.
Professora: Não é o que a Cristina tem, é o que nós temos.
Diogo: O que temos ali …
Professora: Nós temos …
Diogo: Ali o um, não é o *x*, é o menos *x*.

> **Professora**: O que é isso o menos x?
> (Risos)
> **Diogo**: É o menos *x*! (A21_10)

A professora parece ter tido alguma dificuldade em conduzir a discussão de forma rentável. A calculadora gráfica não foi utilizada e ninguém sugeriu recorrer ao artefacto, sendo o Diogo o primeiro e único a fazê-lo:

> **Professora**: Ora bem! (Pausa) Segundo o Diogo, segundo o Diogo, se nós tivermos aqui menos *x*, significa que, *g* de, o que é que nós queremos, de menos *x*, e quanto é o menos *x*?
> **Diogo**: É cinco.
> **Professora**: Menos, fica *g* de cinco, *g* de cinco, é quanto?
> **Diogo**: Fica zero.
> **Professora**: g de cinco é zero. É isso?
> […]
> **Francisco**: *Stora* basicamente nós aí quando temos menos *g* de *x* (A professora manda os alunos calarem) fazemos uma simetria em relação ao eixo do *x*, e quando temos *g* de menos *x* fazemos uma simetria em relação ao eixo dos yy.
> **Professora**: Pois, basicamente é isso.
> **Cristina**: Na teoria é isso.
> **Professora**: Basicamente é isso, mas agora, na prática, eu estou a ver na tabela que construímos, como é que, a maneira mais fácil de vocês construírem a tabela de modo a entenderem o que estão a fazer (pausa), não é verdade? (Silêncio) Eu aqui tenho escrito menos *x*, e disse que o menos *x* era cinco, não é verdade? E aqui tenho escrito *x*, quando o *x* é menos cinco, o Diogo diz que dá das duas maneiras. […] g de menos, menos cinco, que é igual a quê?
> **Diogo**: g de cinco.
> **Professora**: Que é igual a g de cinco, e quanto é o g de cinco?
> **Sofia**: Zero.
> **Professora**: Zero! Porque sabemos através desta. (Pausa) O *g* de cinco não é zero! (Alguns perguntam não?) É?
> **Diogo**: Então está logo mal desde o início.
> […]
> **Professora**: Vocês acham que o *g* de cinco é zero?
> (Vários respondem não)
> **Professora**: Então está mal (risca na tabela).
> **Manuel**: Então e agora?
> **Professora**: Então e agora? (Risos) Quanto é o g de cinco?
> **Diogo**: Eh! Queres ver que eu vou à calculadora? (A21_10)

A professora, no entanto, reagiu negativamente à alusão do Diogo, e a calculadora gráfica continuou a ficar de fora da resolução da tarefa:

Professora: Mas como é que vais à calculadora?
Diogo: Então, tenho aquela, parábola.
Professora: Então e como é que desenhas aquela parábola?
Diogo: Primeiro vou achar a expressão!
Professora: Então e como é que vais achar a expressão?
(Falam ao mesmo tempo e não se percebe)
Professora: Ah, pois! (Não se percebe) Então mas tu despachaste-te logo rapidamente a ir buscar a calculadora!
Diogo: Espere aí …
Francisco: Temos o vértice …
Professora: Temos o vértice.
Francisco: Temos, então já temos o *h* e o *k*.
Diogo: Substituímos por um ponto o *y* e o *x*.
Francisco: Vamos determinar o *a*.
Professora: Ah! Então não é vou à calculadora rapidamente, com essa facilidade! (A21_10)

Durante algum tempo continuaram com a discussão até concluírem que a tabela inicialmente proposta pela Cristina estava correta:

Professora: Mas, na prática, em termos práticos, do gráfico, significou que, partindo do pressuposto que este gráfico está correto, como vocês dizem. O que se passava para menos cinco, passou a passar-se a acontecer no cinco, é verdade, ou não? O que se passava para, o que se passava para menos três, passou a acontecer para quê? (Alguém diz três) Para três! Então isso terá que, está correto o que está aqui então escrito?
Diogo: Não.
Professora: Não! O que é que está mal ali?
Rita: O menos *x*.
Professora: O menos x. Então o que é que lá havia de estar?
Rita: *x*.
Professora: (Pausa) Vamos ver se será *x*.
[…]
Diogo: Ó *Stora*, mas assim tínhamos que ir primeiro determinar o gráfico!
Professora: Não!
Diogo: Tínhamos de ir fazer o gráfico!
Professora: Não! Também podíamos …
Diogo: Então íamos dar valores ao calhas?
Professora: Não! Não! Não íamos dar valores ao calhas.
Cristina: Não, menos *x*.
Diogo: Íamos dar valores simétricos?
Professora: Pensem lá o que é que a transformação fez! Eu não consigo, se eu puser os mesmos valores, o menos cinco, o menos três, o menos um e o zero, eu não consigo ver, logo, logo, o que é que se estava a passar com o *g* de menos *x*, pois não? Porque eu não sabia, vocês aqui começaram por dizer que era zero, vimos que estava mal, não sabemos a imagem, nós

> sabíamos a imagem dos valores menos cinco, menos três, menos um e zero, mas agora queremos, queremos o gráfico de *g* de menos *x*, ora ficamos logo a saber as imagens de que elementos? De que objetos? Dos simétricos destes que aqui estavam.
> **Diogo**: Para isso não precisamos de fazer contas!
> **Professora**: Pois não! (A21_10)

A subalínea seguinte foi resolvida seguindo um esquema semelhante, através da construção de uma tabela de valores e realçando a definição de módulo. Alguns alunos demonstraram dificuldade em compreender que $-x$ não tem que representar um número negativo. Na aula seguinte a professora teve que voltar a abordar a transformação $y = g\left(|x|\right)$, pois alguns alunos não conseguiram compreendê-la. A calculadora gráfica não foi utilizada, sendo as expressões analíticas das funções obtidas apenas na última alínea, como estava previsto.

6.2.4. Breve abordagem às funções trigonométricas

No final do tópico da trigonometria a professora decidiu propor uma ficha de trabalho com o objetivo de efetuar uma breve abordagem às funções trigonométricas (Anexo 17). Antes de entregar a ficha de trabalho definiu uma função trigonométrica como função real de variável real.

Desenvolvimento e evolução de esquemas

A professora começou por dizer que poderiam visualizar a representação gráfica de uma função trigonométrica na calculadora, mas entretanto pediu aos alunos para indicarem as imagens de alguns objetos através da função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, sem recorrer à calculadora, e visualizar a representação gráfica no final. Enquanto pede a colaboração dos alunos a professora efetua os cálculos no quadro e representa num referencial os pontos considerados:

> **Professora**: […] Ainda não visualizámos o gráfico da função seno de *x*, pois não? Vamos fazê-lo agora, vou-vos ensinar a, introduzir na calculadora, uma expressão analítica de uma função trigonométrica. Exatamente como nas outras funções, vão ao *graph*, não é? Introduzem a expressão analítica …

(A professora dá uma volta pela sala, alguns não trouxeram calculadora gráfica)
Margarida: Isto dá uma reta. (Pausa) Isto é uma reta.
Helena: É uma reta, *Stora*? (Pausa) É uma reta, não!
Sofia: Não é uma reta.
Helena: É uma reta desviada.
Professora: Não vamos explorar muito no décimo primeiro ano estas funções trigonométricas como funções reais de variável real, só, é mais no décimo segundo ano que vamos fazer um estudo aprofundado das funções, contudo, se vocês verificarem, e, tendo em conta que o domínio é então $\mathbb{R}$, o que é que será que se passa? O que é que se prevê que aconteça no gráfico da função? Quanto é o *f* de zero, mesmo sem calculadora?
[…]
Professora: […] Pronto, marcámos alguns pontos do gráfico. Interessa fazer para além do que se passa no intervalo de zero até dois pi, interessa, interessa-me continuar?
(Alguns respondem que não)
Professora: Porquê?
Aluno: É sempre igual.
Professora: Vai ser igual, porquê?
Francisco: Porque o seno varia de dois pi em dois pi.
Aluno: Porque se ela varia de dois pi, em dois pi, depois é sempre igual.
Professora: A função é periódica de período positivo mínimo dois pi, já tínhamos visto isso. (A1_11)

A professora pergunta o que acontece para valores de *x* negativos e alguns alunos consideram que a representação gráfica é simétrica em relação ao eixo das ordenadas, outros em relação ao eixo das abcissas. A professora diz para verificarem com a calculadora:

Professora: […] Então, e para a parte negativa? Será o quê? Para menos pi sobre dois, etecetera?
Aluno: Será (pausa), simétrica.
Helena: Sim.
Professora: Deste?
Aluno: Sim. Em relação …
Professora: Em relação a que eixo?
Aluno: Dos *yy*.
Professora: Então quanto é que é o *f* de menos pi sobre dois?
Aluno: É igual ao, ao *f* de (pausa), três meios de pi.
Helena: Não é em relação ao eixo dos *yy*!
Sofia: O quê?
Helena: É em relação ao eixo dos *x*.
Professora: Então verifiquem com a calculadora. (A1_11)

A professora deixou os alunos efetuarem a representação gráfica antes de chamar a atenção para o facto de a medida do ângulo ter que ser dada em radianos e pediu para confirmarem se a representação obtida continha os pontos que haviam determinado analiticamente. A Helena questionou a professora se deveriam ir à tabela, mas essa opção não é, no momento, valorizada pela professora:

> **Professora**: Ora vamos lá confirmar com a máquina aquilo que estamos a fazer. Já introduziram a expressão analítica na calculadora? (Alguns respondem já) Eu não, ainda não expliquei de propósito, o que, como é que, que gráfico é que iam obter para verem se estava bem ou não. Têm ali alguns pontos assinalados agora, agora introduzam a função. E, verifiquem se, o gráfico, contém pelo menos estes pontos que aqui pusemos. (Pausa) Manuel, está certo o teu?
> **Helena**: Mas pomos, na tabela?
> **Professora**: Não, podem pôr, ponham no gráfico mesmo.
> **Helena**: A equação?
> **Professora**: No gráfico, da função.
> **Manuel**: Não dá!
> **Professora**: Eu também me parecia que o seu não está bem. (A1_11)

Enquanto os alunos discutem os modos de verificar se os pontos pertencem à representação gráfica obtida, a professora questiona-os então acerca da unidade a considerar para a amplitude dos ângulos:

> **Professora**: Estamos a trabalhar, estamos a trabalhar com a máquina em quê? (Alguns respondem graus)
> **Diogo**: Em graus. (Pausa) Mas agora passamos para radianos.
> **Professora**: Então … (para um aluno) está em radianos?
> **Diogo**: Não, mas devia.
> **Professora**: (Para a turma) A máquina, para poder ver o gráfico, a máquina deve estar em quê? Radianos! É a primeira coisa que têm que fazer. (A1_11)

Enquanto a professora circulava aproximei-me do par Diogo/Francisco para perceber como é que estavam a confirmar se os pontos pertenciam ao gráfico da função, verificando que consideraram a opção de calcular o valor:

> **Investigadora**: Como é que confirmaram? Se aqueles pontos pertenciam ao gráfico, ou não?
> **Diogo**: Podíamos ir …

> **Francisco**: Era como fazíamos o ano passado, calcular um valor. Não pode ser.
> **Investigadora**: Não pode ser?
> **Francisco**: Eu lembro-me disso. Calcular um valor.
> **Diogo**: Calcular o valor de *x*, calculávamos em …
> **Investigadora**: E então, como é que podias confirmar, por exemplo, um deles?
> **Francisco**: Agora era colocar, por exemplo, *x* igual a pi sobre dois. (Pausa) vai dar *y* igual a três, que é o que está.
> **Investigadora**: (Pausa) É uma hipótese, não é? E mais?
> **Diogo**: Analiticamente.
> **Investigadora**: Agora era com a calculadora, mas pronto analiticamente também podia ser, mas já foi feito ali, não é? (Ri) (A1_11)

Depois de alguma exploração a pares, a professora dirige-se então novamente a toda a turma, mas a dúvida que anteriormente tinha surgido quanto à existência de simetria da representação gráfica em relação aos eixos acabou por não ser retomada.

> **Professora**: Se eu quiser continuar o gráfico (vai escrevendo no quadro), quanto é a imagem de menos pi sobre 2? Verifiquem com a calculadora agora. (Alguns respondem que é um). Verifiquem com a calculadora quanto é a imagem de menos pi sobre 2.
> **Diogo**: É um.
> **Francisco**: É um.
> **Professora**: (Vários alunos respondem que é um) É um. De menos pi?
> **Diogo**: É dois.
> **Francisco**: É dois.
> **Professora**: Menos três pi sobre dois?
> **Diogo e Francisco**: É três.
> **Professora**: (Alguns dizem um) O gráfico, repete-se não é?
> **Helena**: É.
> **Professora**: De dois pi em dois pi. (A1_11)

Uma aluna chama a professora pois não consegue visualizar a representação gráfica. A professora diz-lhe como mudar as unidades para radianos e fala-lhe do *zoom* trigonométrico. Apesar de estar a falar num tom de voz elevado, não chamou a atenção de todos os alunos para essa funcionalidade:

> **Aluna**: *Stora*, porque é que não dá?
> **Professora**: O que é que não dá? (A professora vai ao pé da aluna) *Shift Setup*, mas isso já fizemos tanta vez! Passar para radianos, estar em, isso é das coisas básicas que têm que saber

> na calculadora. (Pausa) *Zoom Trigonométrico*, agora tem que ajustar. (A1_11)

De seguida a professora questionou os alunos acerca da resolução de uma equação trigonométrica e foi possível perceber que os alunos facilmente recordaram os esquemas de utilização para resolver graficamente uma equação. No entanto, foi a professora que chamou a atenção para o número de soluções:

> **Professora**: Ora, há dúvidas como se introduzem as expressões analíticas das funções trigonométricas? (Pausa) E se eu por exemplo vos mandasse calcular o valor de *x* para o qual *y* igual, para o qual a imagem é, haaa, dois?
> **Diogo**: Faríamos uma reta, com *y* igual a dois, e calculávamos a interseção.
> […]
> **Aluno**: Traça-se uma reta.
> **Professora**: Traça-se uma reta, e quantas respostas obtém?
> **Helena**: Muitas!
> **Sofia**: Muitas.
> **António**: Infinitas.
> **Professora**: Infinitas! Porquê?
> **António**: Está sempre a repetir-se.
> **Helena**: Repete-se de pi, de dois pi em dois pi.
> […]
> **Professora**: Então quantas, diz o António que tem infinitas soluções. Exatamente, pois tem infinitas soluções, só não terá infinitas se eu quiser limitar a quê? (Pausa)
> **Helena**: A um intervalo.
> **Francisco**: A um certo intervalo.
> **Professora**: A um intervalo, exatamente. (A1_11)

Dificuldades dos alunos

Alguns alunos questionaram a professora sobre o modo de obter os valores máximo e mínimos analiticamente e esta chamou a atenção de todos, aproveitando a função que inicialmente tinha utilizado, $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, para ensinar a determinar o contradomínio analiticamente. Em seguida passou para outro exemplo em que o argumento da função era $2x$, o que levantou dificuldades a alguns alunos. A calculadora gráfica poderia ser utilizada para explorar as diferenças entre as representações gráficas, considerando para argumento x ou $2x$, mas não foi considerada:

Professora: Agora têm que ter atenção (pausa), é se, por exemplo, em vez desta que aqui está (pausa), fosse, *g* de *x* igual a, quatro menos, menos dois seno de dois *x*, por exemplo, o que é que nós sabíamos desta logo à partida? (Silêncio durante algum tempo) O que é que nós sabemos da função seno de dois *x*? (Silêncio) Varia entre que valores?
Aluno: Menos dois e dois.
Professora: Será? (A1_11)
Francisco: Não.
António: Não, não pode variar entre menos dois e dois.
Professora: Dois *x* não é o mesmo que estar lá, dois *x* não é o mesmo que estar *x*? (Ouve-se sim) É diferente?
Francisco: Não.
Professora: Não vimos também, quando pensámos nas equações, não pensámos sempre na mesma forma?
Helena: Sim (Os restantes estão muito silenciosos).
Professora: Seno de dois *x*, dois *x* é o argumento, é um ângulo qualquer (escreve), irá variar entre quê e quê? (Silêncio)
Diogo: Entre menos um e um.
Professora: Entre menos um e um. O que está a dizer, João, é se fosse o dois a multiplicar pela função …, não é? (A1_22)

A resolução gráfica das equações trigonométricas não levantou dificuldades aos alunos, que facilmente adaptaram os esquemas de utilização, conseguindo responder às questões colocadas na ficha. Contudo, o mesmo não aconteceu com a resolução analítica, sendo possível perceber algumas dificuldades na resolução das equações trigonométricas.

6.2.5. Primeira abordagem ao tópico “Funções Racionais”

Este tópico foi iniciado com um problema, ditado pela professora (Anexo 18). Os alunos foram resolvendo e a correção foi sendo feita paralelamente.

O tipo de função envolvida

Os alunos não tiveram grande dificuldade em compreender a expressão que relaciona o preço do litro de sumo, com o número de litros de sumo de ananás da mistura, como se verifica pelo seguinte diálogo entre o Diogo, o Francisco e a Sofia:

Diogo: Ah! Já percebi, porque é que se chega a esta expressão. (Não se percebe) Dois *x* é do, do preço da laranja, *x* é a quantidade, por litro, aumenta mais dois euros.
Sofia: cento e trinta é o custo do sumo de ananás.

> **Diogo**: Depois mais cento e trinta, é o preço fixo do ananás, que é vinte vezes seis e meio. Sim, que é cento e trinta. Depois em baixo é a quantidade de cada, como é o ananás e … (não se percebe).
> **Sofia**: Depois como é que chegas à parte?
> **Diogo e Francisco**: Então, é o preço dois euros vezes *x*.
> **Sofia**: Ah! Dois euros!
> **Francisco**: E o outro, o outro é o cento e trinta, que é o vinte vezes seis e meio. (A3_11)

A professora pretende que os alunos compreendam a diferença entre o tipo de funções com que trabalharam anteriormente e a função envolvida neste problema, o que o Francisco faz de imediato:

> **Professora**: Então vamos lá ver, essa, portanto, estamos perante uma nova função. Que é a função *p* de *x* igual a dois [lê], este tipo de função é semelhante às que nós estudámos no ano anterior? (Alguns alunos respondem não). Já tínhamos estudado alguma função deste, desta família? Não? Porquê? Carolina?
> **Carolina**: Não sei!
> **Professora**: Qual é a diferença, que vos aparece, ou que notam, em relação a esta função que têm aqui, esta expressão, e as que nós estudámos no ano anterior?
> **Francisco**: Tem um denominador.
> **Professora**: Tem denominador! Então quer dizer que eu posso, posso fazer isto, se fosse esta (escreve no quadro uma função com numerador igual e denominador 5), se fosse esta, também tinha o mesmo problema que aquela?
> **Sofia**: Não.
> **Professora**: Também tem denominador!
> **Francisco**: Não, não tem incógnita. (A3_11)

Com o objetivo de definir função racional, a professora foi questionando os alunos, que foram estabelecendo conexões entre a representação algébrica e gráfica de famílias de funções já estudadas.

> **Professora**: Esta (segunda que escreveu) é um caso particular, que posso até escrever desta maneira (escreve na forma $y = ax + b$), e sem fazer nada, o que é que eu seu já do gráfico desta função?
> **Francisco**: É uma reta.
> **Professora**: É uma reta! Exatamente. Será que o gráfico desta também é uma reta?
> **Francisco**: Não.
> **Diogo**: Talvez!

> **Professora**: Será que esta família de funções, será que esta função, existe sempre? Muitas questões nós podemos colocar, à volta destas funções. Agora, é uma nova função. E como é que eu a obtive? O que é que está no denominador e no numerador?
> **Cristina**: Variáveis.
> **Professora**: Estão o quê?
> **Cristina**: Variáveis.
> **Francisco**: Uma incógnita.
> **Professora**: O que é que representa esta expressão? (Pausa) Como é que se chamam, o que é que representa esta expressão, que está no numerador? (Uns respondem *mx*+*b*, outros reta) Então o que é que *mx* mais *b*, representa, em relação às funções que estudámos no ano anterior? (Pausa) É uma reta, o gráfico é uma reta, é verdade, mas estas funções são o quê? (Continuam a responder retas, ou funções afins). Então o que é esta função, por exemplo (escreve $g(x) = x^2 - 4x + 1$)?
> **Diogo**: Uma parábola!
> **Professora**: (Escreve $h(x) = x^3 + 3x$ também) O que é que são estas funções? O gráfico é que é uma parábola, não é a função, pertencem a que família de funções? (A3_11)

Após algumas tentativas, a professora conseguiu que o termo polinómio fosse recordado, definindo em seguida função racional:

> **Professora**: Vocês já estudaram isto no sétimo ano!
> **Diogo**: Ah! Onde é que isso já vai! São poli … qualquer coisa, não?
> **Professora**: Ah, pois são!
> **António**: Polinomiais!
> **Professora**: Todas elas são, são funções polinomiais, estas, e esta também é (inicial)? (Silêncio) Será que esta também é?
> **Afonso**: São duas.
> **Professora**: Quê?
> **Afonso**: Funções. Polinomiais.
> **Professora**: Então? São duas como? Eu tenho aqui, uma soma de duas, um produto, o que é que eu tenho aqui?
> **Aluno**: Uma divisão.
> **Professora**: É um quociente entre duas funções polinomiais, é verdade. Trata-se de um quociente entre duas funções polinomiais, não é? (A3_11)

Desenvolvimento e evolução de esquemas de utilização

A professora diz que podem resolver a alínea c) salientando a necessidade de introduzirem corretamente a expressão e ajustarem a janela de visualização:

> **Professora**: […] Assim, podemos tentar responder à alínea c), de forma muito semelhante aquilo que se fazia com as outras funções. Vão tentar ver se conseguem responder à alínea c). Tendo o cuidado de, introduzir corretamente a expressão analítica da função, e pensar qual a janela que se adapta e essas coisas todas. (A3_11)

Aparentemente os alunos não têm dificuldade em responder à questão, contudo, nem todos atenderam ao contexto do problema, considerando representações gráficas com valores de x ou P negativos. Nem todos conseguiram também introduzir corretamente a expressão analítica da função:

> **Professora**: Levantam-se então aqui algumas questões, acho que já todos conseguiram, quase, todos conseguiram fazer, responder à questão. Haaa, todos fizeram o gráfico (pausa), ouve aqui alguns erros, que, que não permitiram visualizar o gráfico correto. Um dos erros foi, um dos erros, ou apenas esse, foi a introdução errada da expressão analítica dessa função. Para introduzirem a expressão analítica desta função tem que ter o cuidado de quê?
> **Carolina**: Meter entre parêntesis.
> **Professora**: Colocar entre parêntesis, o quê? (Não se percebe o que a aluna diz) As duas expressões! O numerador e o denominador, não foi? […] A resposta, qual é que foi a resposta ao problema? Qual é, qual é uma janela, uma janela que se adapta ao contexto deste problema? Aliás, quase todos os gráficos que eu estou a ver, e que vi, havia aí, a janela não está corretamente ajustada ao contexto do problema, embora permita visualizar o gráfico que se pretende, e responder à questão, porquê? Como por exemplo o teu Francisco, porquê?
> **Francisco**: Porque … (pausa longa).
> **Diogo**: O x não pode ser menor que zero.
> **Francisco**: Sim.
> **Professora**: O x não pode ser negativo, é verdade. E copiaste o gráfico, para aqui, para este lado.
> **Francisco**: Pois foi, pois foi. (A3_11)

A escolha da janela de visualização é decidida tendo em conta o contexto do problema, através de questionamento por parte da professora:

> **Professora**: Porque é que é que o x não pode ser negativo?
> **Diogo**: É porque o preço não pode ser …
> **Francisco**: É porque (não se percebe o que diz).
> **Professora**: O que é o x?
> **Francisco**: É o …
> **Aluno**: É o número de litros.

> **Diogo**: Ah, não! É a quantidade de …
> **Professora**: Número de litro, exatamente. Não podia ser negativo. No mínimo podia ser quanto?
> **Diogo**: Zero.
> **Professora**: Zero.
> **Professora**: E o *x* máximo? (Pausa)
> **Francisco**: É um valor qualquer.
> **Professora**: Poderia ser um valor qualquer.
> **António**: Acima de vinte. (Alguns dizem que colocaram 25)
> **Professora**: Acima de vinte? Para obterem o resultado, mas também podia ter sido superior. E agora? E o *y* mínimo?
> **Carolina**: Zero.
> **Professora**: Qual o valor para o *y* mínimo? O que é que o *y* nos dá? Qual é a informação do *y*?
> **Diogo**: Dá-nos o preço por litro …
> **Professora**: O preço mínimo também tinha que ser (pausa), zero! Portanto tinha que ser positivo também, tinham que ter esse cuidado, a representarem graficamente a função, adaptando ao contexto do problema. (A3_11)

A Sofia foi resolver a questão ao quadro, tendo recorrido à opção interseção no menu gráfico. A professora em seguida questionou os alunos relativamente a outros modos de, recorrendo à calculadora, obterem a solução da equação:

> **Professora**: Ouve alguma, ouve alguma forma diferente de resolução? (Alguns dizem que sim, analiticamente) Então qual é que foi?
> **Luís**: Íamos à expressão …
> **Professora**: Traçaram o gráfico, começaram por traçar o gráfico da função, vocês, e depois?
> **Aluno**: Calcular o *x*, quando o *y* é igual a …
> **Professora**: Foram calcular o valor de x, sabendo que o *y* era? (os alunos respondem 4,25). Havia outras formas, havia possibilidade de resolver o exercício de outra forma para além destas duas, ou não? (Ouve-se sim) Sem ser ainda analiticamente. Graficamente? Graficamente! Não! Recorrendo à calculadora, sem ser analiticamente. Havia mais alguma forma, sem ser utilizando o gráfio da função, a representação gráfica, de poder resolver o problema? (Os alunos dizem que não) Recorrendo a algum menu diferente, do gráfico? (Uns dizem que não, um aluno diz que sim) Havia? Então qual é?
> […]
> **Diogo**: Haver, se calhar há!
> **Professora**: Há mais algum menu na calculadora, que permita ver, coordenadas de pontos da função? (Os alunos respondem que há)
> **Diogo**: Eu digo, é a *Table*!
> **Professora**: Há? Então é o quê? Onde? Ó Diogo, diz lá!

> **Diogo**: Na *table*!
> **Professora**: Na tabela! (Risos) Poderiam recorrer à tabela para poder determinar o ponto. Podiam, ter recorrido à tabela. (A3_11)

Dificuldades dos alunos

Os alunos demonstraram alguma dificuldade em compreender que não poderiam resolver uma equação fracionária reduzindo e desembaraçando de denominadores como "habitualmente". A professora conduz a discussão para as situações em que a fração não tem significado.

> **Professora**: Ora, a Carolina fez aqui outro tipo de resolução. Não era suposto hoje resolver esta condição analiticamente. No entanto, já agora aproveitamos a resolução dela para ver se de facto há algum erro na resolução dela, ou se tem alguma razão naquilo que fez. Não se importa de ir fazer Carolina?
> […]
> **Professora**: […] Tirou os denominadores, e pode? (Alguns dizem que pode) Para qualquer valor de *x*, pode-se sempre aqui tirar o denominador?
> […]
> **Professora**: Há algum problema, será que há algum problema, quando, qual é a diferença entre esta equação e as outras equações que nós já estávamos anteriormente habituados a fazer?
> **Francisco**: É a incógnita (mais alguns respondem).
> **Professora**: É a incógnita no denominador, pois é! E será que traz algumas implicações o facto de existir uma incógnita no denominador, ou será que podemos também reduzir ao mesmo denominador, tirar os denominadores e essas coisas todas, sem termos nenhuma preocupação?
> **Diogo**: É igual (Outros também concordam).
> […]
> **Professora**: Qualquer fração, qualquer fração tem sempre significado? (Silêncio). Dois quintos, existe?
> **Diogo**: Existe.
> **Professora**: Existe. E sete sobre pi, existe? (Não respondem logo) Existe!
> **Tatiana**: Não existe é sete sobre zero.
> **Professora**: A Tatiana diz que não existe este! Sete sobre zero, existe ou não existe?
> **Cristina**: Não se pode dividir nada por zero. (A3_11)

Os valores para os quais a fração não tem significado são relacionados com o domínio da função envolvida. A calculadora gráfica poderia ter sido utilizada para explorar um pouco melhor a representação gráfica da função, fora do contexto do problema, todavia a professora optou por não o fazer,

> **Professora**: […] Então que é isto de não tomar o valor menos vinte, tem a ver como quê da função? Estamos a falar …
> **Cristina**: Domínio.
> **Professora**: O domínio! Porquê? Porque uma função pode ou pode não existir para determinados valores de *x*. Esta por exemplo, não teria sentido, esta não teria sentido se o *x* fosse um valor negativo. Então temos sempre que pensar, qual o domínio da função. Ora, que tem a ver com, então não é assim tão simples, não é assim tão simples, chegar aqui, e, resolver a equação, tal e qual como se faziam as outras. (A3_11)

6.2.6. Estudo da família de funções $y = b + \frac{a}{x-c}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; b, c \in \mathbb{R}$

Estudo intuitivo da função $y = \frac{1}{x}$

Apesar de a professora ditar o título "Estudo analítico da função $f(x) = \frac{1}{x}$", este é feito intuitivamente, a partir da representação gráfica recorrendo à calculadora. O Francisco evocou a relação de proporcionalidade inversa existente entre as duas variáveis.

> **Professora**: O que é que vos parece que vamos fazer para começar a estudar a função?
> **Cristina**: O gráfico.
> **Francisco**: Atribuir valores ao *x*.
> **Professora**: O gráfico, pois é! O gráfico! Começar por fazer o gráfico. Então, vão à calculadora e tentem esboçar o gráfico desta função.
> **Diogo**: Ah! Está muito pequenino. O que é que se passou aqui? O que é que se passou aqui? Coitado! (Risos) Uma borboleta!
> **Francisco**: Ó *Stora*, estas são muito difíceis!
> **Professora**: Estas o quê?
> **Francisco**: Estas são muito estranhas!
> **Professora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque vão para cima e vão para baixo (ri).
> **Professora**: Tem dois ramos.
> **Francisco**: Pois tem.

> **Professora**: Mas vocês já falaram destas funções.
> **Francisco**: Então não estudámos!
> **Diogo**: Se calhar já.
> **Francisco**: Foi a, a proporcionalidade inversa.
> **Professora**: Muito bem!
> **Diogo**: Foi quando?
> **Francisco**: Quando demos a proporcionalidade inversa.
> **Diogo**: Ah!
> **Professora**: Na proporcionalidade inversa, exatamente! (A3_11)

A professora fez um esboço da representação gráfica da função, sem efetuar qualquer análise, assinalando apenas os pontos de abcissa um e menos um, e perguntou o domínio da função. Os alunos chegaram facilmente à conclusão de que o zero não faz parte do domínio, o mesmo se passando no caso do contradomínio. Ao serem questionados acerca da injetividade, alguns revelaram alguma confusão, colocando em causa a própria definição de função. Depois de esclarecidos quanto à definição de função injetiva, houve alguma hesitação relativamente ao facto de a função f ser ou não injetiva, talvez devido à representação feita no quadro. A professora aproveitou então para fazer uma exploração relativamente ao que acontece quando x tende para mais infinito, ou para menos infinito. A exploração não envolveu a calculadora, apenas a representação numérica mental:

> **Professora**: Estão a pensar que a partir de certa altura o gráfico da função é uma reta. O gráfico vai cada vez mais …
> **Aluno**: Descendo.
> **Francisco**: Então vai ter que ter zeros.
> **Professora**: Aproximando-se, aproximando-se mais, mais, mais do eixo, mas será que …
> **Diogo**: Não toca.
> **Professora**: Se vocês pensarem, se isso pode, será que isso pode acontecer? Ora reparem, para um objeto, por exemplo para mil, qual é a imagem?
> **Aluno**: Mil?
> **Diogo**: (Ri).
> **Professora**: Qual é a imagem? De mil? De acordo com esta função?
> (Ainda se ouve mil)
> **Francisco**: Ah! Já sei! Um sobre mil.
> **Professora**: Um sobre mil.
> **Francisco**: É pequeníssima.
> **Professora**: Então e quanto é a imagem de mil e um, por exemplo?
> **Diogo**: Um sobre mil e um.

> **Professora**: E qualquer outro valor que esteja entre mil e mil e um.
> **Diogo**: É sempre diferente.
> **Professora**: Alguma vez é igual?
> **Diogo**: Não.
> **Professora**: […] E à medida que o x é muito, muito, muito, muito grande (ouve-se mais pequenas), o que é que se passa com as imagens?
> **Francisco**: São muito, muito, muito pequenas.
> **Professora**: O que é que é isso de serem muito, muito pequenas?
> **António**: É inversamente proporcional.
> **Professora**: Mas o que é isso? É muito, muito pequenas? É próximo de quê? Menos cem mil? (Os alunos dizem que não) Então estão a aproximar-se sempre de quanto? (Alguns respondem zero). De zero! Não é? À medida que o x aumenta cada vez mais, as imagens estão a aproximar-se sempre, sempre de zero. (A3_11)

A análise da escrita dos intervalos de monotonia ficou para os alunos pensarem em casa, já que diziam que a função era sempre decrescente e a professora pretendia salientar o facto de não ser possível escrevê-lo sob a forma de reunião dos dois intervalos. Na aula seguinte efetuaram conclusões respeitantes à monotonia, sinal e paridade. Os alunos já não se recordavam das definições de função par e de função ímpar e foi necessário relembrá-las.

Desenvolvimento e evolução de esquemas de utilização

Apesar de na aula anterior já terem retirado algumas conclusões relativamente aos limites nos ramos infinitos, a professora diz para explorarem com a calculadora, salientando que os valores de x na janela de visualização têm que ser elevados. A representação gráfica é a única a ser utilizada:

> **Professora**: […] Acham que pode chegar a ser zero?
> (Os alunos dizem que não)
> **Francisco**: A *Stora* já disse que não. Nós fomos logo a primeira turma a ver esse assunto, *Stora*.
> **Diogo**: Pois fomos.
> […]
> **Professora**: (Dita o subtítulo) "Estudo da função para valores muito grandes de x". Podem ir experimentando na calculadora, como é que experimentam na calculadora valores muito grandes de x?
> **João**: Então dá-se um valor de x e vê-se o valor do y.
> **Professora**: Por exemplo, ou também, o que podemos fazer também? (os alunos não respondem) O vosso gráfico que está aí

> desenhado está em que janela? (Um aluno diz que está na *Standard*) Está na *Standard*? E será que estudar a função para valores muito grandes de *x*, posso fazer esse estudo nessa janela? (Alguns dizem que não, que é necessário aumentar a janela no *x*) Se eu quisesse apenas com a calculadora agora estudar, eu poderia fazê-lo, eu poderia fazer esse estudo apenas para, se eu quero estudar para valores muito grandes de *x*, eu podia tirar grandes conclusões, só, fazendo a janela de menos dez até dez?
> **Diogo**: Não (Outros também dizem não)
> **Professora**: Porquê? Dez é um valor quê?
> **Francisco**: Baixo.
> **Professora**: Ínfimo, tão pequenino, tão pequenino, não é? […] Porque se nós queremos valores muito grandes de *x*, não dá para estudar se o *x* for dez, não permite tirar conclusões. (A4_11)

Apesar de ser referida a dificuldade em visualizar a representação gráfica, não foi discutida nenhuma janela de visualização que permitisse intuir o limite quando *x* tende para mais infinito:

> **Professora**: Então aproxima-se sempre muito, muito, e cada vez mais de zero, não é assim? (Um aluno diz que nunca chega) Mas nunca chega! Então qual foi a janela que colocaram agora?
> **Diogo**: Isso não faz sentido, *Stora*. Então se há números infinitos, há de chegar um dia destes!
> **Professora**: Não!
> **Diogo**: Não? Ah! (Ri).
> **Professora**: Um a dividir por qualquer coisa, nunca há de ser zero, é tão próximo, tão próximo, tão próximo, quanto a gente queira, mas no entanto, não toma esse valor.
> **Francisco**: Olha aí (para a calculadora).
> **Diogo**: Lá está! (Risos)
> **Professora**: (Pega na máquina) O que é que estava a fazer?
> **Francisco**: Estava a tentar …
> **Diogo**: Puseste o quê? O maior número que te veio à cabeça! (Ri)
> **Professora**: Mesmo com mil já não se vê assim muito bem o gráfico, não é?
> **Francisco**: Pois não.
> **Professora**: É difícil de ver. (A4_11)

Noções de assíntotas

Depois do estudo intuitivo dos limites nos ramos laterais a professora informa que a reta de equação $y=0$ é uma assintota horizontal do gráfico da função e questiona os alunos acerca da noção de assintota horizontal:

> **Professora**: […] Qual foi a ideia que ficou na vossa cabeça de assíntota horizontal.
> **Helena**: Uma reta …
> **Professora**: Uma reta, exatamente, muito bem. Começou muito bem, é uma reta, é verdade. É uma reta que quê?
> **Helena**: Que …
> **Professora**: Que ou da qual …
> **Helena**: Da qual a função se aproxima.
> **Professora**: Da qual a função se aproxima. Muito bem. Quando?
> **Helena**: Quando …
> **Professora**: Será que não é preciso dizer quando?
> **Helena**: Se calhar não. (Outros alunos dizem não).
> **Professora**: Não? Então podia ser quando o *x* fosse um valor qualquer?
> **Helena**: Quando o limite … qualquer coisa.
> **Professora**: Quando o *x*, o quê?
> **Helena**: Quando o *x* tende, para, …
> **Professora**: Onde? (Um aluno diz mais infinito) mais infinito, ou? Ou para menos, afinal é preciso dizer quando!
> **Helena**: É.
> **Professora**: É uma reta, é verdade, da qual a função se aproxima, muito! Quando o *x* tende para mais infinito ou para menos infinito. Também a formalização das noções de assíntota e as assíntotas vão-se estudar melhor no décimo segundo. (A4_11)

A professora representa graficamente, no quadro, uma função com uma assintota horizontal de equação $y=-3$ quando *x* tende para menos infinito e outra de equação $y=2$ quando *x* tende para mais infinito. Ao questionar os alunos acerca do número de assintotas, foram surgindo algumas questões, como o facto de o gráfico da função intersetar a assíntota, e o número máximo de assintotas horizontais que uma função poderá ter. O Diogo inicialmente parecia um pouco confuso, considerando que a assintota tinha ser $y=0$, mas a professora não ouviu o seu comentário, nem o da Carolina que também perguntou o mesmo:

> **Alexandre**: Ó *Stora*, sendo assim, o gráfico passa pelo *y* igual a dois.
> **Diogo**: Então mas aquilo não é quando passa no zero? (Pergunta baixinho ao Francisco)
> **Francisco**: Hum?
> **Diogo**: Não é quando passa no eixo *Ox*?
> **Helena**: Não.
> **Diogo**: A assíntota? (Pausa) É.

> **Professora**: E será que não pode passar? (Os alunos ficam calados) O Alexandre levantou aqui um problema. Será …
> […]
> **Professora**: Porque é que colocou a questão?
> **Alexandre**: Para já também não pusemos nenhuma restrição, dizer que não podia assumir esse valor, apenas dissemos que se podia aproximar.
> **Professora**: Sim.
> **Alexandre**: Mas também …
> **Professora**: Que se podia aproximar, pois exatamente. Seria essa a sua dúvida, não foi?
> **Alexandre**: Achei que se se podia aproximar, não podia tomar esse valor.
> **Professora**: Dizer que se pode aproximar, e pergunto, será que pode ser esse valor? Pode.
> **Helena**: Aproximar não é encostar.
> **Professora**: Pode ser, porque o que é que é ser assíntota?
> **Carolina**: Não é y igual a zero, não percebi! (A4_11)

A professora dá a definição de assíntota horizontal e na aula seguinte volta a reforçar a noção e avança para a definição de assíntota vertical. Neste caso não recorrem à calculadora gráfica, fazendo o estudo apenas a partir do esboço da representação gráfica, que a professora voltou a colocar no quadro.

> **Professora**: […] Também observando o gráfico se vê que tem, terá uma assíntota vertical. Qual é a reta que vos parece, intuitivamente, que é uma assíntota vertical? (Vários alunos respondem *x* igual a 0) A reta *x* igual a zero. […] Quando nós no situamos muito perto de zero, muito próximo de zero significa que, estou aqui muito perto de zero, portanto, posso estar à esquerda de zero (assinala na representação gráfica), são valores quê? (Alguém diz negativos)
> **António**: À esquerda? São negativos.
> **Professora**: Inferiores a zero, onde é que está o gráfico da função quando eu estou aqui muito próximo de zero? Onde é que vocês encontram o gráfico da função?
> **Diogo**: Muito próximo (pausa), do eixo dos *yy*.
> **Professora**: Aqui para baixo, sim. Muito próximo (vai riscando), está aqui, toma valores muito, muito quê?
> **Diogo**: (Pausa) Pequeninos.
> **Professora**: Muito pequenos, e portanto … Então pode-se traduzir em linguagem, mais matemática, quando *x* tende para zero, por valores inferiores a zero, ou à esquerda de zero, zero menos, o *f* de *x* tende para onde? (Pausa) A função *f* vai tender para onde?
> **Francisco**: Menos infinito.
> **Professora**: Menos infinito! A função *f* tende para menos infinito. (A5_11)

No debate acerca das funções cujos gráficos poderiam ou não ter assíntotas verticais, o Francisco referiu uma reta vertical, não identificando que, nesse caso, não estaria sequer perante o gráfico de uma função. O *conceito definição* foi, assim, revisitado.

> **Professora**: […] Mas poderá haver alguma [função] que possa ter assíntotas verticais mesmo que seja contínua? (Pausa) Ou não?
> **Diogo**: Não.
> **Professora**: Não?
> **Francisco**: Sim.
> **Professora**: Sim? Então como é que é o gráfico?
> **Francisco**: A reta *x* igual a qualquer coisa.
> **Diogo**: (Ri)
> **Professora**: Reta? (Os alunos riem)
> **António**: Se for uma reta, acho que não.
> **Francisco**: Se for a reta *x* igual a dois.
> **Professora**: A reta *x* igual a quê?
> **Francisco**: Dois.
> **Professora**: A reta *x* igual a dois. (Pausa) Representa o gráfico de uma função?
> **Francisco**: (Volta-se para a investigadora) Não (risos).
> **Professora**: A reta *x* igual a dois (pausa, representa no quadro), é esta. (Pausa) Não é? Não é, Francisco?
> **Francisco**: Pois. (A5_11)

Um dos alunos coloca uma questão à professora, já que a representação gráfica de uma função quadrática lhe dá a ideia da existência de duas assíntotas verticais:

> **António**: *Stora*, se for, uma, uma parábola, depois quando está, tem a parte, tem a parte côncava …
> **Professora**: Eu estou a ouvir.
> **António**: Tem a parte côncava, e depois tem, pode ter duas retas, e depois …
> **Professora**: Uma parábola qualquer, esta (representa no quadro), é isto?
> **António**: Sim, mas depois, que não … ah! Pois (não se percebe)
> **Professora**: A parábola, esta parábola, o gráfico desta parábola, ele cresce indefinidamente! Não há! O gráfico desta parábola …, qual é o domínio?
> **Francisco**: Menos infinito a mais infinito.
> **Professora**: Menos infinito a menos infinito, e neste domínio a função é ou não é contínua? (pausa longa) Hum?
> **Diogo**: É.
> **Professora**: É. É uma linha sempre contínua, sempre seguida. O, o gráfico, pode dar a ideia, pode, pode dar alguma ideia, pode

> até parecer um bocadinho que se trata aqui de uma assíntota, mas não tem assíntota nenhuma, isto não tem assíntotas verticais, porque o domínio é de menos infinito a mais infinito e a função é contínua nesse domínio. Neste caso não tem mesmo assíntotas verticais, certo? Cresce indefinidamente, mas também cresce indefinidamente os valores de *x*, não é? (A5_11)

A discussão prolongou-se com a representação, no quadro, de funções cujos gráficos possuem mais do que duas assíntotas verticais e a conclusão de que o gráfico de uma função pode ter várias assíntotas verticais.

Estudo da família de funções $y=\frac{a}{x}, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

A professora começou por pedir aos alunos para indicarem três valores para o parâmetro *a*, de modo a fazerem a representação gráfica na calculadora e poderem estudar aquela família de funções. Neste caso o Francisco sugeriu um valor fracionário para o parâmetro *a*, o que sai fora dos valores que os alunos usualmente atribuem aos parâmetros, e a professora realçou a diferença relativamente aos restantes valores indicados, por ser inferior a um:

> **Professora**: […] Digam três exemplos que vos pareçam, que vos pareçam significativos para fazermos o gráfico, rapidamente, e tirarmos algumas conclusões.
> **Alexandre**: O primeiro era o menos um.
> **Professora**: O primeiro era o quê?
> **Francisco**: Eu para mim, metia primeiro um.
> **Professora**: Menos um, onde, Alexandre?
> **Alexandre**: No *a*.
> **Professora**: *y* igual a menos um sobre *x*, outra?
> […]
> **Francisco**: *y* igual a três sobre *x*.
> […]
> **Diogo**: Menos trezentos (ri).
> **Francisco**: Dois sobre três *x*, não sei se altera alguma coisa.
> **Professora**: Então é dois terços sobre *x*, é o mesmo. […] Porque é que escolheu o dois terços, ou porque é que escolheu dois sobre três *x*, qual é a diferença?
> **Francisco**: Pensava que a diferença se …
> **Professora**: E pensava, se calhar bem, tinha diferença porquê?
> **Francisco**: Porque … (pausa longa).
> **Professora**: É um valor quê? (Pausa longa) Então eu disse só três exemplos, por algum motivo também, vocês também

podiam fazer, cinco sobre *x*, sete sobre *x*, oito sobre *x*, porque é que não me deram estes casos?
Francisco: Porque era igual.
Professora: Porque era igual! Então porque é que esse é diferente?
[…]
Helena: Não é inteiro.
Professora: Não é inteiro. Então cinco quartos sobre *x*, seria igual?
[…]
Sofia: É menor que um.
Professora: Um é menor que um! Pois é! Um deles é menor que um e o outro não é! (A5_11)

Os alunos recorrem à calculadora gráfica para representar as funções, mas a professora acaba por sugerir que olhem para as representações que estão no livro:

Professora: (Para a Sofia) Já estão todas?
Sofia: Já. Está um bocado confuso, mas já.
Professora: Pois, tem que seguir, uma de cada vez. Mas também no livro … (Em voz alta) Na página trinta … Já todos conseguiram esboçar os gráficos? Então, haaa, na página trinta, do livro, fizeram os gráficos? Que conclusões é que tiraram? (A5_11)

Os alunos não demonstraram dificuldades em estabelecer as conclusões, no entanto, o Francisco pediu à professora para as ditar, como habitualmente.

Estudo da família de funções $y = b + \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assim que a professora disse para considerarem a soma de uma constante à família de funções vista anteriormente, o Alexandre evocou os invariantes operatórios anteriormente estabelecidos, o mesmo se passando com outros alunos. Neste caso as conclusões foram obtidas, antes de recorrerem ao artefacto:
Alexandre: Aqui é como a parábola.
Professora: É?
Alexandre: Talvez.
Professora: O Alexandre diz que aqui é como a parábola, o que é que isso quer dizer?
Alexandre: Quer dizer que o *b* vai influenciar, se o gráfico (gesto com a caneta) está mais acima ou está mais abaixo.
Professora: Então, diz-me dois exemplos, em que possas ver isso.

> […]
> **Professora**: Desce duas, então, pensam sem máquina, antes de fazer, estão a pensar que se passa o mesmo que se passava nas outras, ou seja, qual era a influência daquele parâmetro? (Pausa) Do *b*?
> **Francisco**: Fazia …
> **Professora**: O gráfico obtém-se de um sobre *x* fazendo o quê?
> **Rita**: Uma translação.
> **Professora**: Uma translação, de quê?
> **Francisco**: De duas unidades para cima.
> **Professora**: De duas unidades para cima, no primeiro caso, ou seja, na vertical, em ambos os casos, duas unidades para cima, ou de quê?
> **Francisco**: De duas unidades para baixo.
> **Professora**: De duas unidades para baixo. Podem fazer os gráficos na máquina e verificar se temos razão ou não. (A5_11)

Dificuldades dos alunos

Ao efetuarem o estudo de um dos elementos da família de funções surgiu a necessidade de determinar o zero, tendo os alunos recorrido à calculadora gráfica. A professora, porém, pediu para resolverem também analiticamente, sendo possível perceber, mais uma vez, alguma dificuldade em identificarem a razão de o domínio não ser o conjunto dos números reias e compreenderem a diferença do processo de resolução da equação nesse caso. A explicação da professora baseou-se essencialmente no facto de existir uma variável no denominador:

> **Professora**: Igualar a expressão a zero, então um sobre *x*, mais dois, igual a zero […] (O Francisco vai dizendo com fica) A única coisa, a única coisa diferente nestas equações, e eu já vos tinha chamado a atenção na última, na aula anterior, na outra […] Quanto é que o *x* não pode ser?
> **Sofia**: (Pausa longa) Dois. (Os alunos falam ao mesmo tempo, não se percebe).
> **Professora**: Quanto é que o *x* não pode ser? (Vários dizem dois).
> **Helena**: Zero. Zero!
> **Professora**: Então qual é o valor que não faz parte do domínio? (Respondem zero) […] Ou então escrevo e *x* pertence ao domínio. Têm que ter atenção, estas equações, não são, bem iguais, às outras, que não têm o quê?
> […]
> **Professora**: Então qual é o problema ali naquela, é estar o quê no denominador?
> **Sofia**: *x*!

> **Professora**: O *x*! (Muito barulho) […] Então, ó Sofia, já podia ter dito, há mais tempo. (A5_11)

Estudo da família de funções $y = \dfrac{a}{x-c}, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

A professora questiona os alunos sobre a família de funções que falta estudar ao que os alunos respondem, mostrando também que recorrem aos invariantes operatórios já instituídos. Para alguns alunos continua, todavia, a ser difícil identificar o sentido da translação horizontal:

> **Professora**: Então, outra família de funções. O que é que vos parece que vamos estudar também?
> **Alexandre**: Agora é o *c*!
> **Professora**: Onde é que ele está?
> **Alexandre**: (Faz um gesto vertical) No denominador.
> **Professora**: Diz o Alexandre que agora devo colocar *c* no denominador. (Está muito barulho) Então fica como?
> **António**: *a* sobre, *x* menos ou mais c.
> **Professora**: *x* menos ou mais um, *x* menos *c*, sim. […] Dois exemplos!
> **João**: Pode ser menos dois e mais dois, ou não?
> **Professora**: Então, mas onde?
> **João**: No *c*.
> […]
> **Manuel**: Agora anda para a direita e para a esquerda.
> **Professora**: Então agora, agora, tendo em conta aquilo que se aprendeu nos anos anteriores, quais, qual é que é, no ano anterior, qual vos parece ser a influência deste parâmetro?
> **António**: É em relação ao eixo do *x*.
> **Professora**: Então vamos desenhar o gráfico, sem, sem ser necessário a calculadora. (O João já tinha feito na máquina) Não era preciso agora! Pensar sem, sem recorrer agora à calculadora.
> […].
> **António**: Anda duas unidades para a direita.
> **Francisco**: Para a esquerda.
> **Professora**: A primeira anda duas unidades para onde?
> **Francisco**: Para a esquerda.
> **Professora**: O gráfico desloca-se duas unidades para onde? Não é bem anda, mas desloca-se duas unidades para onde? (Alguns dizem direita)
> **Alexandre**: Para a esquerda, porque o *c* é menos 2. (Alguns confirmam e dizem para a esquerda). (A5_11)

Capítulo 7

Estudo de caso Diogo

7.1. Apresentação

O Diogo iniciou o décimo ano com quinze anos, mora nas proximidades da escola que frequenta e pretende prosseguir estudos numa área relacionada com a saúde. Ao longo da sua escolaridade teve sempre bons desempenhos e a Matemática é das suas disciplinas preferidas: "É uma das disciplinas que eu mais gosto. Sempre desde, desde o quinto ano, desde a primária, foi sempre uma das disciplinas que também tive mais facilidade e que eu mais gosto, a Matemática" (E1). Durante o Ensino Básico não houve nenhum tópico na disciplina de Matemática que tenha considerado difícil, contudo, os seus temas preferidos são a Estatística e as Probabilidades, considerando-os também os mais acessíveis. Na sua opinião alguns "exercícios" de Matemática são um tanto aborrecidos, mas os de Estatística e os de Probabilidades davam-lhe um certo prazer: "Alguns exercícios são cansativos e não gosto de fazer. Mas aqueles até me davam um certo gozo, calcular as estatísticas, as probabilidades, assim" (E1).

No décimo ano começou a sentir algumas dificuldades na disciplina de Matemática, referindo em particular o facto de ter que estudar bastante para conseguir ter bons resultados:

> **Diogo**: […] Claro que este ano [10.º] para mim foi o mais complicado mas …, até agora.
> **Investigadora**: Sentiste mais dificuldade este ano?
> **Diogo**: Sim, mais dificuldades, também, pronto, acho que as outras matérias eram muito mais fáceis, não tanto …, estas matérias que estamos a dar agora [geometria] vamos lá mais por estudar, estudar, estudar e estar sempre a trabalhar. Nos outros anos era mais, percebíamos e já não precisávamos de estudar tanto, esta matéria é um bocado, é muito difícil. (E1)

Apesar de, como referiu, ter que estudar mais a partir do décimo ano, o Diogo continuou a ter bons resultados, tanto a Matemática A, como nas restantes disciplinas. Terminou o 10.º e o 11.º anos com a classificação de 17 valores a Matemática A.

O Diogo só tomou contacto com a calculadora gráfica no segundo período do décimo ano, quando foi iniciado o tema das funções. Na primeira entrevista, quando questionado se a calculadora gráfica tinha sido utilizada no ensino básico, o Diogo parecia valorizar o facto de a calculadora gráfica permitir a introdução de escrita, funcionando como um auxiliar de memória:

> **Investigadora**: E durante o básico? Nunca usaram a calculadora gráfica?
> **Diogo**: Não, nunca. Acho que a *Stora* também não deixava, a *Stora* que nós tínhamos no básico. […] Para não nos estarmos já, a habituar já às funcionalidades daquela máquina, porque tem algumas facilidades, as cábulas e assim, pronto (ri). (E1)

Essa vantagem parece passar para segundo plano quando o aluno começa efetivamente a trabalhar com a máquina. No final do décimo primeiro ano o Diogo valoriza essencialmente a rapidez com que resolve certas tarefas recorrendo à calculadora gráfica e o facto de poder confirmar os resultados:

> **Diogo**: Costumo usar, ultimamente tenho usado mais, porque poupa-se muito mais tempo com a máquina, quando não nos dizem nada em contrário, por exemplo, nas escolhas múltiplas, haa, com a máquina é muito mais, podemos ter a certeza que está certo, podemos verificar e, se não quisermos [fazer analiticamente], fazemos diretamente na máquina e poupa-se muito tempo. (E8)

Nas aulas, o Diogo é um aluno que habitualmente está atento e que participa bastante, mesmo sem ser solicitado. Relativamente ao tema das funções o Diogo faz um balanço positivo, referindo que é um tema que aprecia, quando "fica a perceber":

> **Diogo**: Sim, eu gostei (pausa), das funções eu gosto, quando percebo, quando fico a perceber eu gosto, de fazer funções, e assim, agora, claro parece um bocado estúpido, quando eu não percebo, é claro que eu não gosto mas, não é uma matéria …, porque há matérias que eu percebo, só que não gosto de trabalhá-las, as funções quando eu percebo até gosto. (E8)

7.2. Conceito de função no final do ensino básico

A caracterização do conceito de função no final do ensino básico foi feita com base nas respostas dadas pelo aluno na primeira entrevista clínica (Anexo 1).

No que diz respeito à representação gráfica o Diogo identifica funções com retas ou segmentos de reta. As representações gráficas envolvendo linhas curvas não fazem parte do seu conceito imagem de função: “Esta não, porque é curva” (E1, questão 1, alínea ii)). Inicialmente o aluno utiliza o termo reta para designar segmento de reta: “São retas, e penso que retas são funções” (E1, questão 1, alínea i)). Contudo, no decurso da entrevista, acaba por reconsiderar a sua noção de reta e de segmento de reta, ficando então em dúvida se uma função tem que ser representada por uma reta ou se também poderá ser representada por um segmento de reta:

> **Investigadora**: Uma função tem que ser representada por uma reta?
> **Diogo**: Tem. (Pausa longa) Ou um segmento de reta? Também, quer dizer (pausa), não sei, talvez também possa ser um segmento de reta, lembro-me de trabalhar isto com figuras e as figuras têm segmentos de reta, não sei. (E1)

As respostas dadas pelo aluno na questão 1 foram coerentes com a inexistência de representações curvas no conceito imagem de função, ou seja, o Diogo considerou que a alínea v) representava uma função e excluiu todas as restantes. Porém, a dúvida entretanto surgida relativamente à alínea i) manteve-se até ao final:

> **Investigadora**: Então, se eu te pedisse para me definires uma função, tu dirias que uma função é o quê?
> **Diogo**: Uma reta. Ou (pausa), sim uma reta, pronto. Uma reta. Aqui estou em dúvida se pode ser um segmento de reta ou (pausa), ou se é mesmo só uma reta. (E1)

É interessante notar que a hesitação do aluno relativamente à alínea i), questão 1, em nada se deve ao facto de aí aparecer a representação simbólica “bola aberta/bola fechada”. O Diogo interpreta corretamente o significado da notação: “Estas bolas são, para, para determinar o início e o final da *reta*, para dizer que, se estivesse aqui um cinco, queria dizer que começava mesmo no cinco. Caso a bola estivesse aberta, haa, sem estar pintada, não começava no cinco". Contudo, não valoriza esse facto para decidir se a representação gráfica em questão é ou não função, o que parece indicar que o conceito definição formal de função não faz parte do seu conceito imagem:

> **Investigadora**: […] E diz-me, se as bolinhas estivessem fechadas. As que estão abertas se estivessem fechadas, isso mudaria alguma coisa, ou nem por isso?
> **Diogo**: Penso que não.
> **Investigadora**: Não? Não alteraria a resposta?
> **Diogo**: Não. (E1, questão 1, alínea i))

Relativamente à representação algébrica, o Diogo identifica como funções as expressões correspondentes a funções afins, embora tenha necessitado de algum tempo para esse conhecimento ser recordado. Inicialmente, ao ser confrontado com a expressão $x = y$, presente na alínea i) da questão 2, o Diogo começa por referir que, no que diz respeito às funções, se recorda de trabalhar com o *y* no primeiro membro e o *x* no segundo: "Ok, haaa, o que eu me lembro das funções, que não é muito, lembro-me de fazer, e de nas funções ter o *y* no primeiro membro (pausa), e o *x* no segundo. Ou não? Não sei se isso se pode alterar, já não me lembro" (E1). Após a investigadora o questionar se nas equações é válido mudar os termos de um membro para o outro, o aluno deixa de se preocupar com o facto de a expressão ter o *y* no segundo membro, no entanto, não consegue justificar porque é que considera que representa uma função: "Porquê? Perguntas difíceis. […] (Ri) Porque me lembro que, que isto era uma, que é uma função, ou que é parecido com uma função" (E1).

Enquanto analisa as restantes alíneas presentes na questão 2, o Diogo vai então evocando os tipos de expressões que fazem parte do seu conceito imagem, começando pelas do tipo $y = kx$, sendo *k* uma constante:

> **Diogo**: "*y* igual a três sobre *x*". Não sei se é uma função, penso que não. Porque o *x* deveria de estar, a multiplicar.
> **Investigadora**: Para quê? Porque é que teria que estar a multiplicar? […]
> **Diogo**: Não sei, estou habituado a que esteja assim.
> **Investigadora**: Hum. (Pausa) Então e assim achas que não, que não poderá ser uma função.
> **Diogo**: Acho que não. Ainda me lembro que uma função deveria ter uma relação de *y* a dividir por *x* igual a, uma constante (escreve a relação na folha – Figura 44). (E1, questão 2, alínea iii))

$$\frac{y}{x} = k$$

Figura 44 – Relação recordada pelo Diogo.

A investigadora questiona o aluno se essas são as únicas expressões de que se recorda e este refere também a expressão geral de uma função afim:

> **Diogo**: Também me lembro das outras que são, as funções afins.
> **Investigadora**: Hum. Sim, podes escrever.
> **Diogo**: Em que *y* igual a *k*, *x*, e, mais *b*.
> **Investigadora**: Sim.
> **Diogo**: Também me lembro destas e aqui neste já não se verifica a proporcionalidade direta.
> **Investigadora**: Já não se verifica a proporcionalidade direta. Porquê?
> **Diogo**: Porque a reta não passa na origem. (E1)

O aluno identifica a relação de proporcionalidade direta entre as duas variáveis nas expressões do tipo $y = kx$, e a não existência dessa relação nas do tipo $y = kx + b$, supondo *k* e *b* diferentes de zero, estabelecendo conexão com a representação gráfica. Apesar disso, demorou algum tempo a decidir se a expressão $2x - 3y = 4$ poderia representar ou não uma função, efetuando o tratamento da representação (Figura 45) por sugestão da investigadora:

> **Diogo**: A quinta (pausa), também. Também pode ser uma função.
> **Investigadora**: Também?
> **Diogo**: Porque verifica aquilo que eu já disse há bocado. Se mudarmos …, não, não verifica, se calhar não.
> **Investigadora**: Podes tentar fazer!
> **Diogo**: Haa (o aluno resolve a equação em ordem a três *y*) sim, é uma função, sim. (E1, questão 2, alínea v))

$$-3y = 4 - 2x$$
$$\Leftrightarrow 3y = -4 + 2x \Leftrightarrow$$
$$3y = 2x - 4$$

Figura 45 – Tratamento da expressão $2x - 3y = 4$.

Apesar de a função de proporcionalidade inversa fazer parte dos conteúdos matemáticos do ensino básico, o conceito imagem de função, no caso do Diogo, parece não englobar estas funções, já que não identificou a relação simbolicamente, nem aceita que uma função possa ser representada por uma curva. O aluno possui alguns conhecimentos sobre a relação de proporcionalidade inversa, pois ao analisar a questão 4 começa por considerar uma relação desse tipo, mostrando que sabe identificá-la, mas não a reconhece como uma função:

> **Diogo**: […] Porque é uma proporcionalidade, inversa.
> **Investigadora**: É uma proporcionalidade?
> **Diogo**: É. (Pausa) Penso que, quer dizer não, não é uma proporcionalidade, não é. Não são proporcionalidades.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Diogo**: Porque os valores não dão, não é a mesma constante.
> **Investigadora**: Como é que se vê a constante? Na proporcionalidade inversa?
> **Diogo**: Multiplica-se. (E1, questão 4)

Embora com algumas dúvidas, o Diogo considera que uma expressão com quadrados não poderá representar uma função, independentemente da variável que o quadrado envolve: "Penso que para ser uma função, supostamente o *x* e o *y* não, não deveriam estar ao quadrado" (E1). Relativamente à expressão $2x+3=0$, o Diogo começa por referir que só tem uma "incógnita", mas logo de seguida considera que o três pode estar a substituir a variável *y*, identificando a expressão com uma função. A sua justificação sugere que não compreende completamente o conceito de variável e evidencia também alguma confusão entre o conceito de função e os procedimentos para obter pares ordenados específicos ou para determinar parâmetros por substituição de pontos pertencentes ao gráfico da função. O aluno parece possuir uma visão operacional do conceito de função, não conseguindo ainda conceber a entidade como um todo:

> **Diogo**: Penso que não porque só tem uma incógnita. Não. Haaa, (pausa) pode ser, se o três estiver a substituir o *y*, por exemplo.
> **Investigadora**: E é a mesma coisa? Ter lá um número ou ter uma variável?
> **Diogo**: Sim. Acho que é o mesmo. Sim, quando nós substituímos, não deixa de ser uma função. (Pausa) Mas não tenho a certeza disto.
> **Investigadora**: (Risos) Não tens a certeza. Quando nós substituímos o quê?

> **Diogo**: O x e o y, por valores, penso que não deixa de ser uma função, só se passa a ter outro nome. Mas até nas aulas, se substituirmos para, por exemplo, na equação reduzida, para achar o b. (E1, questão 2, alínea iv))

Em resumo, no que diz respeito à representação algébrica, o Diogo reconhece as funções afins, e parece excluir a hipótese de uma função poder ser representada por outro tipo de expressão. Há a ressaltar a relação $2x+3=0$, que considera uma função, no entanto, esta acaba por ser identificada com uma função afim. Quer nas representações gráficas (questão 1), quer nas algébricas (questão 2), as respostas do aluno foram coerentes com um conceito imagem evolvendo apenas retas, ou, eventualmente, partes de retas.

A representação numérica envolvida na questão 4 não levantou dificuldades ao Diogo, no entanto, ao responder à alínea 2, considerou apenas os valores dados na tabela, ponderando a possibilidade de se obter um lucro mais elevado apenas depois de ser confrontado com a hipótese de o valor pedido não estar representado na tabela. Este comportamento parece sugerir que a representação não lhe evoca uma função:

> **Diogo**: Então ele deve escolher, (pausa) ter um lucro (pausa), de, de quarenta, de (pausa), de quarenta ou de sessenta. Porque ele no total vai ter o mesmo lucro. Por isso, penso que, dá igual.
> **Investigadora**: Hum, hum. E não poderia haver outro valor em que o lucro fosse maior? Por exemplo, um que não estivesse aí? **[…]**
> **Diogo**: (Pausa) Talvez, se ele vendesse cinquenta por semana. […]
> **Investigadora**: Hum, hum. E como é que chegaste aos cinquenta?
> **Diogo**: (Pausa) Então, se entre os sessenta vendidos e os quarenta, se, já reparei que, aumenta o lucro e depois volta a diminuir. Então teria de estar na metade da, da tabela. Haaa, se entre os sessenta e os quarenta, fui achar o valor que estava no meio, que era cinquenta, pela sequência daqui, o lucro que ele iria ter em cada era, cinquenta também […]. (E1, questão 4.2)

A conversão de representações de uma função revela-se uma tarefa difícil para o Diogo, mesmo em funções aparentemente familiares. A investigadora questionou-o se teria ideia da representação gráfica da expressão $x=y$ quando este procurava justificar que representava uma função, sendo possível perceber que, apesar de o ter conseguido (Figura 46), a conversão não foi imediata: "Sim (pausa), não. Sim. (Ri) Se estivesse aqui um gráfico (pausa), penso que … (pausa). […] Poderia estar cinco, cinco. (Pausa) E talvez, se pudesse formar, uma reta, assim, ia-se formar uma reta. (Pausa) x igual a y, neste caso” (E1).

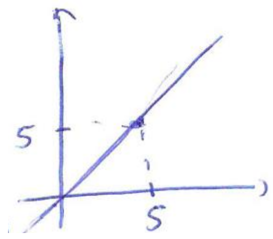


Figura 46 – Representação gráfica da expressão $x = y$.

Posteriormente, ao evocar as expressões que considerava serem funções, o Diogo relacionou-as espontaneamente com a representação gráfica, referindo-se ao facto de a reta passar ou não na origem do referencial. Este conhecimento parece ter sido recordado após ter feito a representação gráfica apresentada na Figura 46.

A conversão da representação numérica na algébrica, proposta na questão 4.3, não seria conseguida pelo aluno, que começou desde logo por mostrar dificuldades em interpretar a linguagem matemática envolvida na questão:

> **Diogo**: Não estou aqui a perceber, f e g são, é a imagem e o objeto?
> **Investigadora**: Não, não. São duas funções.
> **Diogo**: Duas funções? (E1, questão 4.3)

O Diogo fica muito tempo calado pelo que a investigadora lhe pergunta o que está a pensar: “Estou a pensar, estou a tentar lembrar-me desta, desta parte” (E1, questão 4.3). A linguagem utilizada na questão provoca-lhe alguma confusão e não consegue perceber quais as variáveis que pretende relacionar:

> **Diogo**: Sim. (Pausa bastante longa) “Em função de L”. Humm, (pausa longa).
> **Investigadora**: Portanto, no fundo estão-te a pedir que relaciones (pausa), que linhas da tabela?
> **Diogo**: Esta e esta (aponta a segunda e a terceira).
> **Investigadora**: Não, não é com o lucro total, é com o lucro por cada.
> **Diogo**: Hum. Então é esta e esta (primeira e segunda). (Pausa) Irá ser, (pausa) isto quer dizer que o número de aparelhos

> vendidos é representado por L ou que a função é *L*? (E1, questão 4.3)

Após algum tempo em silêncio, exprime o sentimento de que não vai conseguir determinar uma expressão que relacione as duas variáveis: "Não, não consigo achar uma expressão que represente" (E1, questão 4.3). Relativamente à função *g*, a situação foi semelhante, com o aluno a deixar transparecer mais uma vez que não compreende completamente o significado de variável, e a evidenciar uma visão operacional de função:

> **Diogo**: Não, não sei, eu acho que não estou a conseguir fazer esta expressão, porque aqui (questão 4.1) eu variava e, pronto, e mudavam as situações.
> **Investigadora**: Sim.
> **Diogo**: Aqui não sei fazer uma para a generalidade de todos. Não estou a ver, como é que posso fazer. […] Mas neste aqui, o que eu estava a fazer neste era multiplicar o lucro pelo outro.
> **Investigadora**: Cada valor pelo seu valor correspondente.
> **Diogo**: Sim.
> **Investigadora**: Porque era uma tabela de valores, não é?
> **Diogo**: Sim, e variam os valores. E o que me está a meter um bocado de confusão é que aqui como não podem variar esses valores, tem que ser uma expressão … (E1, questão 4.3, função *g*)

Apesar de o aluno não conseguir por si só efetuar a conversão proposta na questão 4.3, após algumas sugestões da investigadora acabou por obter ambas as expressões algébricas. Relativamente à função *f* a investigadora sugeriu que fizesse a representação gráfica, o que o Diogo atendeu: "Sim, se calhar ajudava" (E1). Ao tentar representar a função graficamente começou por representar os eixos, colocando a variável independente no eixo das abcissas, mas depois alterou, evidenciando alguma confusão entre o que pretendia representar e a sua perceção relativamente ao contexto do problema, acabando por, no decurso do diálogo com a investigadora, reconsiderar o papel da variável *L*:

> **Investigadora**: Começaste por escolher o eixo dos *xx* para o lucro, mas depois …
> **Diogo**: Depois risquei. Porque penso que o lucro, depende também dos aparelhos que venda, se não vender nenhum não vai ter lucro. (Pausa).
> **Investigadora**: Sim mas o que é que depende do quê?

> **Diogo**: Penso que é, o lucro depende do número de aparelhos. Não. O lucro depende do número de aparelhos!
> […]
> **Investigadora**: De qualquer maneira, quando nos pedem o número de aparelhos em função do *L*, o *L* vai representar o quê?
> **Diogo**: O lucro.
> **Investigadora**: Sim, e será a variável dependente ou independente?
> **Diogo**: Independente. (E1, questão 4.3, função *f*)

O aluno efetuou então o esboço da representação gráfica, não tendo, no entanto, preocupação em considerar adequadamente a escala (Figura 47).

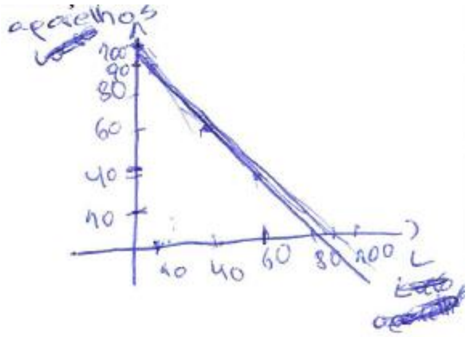


Figura 47 – Esboço da representação gráfica da função *f* (questão 4.3).

Após identificar o tipo de representação obtida começou então a relacioná-la com a representação algébrica: "Sim o *b* tem que estar aqui. […] Estava em dúvida se o *b* tinha que estar aqui, mas tem que estar, porque não é um gráfico de proporcionalidade, direta" (E1). O Diogo conseguiu identificar a ordenada na origem e, através da substituição pelo ponto de coordenadas $(90{,}10)$, determinou o valor do declive, obtendo a expressão algébrica de *f* (Figura 48).

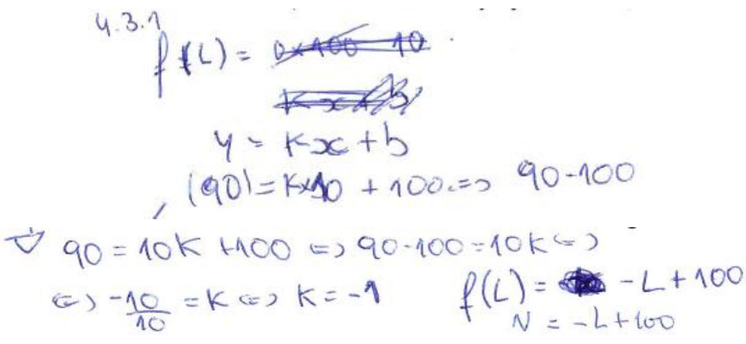


Figura 48 – Determinação da expressão algébrica da função *f* (questão 4.3).

Relativamente à função g, após a investigadora o aconselhar a representar cada uma das variáveis por uma letra e sugerir o modo de as relacionar, o aluno acabou por escrever uma expressão, não esquecendo de colocar os parêntesis (Figura 49).

> **Diogo**: Mas assim já tenho três variáveis.
> **Investigadora**: Parece, mas como o N depende do L …
> **Diogo**: Sim?
> **Investigadora**: Podes ou não substituir o N por uma coisa que depende apenas do L?
> **Diogo**: Huumm, pois posso.

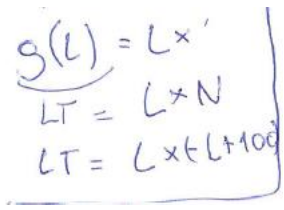


Figura 49 – Expressão algébrica obtida para a função *g* (questão 4.3).

A conversão foi possível com algumas sugestões por parte da investigadora, no entanto, o aluno não a teria conseguido sozinho.

No que diz respeito à notação própria das funções, foi possível perceber que o Diogo se recorda de a ter visto mas não a consegue interpretar, o que o impediu de responder às questões em que essa interpretação era necessária:

> **Diogo**: [Relativamente à questão 3.2] (Pausa) Isto, eu não me lembro. (Baixinho) Indique *f* de zero.
> **Investigadora**: Não te lembras o que representa *f* de zero?
> **Diogo**: Não. (Pausa).
> **Investigadora**: De maneira nenhuma?
> **Diogo**: Talvez como uma função, mas …
> **Investigadora**: Mas já viste essa notação, ou não?
> **Diogo**: Já. Lembro-me de ver, mas não me lembro como se resolve. (E1)

É interessante notar que, apesar de não ter conseguido interpretar a notação matemática de modo a responder às alíneas colocadas na questão 3, o aluno utiliza a notação $f(L)$ quando está a tentar escrever a expressão algébrica da função *f* (Figura 48):

> **Investigadora**: Como é que ficaria a expressão final? Podes escrever mesmo.
> **Diogo**: Menos *k*, humm (pausa).
> **Investigadora**: *f* de *L*, como começaste a escrever ali à frente.
> **Diogo**: *f* de *L*, …
> **Investigadora**: Embora há bocado tenhas dito que não sabes o que é que é o *f* de qualquer coisa.
> **Diogo**: Pois. Lembro-me de escrever (ri). (E1)

No decurso da entrevista o aluno deixa transparecer alguma confusão entre os conceitos de parâmetro e de variável. Por exemplo, ao ser questionado acerca do objetivo de substituir na expressão $y = kx + 100$ as variáveis pelo ponto de coordenadas $(90{,}10)$, o Diogo respondeu: "Saber o (pausa), escrever a expressão, não. (Pausa) Pois, se calhar não há nenhum objetivo. A expressão não precisa de ter valores, é só uma expressão" (E1). Quando estava a escrever a expressão final o aluno questiona também se deverá colocar o valor do parâmetro *b*: "Menos *k* não, menos *L* (pausa), mais, ponho o valor ou …?" (E1). Foi também possível perceber que o Diogo não adquiriu a noção de contradomínio de uma função, embora o associe à variável dependente, como é possível perceber no extrato seguinte:

> **Diogo**: "Contradomínio de *f*" (pausa), sete.
> **Investigadora**: "O contradomínio de *f*, sete"? Lembras-te do que é que é o contradomínio? Ou, consegues explicar-me o que é o contradomínio?
> **Diogo**: É a variável dependente, que depende, não tenho a certeza aqui, isto, isto são as coordenadas (aponta para o intervalo que representa o domínio da função)?
> **Investigadora**: Não, não são coordenadas. É o domínio da função, é o intervalo de menos dois a sete.
> **Diogo**: Sim, sim. Então pronto acho que é sete, o contradomínio. (E1, questão 3.1)

É de salientar que o aluno indica o valor sete para o contradomínio, não atendendo à representação gráfica da função. O Diogo nunca se refere ao contradomínio como um conjunto e, quando o representa na folha, escreve apenas sete.

Em resumo, podemos dizer que o conceito imagem de função do Diogo é muito reduzido, ou, utilizando a terminologia de Domingos (2003), *incipiente*, abrangendo apenas as expressões ou representações gráficas que envolvem retas, ou, eventualmente, segmentos de reta. É possível perceber alguma confusão entre o conceito de função e os procedimentos para determinar pontos pertencentes ao gráfico ou parâmetros numa função particular, o que pode estar associado a uma visão mais operacional do conceito de função. O aluno deixa transparecer também alguma confusão entre os conceitos de variável e de parâmetro. O conceito definição (formal) não parece fazer parte do seu conceito imagem pois nunca é referido. A conversão de representações revela-se uma tarefa difícil para o aluno, mesmo para funções aparentemente familiares. Embora tenha utilizado a notação própria das funções ao escrever a expressão analítica de uma função particular, o Diogo não conseguiu resolver as tarefas onde era indispensável interpretar essa notação.

7.3. Esquemas de utilização desenvolvidos pelo aluno ao longo do 10.º e 11.º anos

Nesta seção pretende-se caracterizar os principais esquemas de utilização que vão sendo desenvolvidos pelo aluno ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário, no que diz respeito à utilização do artefacto calculadora gráfica, no âmbito do trabalho com as funções. Para cada categoria são apresentados alguns episódios que pretendem ilustrar a evolução e adaptação desses esquemas.

A calculadora gráfica do Diogo é uma TI-83, que pertenceu à sua irmã. O aluno utilizou a máquina pela primeira vez no décimo ano, na aula de introdução ao tema das funções, estabelecendo desde logo uma boa relação com aquele artefacto. Nas aulas observadas foi possível perceber o seu interesse em aprender a trabalhar com a calculadora, efetuando rapidamente o que a professora dizia, explorando-a com o Francisco (seu colega de carteira) e, por vezes, com as duas colegas que se sentavam na carteira da frente. O seu entusiasmo em trabalhar com a calculadora gráfica pode ser percebido no diálogo seguinte, estabelecido com a professora:

> **Diogo**: Ó *Stora*, a *Stora* não disse que nós íamos fazer este com a calculadora?
> **Professora**: Vamos fazer a seguir (pausa), está ansioso!
> **Diogo**: Pois estou, para mexer na calculadora.
> **Professora**: Está tudo ansioso para mexer na calculadora.
> **Diogo**: Pois está! (A5_10)

7.3.1. Esquemas de introdução da expressão analítica no editor de funções

Os esquemas de utilização relativos à introdução da expressão analítica de uma função englobam a atribuição de significado e de funções a determinadas teclas envolvidas na edição da expressão, como por exemplo, introdução da variável independente ou introdução do sinal negativo, assim como de outras teclas correspondentes à especificidade das funções a editar, como *elevar ao quadrado*, *módulo*, *derivada*, etc., as quais vão sendo instrumentalizadas à medida que o aluno vai tomando contacto com novas funções. Além disso, os esquemas envolvem o reconhecimento das situações em que é necessário a introdução de parêntesis e do modo como tal deve ser feito tendo em conta as características do artefacto.

Fase inicial do processo de génese instrumental

Na primeira aula de introdução ao tema das funções o Diogo começou logo por explorar a sua calculadora gráfica, conseguindo perceber que podia selecionar ou desselecionar uma função editada na máquina antes de a professora ter abordado o assunto. Esta tinha pedido aos alunos para editarem a expressão analítica da função $y = 2x + 4$ e esperarem por novas indicações, contudo, o Diogo e o Francisco tentaram de imediato visualizar a representação gráfica. O diálogo com o Francisco mostra como o Diogo compreendeu que podia selecionar/desselecionar uma função no editor de funções:

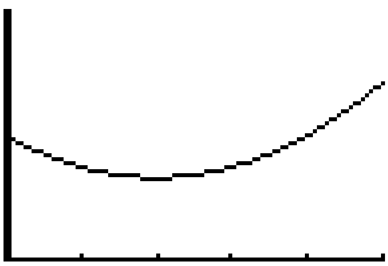
> **Diogo**: Carregaste no *enter*?
> **Francisco**: Aqui, no gráfico.
> **Diogo**: (Pausa) Na minha não apareceu. Porque é que na minha não apareceu? Onde é que carregaste?
> (A professora manda calar)
> **Diogo**: Eu fiz a função, vê lá qual é que é a diferença?
> **Francisco**: Fizeste …?
> **Diogo**: Voltei ao sítio. E agora, onde é que carregaste?
> **Francisco**: No gráfico.
> **Diogo**: Preciso de carregar no *enter*. Ah, já percebi e agora carregas aqui.
> **Francisco**: O que é que fizeste?
> **Diogo**: É porque, aqui o igual estava a piscar, percebes, tipo, um pisca assim e o outro pisca assim …
> **Francisco**: Hum?

Diogo: Um pisca assim, *tás* a ver, e o outro pisca assim, quando concluíres tens que carregar no *enter*.
Francisco: E agora?
Diogo: Agora carregas igual. Igual não, carregas gráfico, *graph*.
Francisco: Sim. Mas isso já eu tinha.
Diogo: Então e agora tenta assim. Queres ver? Não, não, não. E agora tenta assim [com a função desseleccionada]. Como já não te aparece nada, porque não deste como concluída a função. Percebes? (Pausa) Ah, belíssimo! Edna, olha o que eu já sei fazer. (A1_10)

Nessa aula a professora chamou a atenção para o facto de na calculadora gráfica as variáveis serem sempre designadas por *y* e *x*, tendo os alunos editado a expressão $y = 2{,}54x$, quando as variáveis utilizadas no enunciado eram *c* e *p*. Numa aula posterior, é possível perceber que o Diogo reteve essa informação, contudo, ainda sentiu necessidade de questionar a professora:

Diogo: *Stora*, o *t* podemos pôr *x*, não é?
Professora: O *t* é o *x*, sim.
Francisco: Susana, como é que mudas a variável para *t*?
Susana: Não se muda.
Diogo: Não mudas, é o *x*! (A5_10)

A introdução da expressão analítica de uma função no editor de funções, na maioria das vezes, não levantou qualquer problema ao Diogo, porém, há a salientar algumas situações em que o aluno não editou corretamente a expressão. Uma delas ocorreu numa aula (A8_10) e ficou a dever-se ao uso incorreto do sinal negativo, usado em vez do sinal de subtração na edição da expressão $y = 6x^2 - 24x + 70$. A turma tinha acabado de discutir com a professora uma janela de visualização adequada ao problema e esta, usando o *viewscreen*, mostrou a representação gráfica obtida, completamente diferente da representação que o Diogo e o Francisco obtiveram (Figura 50).



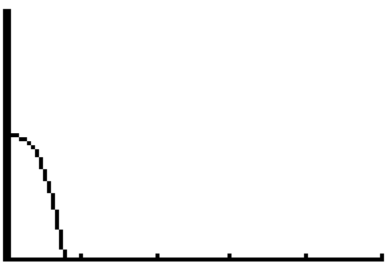


Figura 50 – Representação gráfica obtida pela professora (esquerda) e pelo par Diogo e Francisco (direita).

O estabelecimento de conexão entre a representação gráfica e a representação algébrica permitiria reconhecer o erro, mas, na altura, os alunos ainda não tinham estudado as propriedades da função quadrática, pelo que não seria ainda de esperar por parte destes uma análise crítica da representação gráfica obtida. Assim, chamaram a professora que identificou o erro. Na aula seguinte, em vez de editar as expressões $y=-3|x|$ e $y=-\frac{1}{2}|x|$, questão 1 da ficha *Investigando a função módulo* (Anexo 10), o Diogo colocou o módulo a englobar os valores considerados para o parâmetro *a*:

> **Diogo**: (Para o Francisco) Como é que tu conseguiste fazer retas a ir para baixo?
> **Professora**: Retas? […] Já experimentou tudo o que aqui diz?
> **Diogo**: Sim.
> **Professora**: Não me parece!
> **Diogo**: Se não experimentei, estão mal. Só se não é este menos.
> **Professora**: Ó Diogo, não está menos um meio!
> **Diogo**: Só se não é este menos, é o outro? Este é o pequenito.
> **Professora**: Não está cá … Ah! Não é aí que está [o erro]! Veja lá se está exatamente igual, escrito como aqui diz? (Pausa) Não está! Não escreveu bem a expressão analítica da função! Veja lá bem porquê? […] Diogo, olhe para a ficha! Para o enunciado!
> **Diogo**: Já olhei!
> **Professora:** Repare lá se escreveu o que lá está na ficha?
> **Diogo**: Não.
> **Professora**: Pois não! Está o quê?
> **Diogo**: Ao contrário.
> **Professora**: O que é que é isso ao contrário?
> **Diogo**: Está primeiro o *abs* e depois é que estão os valores com o *x*, junto com o *x*, e devia ser ao contrário, primeiro deviam estar os valores e depois o *abs*.
> **Professora**: Fez mal! Fez módulo de menos três *x*, daí ter dado positivo. (A9_10)

Na segunda entrevista o Diogo cometeu um erro semelhante, envolvendo a utilização incorreta de parêntesis, tendo introduzido a expressão $y=20\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)}x$, em vez de $y=20\sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

O Diogo parece ter interiorizado as situações em que deve usar a tecla correspondente ao sinal negativo e a tecla de operação de subtração, pois não voltou a usar o sinal negativo incorretamente. Os dados mostram que, nalgumas ocasiões, usou o símbolo de subtração em vez do símbolo do sinal negativo, aparentemente por distração, não tendo dificuldade em interpretar a natureza do erro, já que nesse caso a máquina assinala erro, e em efetuar a sua correção.

Relativamente à inserção de parêntesis, é de salientar que não há registo de situações em que o Diogo volte a cometer erros, mesmo no caso de expressões analíticas mais complicadas. Por exemplo, a expressão obtida pelo aluno na questão 3.3 da terceira entrevista (Anexo 3), relativa à área do triângulo em função de *x* (Figura 51), envolve a introdução de vários parêntesis ao ser editada na máquina, o que o Diogo fez corretamente.

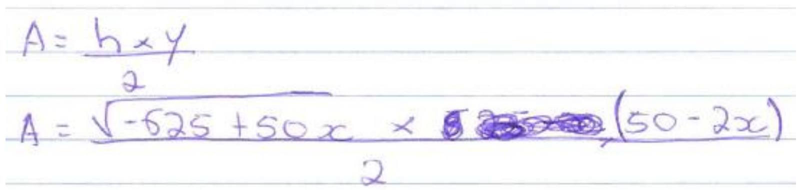


Figura 51 – Expressão obtida pelo Diogo (E3, questão 3.3).

Os dados sugerem, no entanto, que o facto de se encontrar perante uma expressão algébrica complexa poderá ter condicionado o recurso à calculadora gráfica na questão 4 da quarta entrevista (Anexo 4). Nessa questão, o aluno compreendeu que a expressão algébrica da função $p(x+7)$ se poderia obter substituindo na expressão analítica de *p*, x por $x+7$, contudo, não a tentou introduzir dessa forma na calculadora gráfica, optando por simplificar a expressão, o que acabou por não conseguir devido a dificuldades algébricas, ficando o recurso à calculadora gráfica comprometido. Mais tarde, na sétima entrevista (Anexo 7), perante uma situação semelhante, o Diogo já não teve a preocupação de simplificar a expressão algébrica, conseguindo portanto recorrer à calculadora para analisar a representação gráfica da função $f\left(\frac{x}{2}\right)$, quando, após ter determinado a expressão analítica da função *f*, a investigadora lhe pediu que confirmasse a sua conjetura relativa aos efeitos da transformação. Nessa altura, reconheceu inclusivamente que deveria haver um processo mais fácil de editar a função na máquina do que aquele que ia efetuar:

> **Diogo**: Então irá ser, isto tenho a certeza absoluta (vai apagando as outras funções que tem introduzidas no editor), deixe-me só apagar isto aqui, que vai haver uma maneira mais fácil do que eu vou fazer, mas …
> **Investigadora**: Uma forma mais fácil como?
> **Diogo**: (Pausa) Do que, eu estava a pensar, haa, é substituir o *x* por *x* sobre dois.
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: Mas deve haver uma forma mais rápida do que estar a substituir em todos … o *x*, por *x* sobre dois. (E7)

De facto, quando essa entrevista foi realizada, o Diogo já conhecia a funcionalidade *VARS,* que permite aceder a uma função editada na máquina, porém, não conseguiu adaptar esse conhecimento à nova situação.

O estabelecimento de conexões entre representações é muitas vezes essencial para identificar possíveis erros relativos à edição da expressão analítica. Na sexta entrevista foi possível identificar esse tipo de preocupação no comportamento do Diogo, quando, perante a representação gráfica da função *f*, o aluno colocou a hipótese de ter introduzido incorretamente a expressão: "Só se eu introduzi mal a expressão. […] Mas acho que não me enganei" (E6, questão 2.1). Neste caso o problema não dizia respeito a um erro na inserção da expressão analítica, mas a um conflito entre a imagem mental esperada para a representação gráfica e a representação obtida através da calculadora gráfica, contudo, este tipo de confronto é importante, permitindo a deteção de eventuais erros.

7.3.2. Esquemas de enquadramento

Associada à representação gráfica na calculadora está a janela de visualização. Os esquemas de utilização desenvolvidos pelo Diogo relativos à procura de uma janela de visualização envolvem essencialmente tentativa e erro, através da mudança direta dos valores correspondentes ao retângulo de visualização. Usualmente o aluno começa por recorrer ao *Zoom ZStandard*, e, caso não consiga visualizar uma representação aceitável, vai alterando os valores diretamente na janela, sem recorrer a outras funcionalidades, como por exemplo, *Zoom In*/*Zoom Out* ou à tabela de valores. O procedimento de tentativa e erro é, por vezes, associado a alguma ligação com a representação algébrica e com o contexto da situação no caso de um problema, ou seja, em certas circunstâncias, o procedimento é orientado pelas imagens mentais que o aluno desenvolveu acerca da função envolvida e por alguns aspetos do contexto que toma em consideração.

Fase inicial do processo de génese instrumental

Na segunda aula dedicada ao tema das funções, a professora pediu para fazerem a representação gráfica da função $y = x^2$ e o Diogo, ao contrário do que aconteceu com a maioria dos alunos da turma, alterou a janela que tinha definido na aula anterior, referente a uma situação com contexto, onde as variáveis tomavam valores maiores ou iguais a zero. Quando a professora propôs aos alunos que indicassem uma janela adequada à visualização de uma representação da função, o Diogo questionou-a como é que poderia colocar o mínimo menos infinito:

> **Diogo**: Como é que se põe o mínimo infinito?
> **Professora**: Não se pode pôr infinito, tem que trabalhar com valores, reais. Com números reais.
> **Diogo**: Então e quanto é que pomos?
> **Professora**: Pode pôr um valor qualquer que queira desde que ache que consegue ver. (A2_10)

Numa aula posterior, quando resolviam a tarefa catorze do manual (Anexo 12), o Diogo tomou consciência que, por vezes, os valores a atribuir ao retângulo de visualização têm que ser bastante elevados. O aluno relacionou o contexto da situação com os valores a atribuir à variável independente, compreendendo que esta tinha que tomar valores maiores ou iguais a zero, mas não conseguiu estabelecer conexão entre o contexto e os valores a atribuir à variável dependente. Dirige-se à investigadora interrogando: "Eu não percebo o que é que a *Stora* quer. A *Stora* quer só esta parte? Porque eu já fiz só esta parte e deu-me igual, deu-me só esta *reta*" (A5_10) (Figura 52).

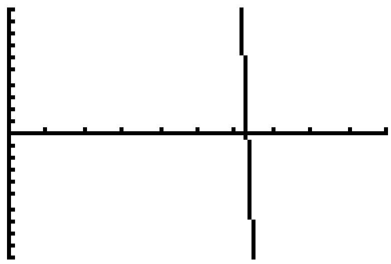


Figura 52 – Representação gráfica obtida pelo Diogo para a função $d(t) = -5t^2 + 200$.

Não tendo atendido ao contexto para escolher os valores a atribuir à variável dependente, e sem ter uma noção do aspeto da representação gráfica, já que a função quadrática ainda não tinha sido estudada, o Diogo não conseguiu uma representação aceitável.

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

A procura de uma janela de visualização adequada revela-se, muitas vezes, uma tarefa difícil para o Diogo. Vejamos dois episódios onde é evidente que, estando em causa valores elevados, o esquema desenvolvido pelo Diogo relativo a tentativa e erro, explicitado pelo aluno quando a investigadora o questiona acerca das estratégias para obter uma janela de visualização: "Haa, experimentar (ri)" (E3), conduz a um procedimento bastante demorado, mesmo quando aparentemente tem alguma ideia relativa à forma da representação gráfica envolvida.

Na ficha *O Concerto de Rock*, realizada a pares (Anexo 10), o Diogo e o Francisco demoraram imenso tempo até conseguirem visualizar uma representação aceitável do gráfico da função $L(p) = -25p^2 + 1250p - 13125$ (Figura 53). A alteração dos valores na janela de visualização parece ter sido feita um pouco ao acaso pelo par, sem tentativa de estabelecimento de conexões entre as representações, apesar de já terem estudado a função quadrática. No extrato seguinte podemos perceber a dificuldade sentida pelos dois alunos:

> **Diogo**: Francisco, não vamos perder mais tempo, tu não consegues!
> **Francisco**: Cala-te!
> […]
> **Diogo**: Rápido!
> **Francisco**: Vou meter isto com números exorbitantes! (Pausa) Cem mil! Menos cem mil … […] Não consigo achar isto! (A17_10)

Perante a dificuldade em encontrar uma janela de visualização, Diogo levanta a hipótese de não poderem inserir a expressão tal como está apresentada, falando em "converter", o que parece sugerir o tratamento da expressão para a configuração $y = a(x-h)^2 + k$, trabalhada em aulas anteriores, embora isso não seja dito expressamente pelo aluno. Neste caso, podemos perceber que as dificuldades em obter uma janela de visualização conduziram o aluno a ponderar a hipótese de não poderem introduzir a expressão tal como estava apresentada, embora essa hipótese deixe de ser considerada pelo par após interação com as colegas da carteira da frente (Helena e Sofia):

> **Helena**: Vinte mil! Vinte mil, no *y*!
> **Diogo**: Mas nós já pusemos! Vinte mil.
> **Francisco**: E não deu!
> **Helena**: Então, vai adaptando com o *x*.
> **Diogo**: O *x* é quanto? […] Eu acho que a expressão está mal posta. Nós não podemos pôr esta expressão. Nós temos que converter primeiro isto. […] Vai tirar toda a gente nega! Então já achaste, ou quê? […] (Há muita agitação, os alunos estão com dificuldades) O objetivo é ver se nós deixamos a folha em branco?
> **Francisco**: (Para a Helena e Sofia) Vocês só introduziram esta expressão? (Não se ouve a resposta) Pois! Mas o Diogo diz que é preciso introduzir …
> **Diogo**: A nossa calculadora está avariada! Deixa ver a tua. *Stora*, a nossa calculadora está avariada!
> **Francisco**: A sério!
> **Diogo**: É verdade! Dá aí a tua! […] Francisco, falta vinte minutos para tocar […]. (A17_10)

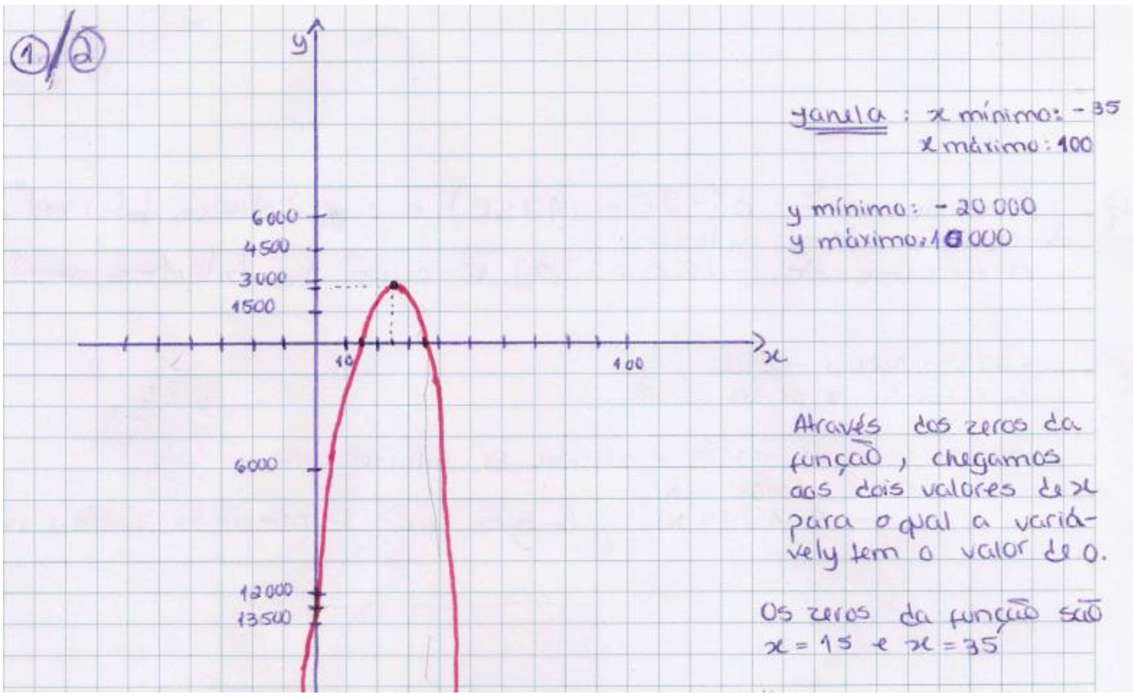


Figura 53 – Representação gráfica e janela de visualização obtidas pelo par Diogo e Francisco (ficha *O Concerto de Rock*).

O estabelecimento de conexões entre a representação algébrica e a gráfica, ou o recurso a outras funcionalidades da máquina, poderiam ter proporcionado uma maior rapidez na obtenção de uma janela de visualização que permitisse uma representação gráfica aceitável. O contexto do problema, neste caso, também não parece ter sido atendido pelos alunos, já que consideraram que o preço dos bilhetes podia ser negativo.

A procura de uma janela de visualização aceitável para representar graficamente a função $f(x)=\left|x^2+50x-104\right|$ demorou também um tempo considerável. A partir de dada altura, o Diogo considerou o valor zero para o mínimo das variáveis e andou durante muito tempo a alterar os valores máximos e a visualizar a representação obtida, aparentemente sem estabelecer ligação com outras representações. Quando a investigadora o questionou acerca da representação esperada, a sua resposta mostra que, de algum modo, atendeu à representação algébrica, embora isso não se tenha refletido no procedimento de tentativa e erro feito até ali:

> **Investigadora**: Tens alguma ideia de qual pode ser a representação gráfica, ou não?
> **Diogo**: Sim, uma parábola.
> **Investigadora**: Uma parábola? Então porquê?
> **Diogo**: Porque, o *x* está ao quadrado.
> **Investigadora**: O *x* está ao quadrado? Então achas que, dará uma parábola?
> **Diogo**: Sim. (E3, questão 1.1)

Após o diálogo com a investigadora o Diogo continuou durante bastante tempo com a mesma abordagem, alterando apenas os limites superiores. A investigadora questionou-o novamente com o intuito de chamar a sua atenção para os valores que estava a alterar:

> **Investigadora**: Então, tens andado a mudar os valores a quê? Ao *x* e ao *y*? Só a um deles?
> **Diogo**: Agora estou a mudar ao *y*, porque, o *x*, pelo menos aqui o gráfico não esgota o espaço que há do *x*, (aponta para o visor da calculadora mostrando que há valores de *x* para os quais não se vê a respetiva imagem), por isso estou a, mudar só no *y*. (Pausa) Mas …
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: Isto já me deu uma parábola, só que não se via bem, e eu reduzi, e depois agora nem sequer parábola me dá.
> **Investigadora**: Já te deu uma parábola?
> **Diogo**: Acho que já.

> **Investigadora**: Qual é o *x* mínimo e o *x* máximo que tens?
> **Diogo**: Zero.
> **Investigadora**: E porquê zero?
> **Diogo**: Porque tinha já experimentado pôr com negativos, quando eu comecei a fazer tinha valores negativos.
> **Investigadora**: Em quê? No *x*, no *y*? Nos dois?
> **Diogo**: No *x* e no *y*. Não, não me aparecia nada. (E3, questão 1.1)

Só depois deste diálogo com a investigadora é que o Diogo voltou a considerar valores negativos para a variável independente, conseguindo obter, algum tempo depois, uma representação gráfica aceitável (Figura 54). No entanto, o seu desabafo dizendo que “se fosse um trabalho de casa desistia” (E3), evidencia a dificuldade que o aluno teve em conseguir obter uma representação na calculadora.

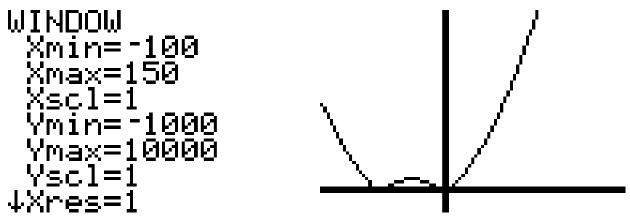


Figura 54 – Representação gráfica da função $f(x)=\left|x^2+50x-104\right|$ (E3, questão 1.1).

No final da entrevista, a investigadora questionou-o novamente sobre a representação esperada, uma vez que os seus colegas representaram a função como um V. Aparentemente, o aluno teria uma ideia da representação gráfica que poderia obter, embora isso não seja de todo evidente nas tentativas de ajuste da janela:

> **Diogo**: Não, vi logo, porque nós, pelo menos nos casos todos que nós fizemos na aula, vê-se, viu-se que ia dar esse gráfico …
> […]
> **Investigadora**: Sim, na calculadora, se vires só este bocadinho parece-te, parece-te um V.
> **Diogo**: Hum, hum. (Pausa) Também já, isso aconteceu-me mas não foi aqui, foi antes de termos dado esta matéria, num T.P.C. […] Por acaso quando estava a fazer o T.P.C. estava, e fiquei-me só por isso. Não fiz mais, pensava que era um módulo normal. (E3)

O processo para encontrar uma janela de visualização adequada, noutras situações, seguiu sempre esquemas semelhantes, naturalmente condicionados pelas imagens mentais que o Diogo possuía acerca da função em questão. É de referir que para além de o aluno não utilizar os *Zooms* pré-definidos (além do *Standard*), também nunca alterou a escala dos eixos.

7.3.3. Esquemas de resolução de equações e inequações

A resolução analítica de equações do segundo grau é feita recorrendo à fórmula resolvente, através de um programa que o aluno instalou na sua calculadora. Nesse caso, só tem que aceder ao programa e indicar os valores dos coeficientes da equação escrita na forma canónica $ax^2+bx+c=0$.

Para resolver graficamente equações e inequações o Diogo segue, usualmente, o seguinte esquema: edita duas funções, uma correspondente ao primeiro membro e outra correspondente ao segundo membro, ajusta a janela de visualização, determina os pontos de interseção das duas representações gráficas recorrendo ao menu *Calc*, e indica o conjunto solução da condição, ou dá a resposta à questão. Existem, no entanto, situações em que o Diogo adota um esquema diferente, optando por efetuar o tratamento algébrico através da passagem de todos os termos para um dos membros. Nesse caso define a função correspondente, ajusta a janela de visualização, determina os zeros recorrendo ao menu *Calc*, e indica o conjunto solução ou dá a resposta à questão.

Fase inicial do processo de génese instrumental

Antes de utilizarem a calculadora gráfica para resolver condições, os alunos resolveram a equação $f(x)=2$ a partir da representação gráfica dada no enunciado (questão do manual). A professora começou por sugerir que representassem no referencial a reta de equação $y=2$ e o Diogo não teve dificuldade em compreender que teria que determinar o ponto de interseção das duas representações gráficas, generalizando o procedimento caso tivessem a expressão analítica e pretendessem utilizar a calculadora gráfica:

> **Professora**: Onde é que a função *f* é igual a dois?
> **Aluna**: No *x* igual a zero, …

> **Professora**: O melhor é traçarem uma reta, a passar por *y* igual a dois, no gráfico, empreste-me aí o livro, no gráfico (representa no quadro). Ora, traçamos uma reta, vamos lá tomar atenção aqui, a melhor forma de vocês verem quando é que é igual a dois, é traçar uma reta, no *y* igual a dois, para determinar os pontos onde quê? Onde essa reta intersecta o quê?
> **Aluna**: O eixo do *x*.
> **Professora**: É?
> **Diogo**: Intersecta a função.
> **Professora**: Intersecta a função, pois é! […] Este tipo de condições também pode ser resolvido com a calculadora.
> **Diogo**: Pois.
> **Professora**: Se desse a expressão analítica da função, o que é que nós teríamos que pensar? Na próxima aula vamos fazer isso, com uma função. O que é que nós teríamos que fazer aqui, neste caso?
> **Francisco**: Representávamos o gráfico, depois …
> **Professora**: Representávamos a função e depois?
> **Diogo**: Fazíamos a reta.
> **Francisco**: Não, íamos calcular o valor.
> **Diogo**: A reta que intersectava a função …
> **Professora**: Fazíamos a reta, é verdade. Como? Que reta?
> **Diogo**: *y* igual a dois.
> **Professora**: *y* igual a dois e depois o que é que fazíamos a seguir?
> **Diogo**: Depois a seguir, os pontos de intersecção. (A4_10)

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

Os esquemas de utilização desenvolvidos para resolver equações e inequações foram aplicados em diversas situações sem causar obstáculos ao aluno. Podemos observar o esquema usual, por exemplo, na resolução da questão 2.2, da ficha *Funções trigonométricas* (Anexo 17), realizada com o Francisco, onde era pedido que determinassem as horas do dia em que a maré atingiu 12 metros, sendo a altura da maré, num determinado dia, modelada pela função $h(t)=10-3\cos(0,26t)$, com t expresso em horas:

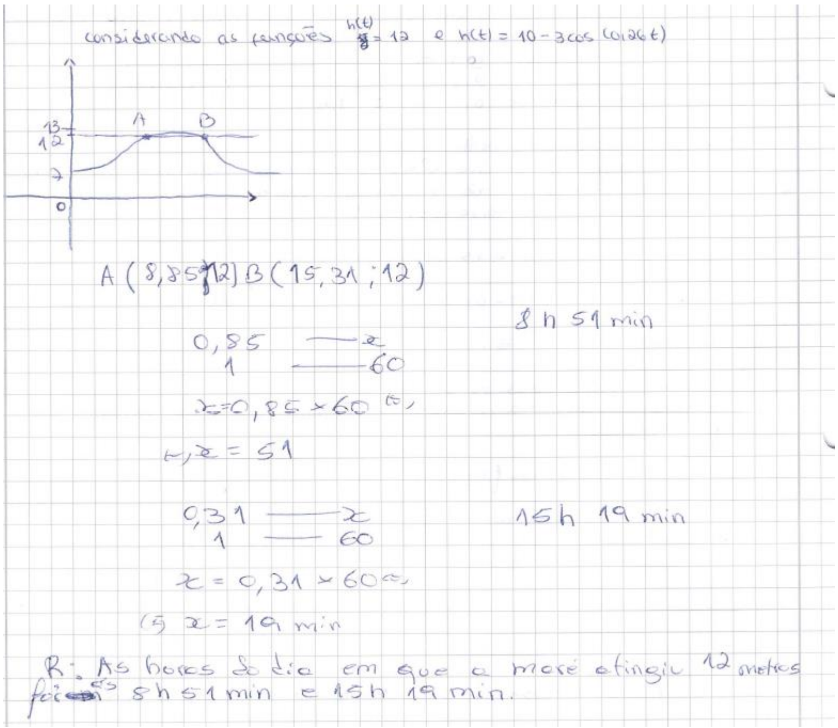


Figura 55 – Resolução da questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas* pelo par Diogo e Francisco.

O esquema usual é, por vezes, substituído por outro em que o aluno recorre ao tratamento da condição. Perante a inequação $x > \frac{1}{x}$, o Diogo começou por apelar ao esquema usual, definindo as funções $y = x$ e $y = \frac{1}{x}$ e visualizando a representação gráfica na janela *Standard* (Figura 56). No entanto, acabou por optar pelo tratamento da condição: "Então *x* (pausa), se calhar era mais fácil se eu (pausa), desenvolvesse esta, inequação" (E8, questão 5).

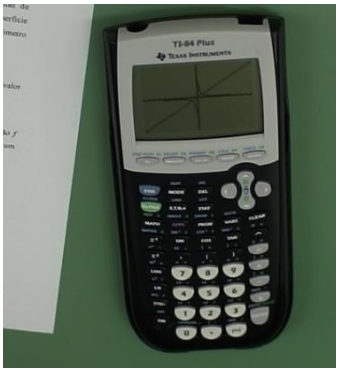


Figura 56 – Primeira abordagem à questão 5 (E8).

Na Figura 57 encontra-se o tratamento algébrico e a representação gráfica obtida na calculadora, relativos ao segundo procedimento efetuado pelo Diogo, bem como o conjunto solução obtido.

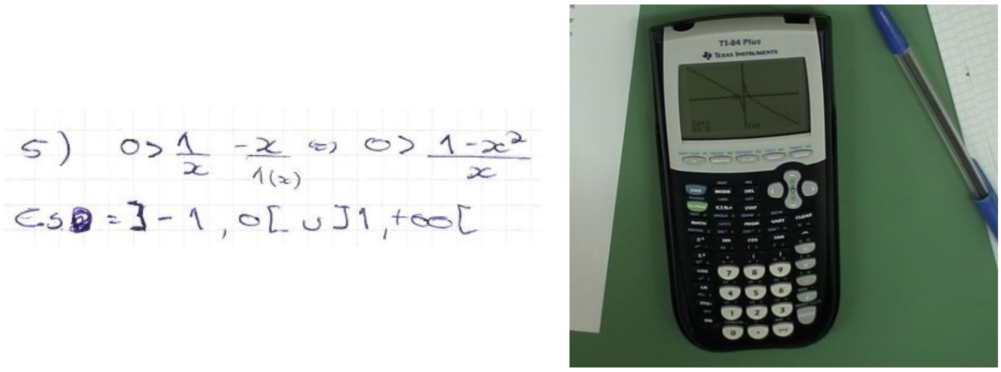


Figura 57 – Segunda abordagem à questão 5 (E8).

Ao ser questionado sobre a razão de ter optado pelo segundo procedimento, o Diogo esclarece que considera mais fácil retirar a informação da representação gráfica no caso da segunda abordagem:

> **Investigadora**: Porque é que simplificaste a expressão? Porque é que não usaste logo a primeira, o que tinhas posto na máquina?
> **Diogo**: Porque era mais fácil de ver. Verificar quando, *x*, quando era, o *y* era negativo (faz um gesto com a mão no visor). Nesta expressão era mais fácil de identificar do que na outra, porque eram retas, quando é que uma era inferior à outra, esta era mais fácil. (E8)

A complexidade ou o tipo das funções envolvidas pode, contudo, condicionar a aplicação desses esquemas. O comportamento do aluno relativamente à equação $1+x^2 = \cos x$, presente quinta entrevista (Anexo 5), realizada em conjunto com o Francisco, mostra evidências disso. Nesse caso, o Diogo não considerou o recurso à calculadora gráfica nem mesmo quando o Francisco falou em colocar a expressão na máquina. Aliás, o Diogo expressou até alguma confusão entre os conceitos de função e equação, referindo-se primeiro a "uma função a sério", e depois exclamando "Ah! Isso é uma equação":

> **Francisco**: (Pausa bastante longa) Isto tem solução? (Risos) (Escreve a equação na folha).
> **Diogo**: Isto parece-me aquela cena fundamental da trigonometria!

> **Francisco**: E é!
> **Diogo**: Passando o menos um e depois raiz do cosseno, de *x*.
> **Francisco**: Também pensei nisso. (Pausa longa) Vamos tentar fazer assim? (Começa a tentar resolver a equação). Isto supostamente devia ser o seno (aponta para *x* ao quadrado).
> **Diogo**: Pois! Supostamente devia. Ou então um y que é para isso ser uma função a sério, que isso não é nenhuma função. Ah! Isso é uma equação (risos).
> **Francisco**: Então aqui o um é que será o y! Mas isso não faz sentido, não dá para (pega na máquina), colocar aqui. (E5, questão 3)

O facto de a equação evocar imagens mentais, como a fórmula fundamental da trigonometria, também pode ter contribuído para que o procedimento gráfico não tenha sido inicialmente considerado pelos alunos. Mas, mesmo depois de o Francisco ter levantado a questão da utilização da calculadora gráfica, essa hipótese não foi ponderada pelo Diogo. Quando a investigadora os questionou se poderiam ter usado a calculadora gráfica, o Diogo referiu que era muito difícil e que não sabiam fazer, quando, noutras ocasiões, utilizou o esquema usual sem qualquer problema. Este comportamento sugere a existência do fenómeno de compartimentação. O problema parece estar relacionado com o tipo de equação, mais concretamente com o facto de a expressão envolver trigonometria e evocar um determinado tipo de imagens mentais mais relacionadas com este conteúdo do que com as funções propriamente ditas. Os dados mostram que, à exceção deste caso, o Diogo não teve dificuldade em adaptar os esquemas de utilização desenvolvidos para a resolução de equações ou inequações às novas classes de funções que lhe foram surgindo ao longo dos dois primeiros anos do secundário.

7.3.4. Esquemas de determinação de pontos notáveis do gráfico de uma função

A determinação dos zeros de uma função, ou dos extremos relativos, utilizando a calculadora gráfica é, de um modo geral, feita pelo Diogo recorrendo ao menu *Calc*. Devido aos constrangimentos da sua calculadora, o esquema de utilização inclui a determinação de um intervalo definido por um valor à esquerda e outro à direita do zero, ou do extremo, e pela indicação de um ponto hipoteticamente próximo do ponto notável – *Guess*.

Fase inicial do processo de génese instrumental

Antes do esquema usual se tornar rotineiro na atividade do aluno foi possível observar o Diogo a recorrer, por sua iniciativa, à representação numérica na tabela para obter o valor de *x* para o qual a função que representa a diferença entre as classificações corrigidas e as classificações originais $y = \sqrt{\frac{1}{2}x} - x$, tem um máximo (questão 1.5 da segunda entrevista, Anexo 2). A abordagem inicial do aluno à questão revelou alguma incompreensão relativamente à noção de extremo, uma vez que começou por referir que ia determinar o máximo da função que representa as classificações corrigidas, não tendo em conta que, sendo a função crescente, o máximo seria atingido no extremo do intervalo. Contudo, esse equívoco foi facilmente esclarecido quando o aluno tentou efetuar os procedimentos usuais recorrendo à calculadora. A representação gráfica das funções correspondentes às classificações corrigidas e originais permitiu-lhe compreender o que precisava de determinar:

> **Diogo**: […] Vou calcular, vou calcular o máximo de classificação que se pode ter.
> **Investigadora**: Vais calcular o máximo de quê?
> **Diogo**: (O aluno faz algo na máquina) Talvez não seja assim. (Nova exploração na calculadora) Ah, tem que ser a diferença entre os dois. Terá que se calcular a distância entre esta reta e esta curva. Mas eu não tenho bem a certeza como é que isto se faz. (E2, questão 1.5)

Na tentativa de explorar a questão, o Diogo começou por percorrer o menu *Calc*, optando depois por recorrer à tabela, revelando que o processo de génese instrumental no que diz respeito a este menu, na altura da entrevista, era praticamente inexistente:

> **Diogo**: Não sei, só se for … (pausa). Como é que eu consigo? Ah, é aqui *tableset* (o aluno coloca zero para o primeiro valor de *x* e 200 no acréscimo de *x*)
> **Investigadora**: Duzentos?
> **Diogo**: Não, haa, eu não sei bem aqui, ainda não sei trabalhar bem com isto.
> **Investigadora**: Não, isso é o "passo" que tu vais dar de um valor de *x* para outro. (E2, questão 1.5)

Apesar de conseguir comunicar o que pretendia obter "talvez se pudesse ver, onde é que, qual era a maior diferença" (E2, questão 1.5), a observação da tabela não foi suficiente para o aluno o conseguir concretizar, pelo que a investigadora lhe sugeriu que considerasse uma outra função. Após compreender como deveria definir essa função, o Diogo visualizou a representação gráfica, mas não considerou a hipótese de determinar o máximo graficamente, optando por voltar à tabela:

> **Investigadora**: Ora, já tens aí a função que te dá todas as diferenças. E agora o que é que tu querias ver?
> **Diogo**: Qual é que era a classificação que recebe maior aumento.
> **Investigadora**: Que seria o quê?
> **Diogo**: Seriam várias.
> **Investigadora**: A maior, a maior, a que recebe um maior aumento de todas. Ou seja onde a diferença é maior. Seria calcular o quê?
> **Diogo**: O ponto de intersecção entre estas duas.
> **Investigadora**: Porquê? Porquê a intersecção?
> **Diogo**: (O aluno observa a calculadora) Se calhar era mesmo melhor ir à tabela.
> **Investigadora**: Pois, pode ser, não é?
> […]
> **Diogo**: (Manuseando a calculadora) Eu já sei qual é o valor. Ai, (pausa), aqui. A maior diferença entre os dois, entre o y_1 e o y_2.
> **Investigadora**: É quanto?
> **Diogo**: É cinquenta, no x. É quem tiver cinco valores, neste caso cinquenta pontos, é vai sofrer um maior aumento. (E2, questão 1.5)

Embora no episódio descrito o Diogo tenha preferido recorrer à representação numérica para obter o máximo da função, isso pode ter acontecido por se encontrar numa fase inicial do processo de génese instrumental, já que os dados mostram que essa não é habitualmente a representação que utiliza para obter pontos notáveis do gráfico de uma função. O esquema usual envolve a representação gráfica e o menu *Calc*.

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

Ao aplicar o esquema usual, o Diogo tem que definir um intervalo onde o zero ou extremo esteja situado, o que faz parte do processo de instrumentação relativo à sua calculadora gráfica. O episódio seguinte mostra que a definição do intervalo pode levantar problemas, particularmente se o aluno não descodificar a mensagem de erro devolvida pela máquina. Ao tentar determinar um dos zeros da função

$f(x)=\left|x^2+50x-104\right|$, o Diogo não definiu corretamente o intervalo, obtendo, por diversas vezes, mensagem de erro. O aluno optou então por recorrer a outra opção do menu *Calc*, determinando o mínimo, mas também não conseguiu decifrar o valor, escrito em notação científica, devolvido pela máquina:

> **Diogo**: Estou a tentar calcular os zeros, desta função (obtém novamente mensagem de erro). Mas dá erro (volta ao gráfico), só se isto não tem zeros (começa por deslocar o cursor durante um tempo, em seguida carrega em *Trace* e desloca o cursor, volta a carregar em *Calc* e, desta vez, escolhe a opção *Minimum*). […] Mas já reparei que assim não dá, por causa dos pontos que eu pensava que eram os zeros, não são. Isto não está em cima dos eixos, (levanta a máquina para ver melhor) porque fui calcular o valor mínimo, e não me deu um zero.
> **Investigadora**: Não? Quanto é que te deu?
> **Diogo**: Deu-me dois vírgula oito, seis, cinco, seis, e continua, não me dá um zero. (E3, questão 1)

Esta situação levou-o a questionar a existência de zeros onde supostamente existiriam, considerando a hipótese de a função ter quatro zeros. O estabelecimento de conexões com a representação algébrica foi sugerido pela investigadora, acabando o aluno por concluir que a função só poderia ter dois zeros:

> **Diogo**: […] O que eu estava a pensar que era o zero não é, e que isto tem quatro zeros. (Pausa) Será?
> **Investigadora**: (Ri) Podes tentar imaginar (pausa) a parábola, não é?
> **Diogo**: Sim.
> **Investigadora**: E depois pensar no módulo, dessa função, e pensares, o que é que pode acontecer?
> **Diogo**: (Pausa) Pois devia de ter só dois zeros. Mas calculei isto e isto não me deu. (Vai ao *Calc*, percorre e carrega em *Value*) Ah, mas eu não tenho o valor de *x*. (E3, questão 1)

O Diogo tentou recorrer a outra funcionalidade do menu *Calc*, a opção *Value*, mas excluiu de imediato essa hipótese. Voltou a tentar determinar o zero, continuando a obter mensagem de erro, pelo que a investigadora acabou por lhe chamar a atenção para a mensagem devolvida:

> **Investigadora**: […] Diz que é um erro no intervalo, portanto, tu não estás a fazer bem o intervalo. De certeza que estás a escolher à esquerda e à direita?

> **Diogo**: (Pausa) Estou, à esquerda e à direita do zero. […] Aqui, à direita, aqui à esquerda.
> **Investigadora**: Hum? Mas ela primeiro pede à esquerda e depois à direita.
> **Diogo**: Ah, é?
> **Investigadora**: Então não é?
> **Diogo**: Ah, então está um bocado trocado.
> **Investigadora**: Como? Olha lá o que a máquina te pede, *Left* (aponta), para a esquerda do zero que tu queres.
> **Diogo**: Ah! […] Ah, realmente se calhar foi por isso. (E3, questão 1)

Este tipo de situações ocorrem usualmente no início do processo de génese instrumental, embora esta tenha decorrido já na terceira entrevista. De qualquer forma, os procedimentos acabam por se tornar rotineiros e não levantam qualquer tipo de dificuldade. Contudo, a interpretação de um valor devolvido pela máquina em notação científica nem sempre é feita corretamente pelo Diogo que, muitas vezes, foca apenas as primeiras casas decimais e não "lê" o número corretamente.

Em situações usuais o Diogo conseguiu utilizar a calculadora como um instrumento eficaz na determinação, quer dos zeros, quer dos extremos, apelando ao esquema usual. Tal pode ser percebido, por exemplo, na sua resolução relativa à questão 4.2 do teste intermédio de 5 de maio do 10.º ano (Figura 58), em que era pedido para, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determinar o valor de *a*, arredondado às décimas, sendo o intervalo da forma $[a,+\infty[$ o contradomínio da função $f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$ (Anexo 9).

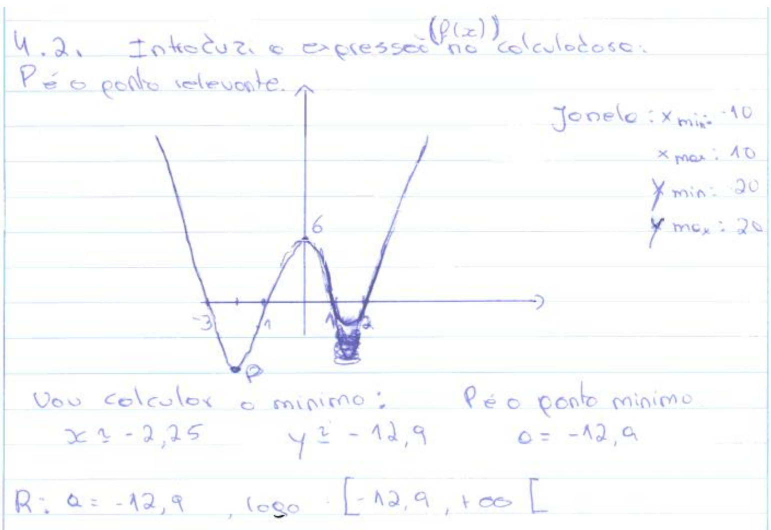


Figura 58 – Resolução da questão 4.2 do teste intermédio de 5 de maio de 2010.

Existem, contudo, situações em que, devido à função envolvida, se torna necessário recorrer a outros esquemas para determinar os zeros ou os extremos. Por exemplo, na questão 3 da terceira entrevista (Anexo 3), apesar de efetuar os procedimentos corretamente, o Diogo não conseguiu obter o valor correspondente ao limite inferior do domínio da função $\left(A(x)=\left(\sqrt{50x-625}\right)\left(25-x\right)\right)$, nem recorrendo à opção zero, nem à opção mínimo. Com alguma sorte, alterando a janela de visualização, poderia obter o zero (ou o mínimo), no entanto, o mais provável seria continuar a obter mensagem de erro. Como também não poderia recolher informação da alínea anterior, já que não determinou corretamente o domínio da função, a investigadora sugeriu-lhe que recorresse à tabela:

> **Diogo**: Eu queria saber este valor aqui (aponta). […] Mas não, não consigo encontrar, tentei o zero, o mínimo … (risos)
> **Investigadora**: Estratégias?
> **Diogo**: Quer dizer que não dá para encontrar aqui assim, este valor (risos).
> **Investigadora**: […] Para além dessas funcionalidades da calculadora, há uma outra funcionalidade que dá muito jeito […], que é a tabela.
> **Diogo**: (Pausa) Pois, a tabela (vai à tabela). Ok. […] Não estou habituado a utilizar a tabela e às vezes esqueço-me. (E3, questão 3)

A tabela de valores permitiu-lhe obter uma aproximação para o valor procurado, embora com algum erro: "É melhor fazer treze, não preciso de fazer às décimas? Senão teria que mudar a tabela" (E3, questão 3). Para além desta, as situações com que o aluno se deparou ao longo do tempo não envolveram funções onde o esquema usual levantasse problemas. Pode salientar-se, no entanto, outra situação em que o Diogo recorreu à representação numérica, embora por motivos diferentes, dado que, de facto, a função não possuía extremo relativo. Essa situação ocorreu na oitava entrevista (Anexo 8), ao tentar determinar o contradomínio da função definida por $y=\dfrac{2x-x^3}{x}$ (questão 1, alínea iv)), recorrendo à calculadora gráfica. O Diogo tentou utilizar o esquema usual para determinar o suposto máximo relativo da função, mas foi confrontado com mensagem de erro. Começou, então, por confirmar que a função não estava definida para x igual a zero recorrendo à opção *Value* do menu *Calc*, e mostrou o seu desconforto por não conseguir usar o procedimento habitual:

Diogo: Não, é que isto não tem nenhum valor, para quando o *x* é zero, a parábola não tem um valor.
Investigadora: Porquê?
Diogo: Porque …
Investigadora: Porque será que isso está a acontecer?
Diogo: Talvez por ser, por o *x* estar no denominador.
Investigadora: Talvez? Ou?
Diogo: E quando o *x* é zero vai anular-se, não vai ter nenhum valor. (Pausa) Portanto eu não conseguirei saber qual é o máximo. Quer dizer, conseguirei! Não, não conseguirei!
Investigadora: (Ri) Então?
Diogo: Não, eu estava a pensar, nós sabemos que ali não tem um zero, mas o número imediatamente a … (abana a cabeça), não tem um valor, mas o número imediatamente a seguir vai ter, mas eu não sei qual é aquele que devia lá estar, onde não há nada, pronto, supostamente se fosse uma parábola normal …
Investigadora: Sim.
Diogo: Toda fechadinha (gesto com a mão como se percorresse uma parábola), nós saberíamos o máximo.
Investigadora: Sim.
Diogo: E com esse máximo nós, pronto … (E8)

Após algum tempo, o Diogo sugere então recorrer à tabela: "Só se eu for aqui à tabela!" (E8). Porém, demonstrou alguma dificuldade em transformar a tabela num instrumento eficaz. Alterou o acréscimo que tinha definido, colocando uma unidade, o que não lhe permitiu tirar conclusões:

Diogo: Mesmo assim acho que isto não vai resultar (observa a tabela), continuamos sem saber!
Investigadora: Então, e não consegues arranjar uma estratégia melhor do que essa?
Diogo: Não, porque eu não consigo introduzir na, na calculadora, um *x* que seja mesmo a seguir ao zero! (Pausa) zero, vírgula, zero, zero, zero, zero, zero …
Investigadora: Porquê? Porque é que não consegues?
Diogo: (Ri) Essa funcionalidade na calculadora, eu acho que não consigo (vai às definições da tabela). Um número imediatamente a seguir, *Stora*?
Investigadora: Quer dizer, o número imediatamente a seguir não sabemos qual é, não é?
Diogo: Pois!
Investigadora: Mas um número muito próximo de zero! De maneira a conseguires tentar perceber qualquer coisa!
Diogo: Já coloquei o um, mas o um, já não é assim próximo.
Investigadora: O um não é nada próximo de zero! Não é? (E8)

Depois do diálogo com a investigadora o Diogo introduz na tabela o valor de x correspondente a dez elevado a menos dezassete concluindo: "É dois! Sabemos então que o máximo (pausa), é dois, aberto". Apesar da dificuldade inicial, o aluno conseguiu utilizar a calculadora gráfica para obter a informação pretendida, sendo visível, no entanto, um fraco nível no processo de génese instrumental relativamente ao menu tabela. Uma maneira relativamente simples de aplicar o esquema usual teria sido a introdução da expressão simplificada na calculadora, mas essa hipótese não foi considerada pelo Diogo.

É interessante notar que, por vezes, a adaptação do esquema usual para um novo tipo de funções pode colocar alguns entraves. Por exemplo, na questão 2.3 da sexta entrevista (Anexo 6), após ter compreendido por observação da representação gráfica da função $h(x)=\dfrac{20-9x-2x^2}{x-3}$, não familiar, o que teria que fazer para determinar os valores de k, que tornam a condição $h(x)=k$ impossível: "Por exemplo, daqui, aqui (aponta no eixo das ordenadas), neste espaço, há de ser (pausa longa), estão os valores de k" (E6), o Diogo determinou a imagem de zero, supondo que o mínimo seria aí atingido, justificando:

> **Diogo**: Porque pensava que era onde, onde (pausa longa), quando x, quando a imagem de y, era mais, não, era o objeto em que y, era mais, pequeno, daquela …
> **Investigadora**: Então seria melhor fazer o quê?
> **Diogo**: O mínimo! Mas é que eu não sabia que isso dava para fazer aqui um mínimo. (E6)

A sua resposta "Mas é que eu não sabia que isso dava para fazer aqui um mínimo" revela que nem sempre os esquemas desenvolvidos são facilmente adaptados às novas funções. Nas situações em que o aluno não está familiarizado com as funções envolvidas, a representação gráfica visualizada na calculadora pode condicionar a aplicação do esquema adequado. Por exemplo, relativamente à questão 4.2 do teste de 25 de outubro de 2010 (Anexo 15), o Diogo não considerou a determinação dos extremos relativos, o que provavelmente ficou a dever-se à representação gráfica visualizada. O aluno destaca o que na representação gráfica lhe parece constante, salientando que nesse caso a senhora "está parada" (Figura 59). Os valores assinalados no eixo das abcissas devem ter sido obtidos através da funcionalidade *TRACE*, mas o aluno não o explicita. Apesar de o enunciado fazer referência à subida e descida das pulsações, parece que a representação gráfica visualizada terá contribuído para a dificuldade de interpretação da questão.

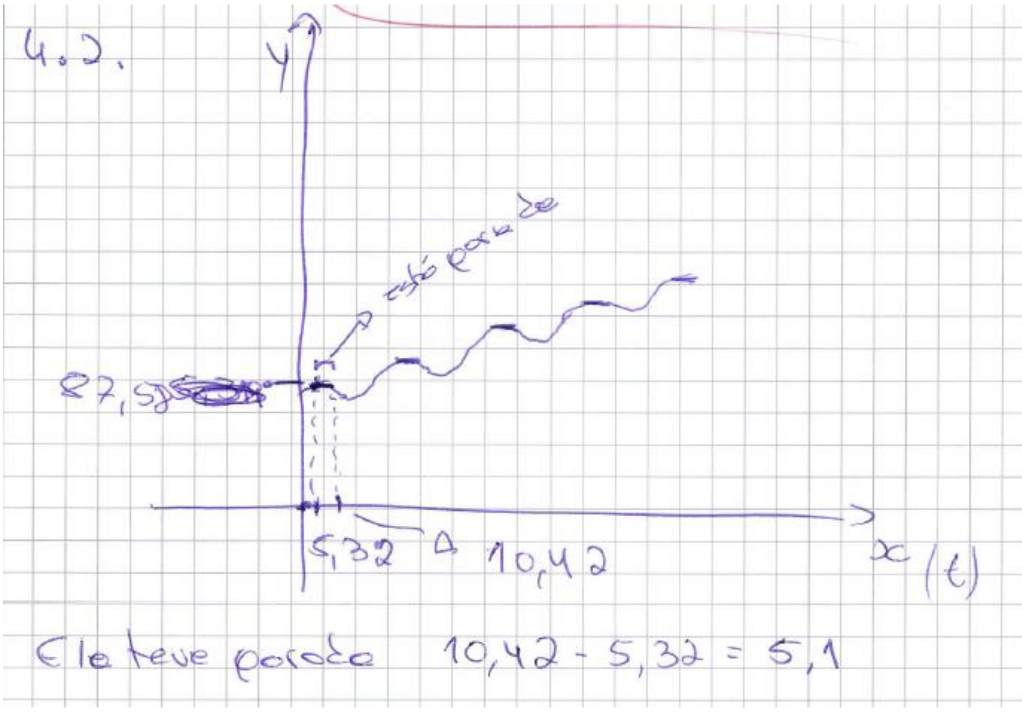


Figura 59 – Resolução da questão 4.2 do teste de 25 de outubro de 2010.

7.3.5. Esquemas de determinação da derivada de uma função num ponto

Para determinar a derivada de uma função num ponto x_0, recorrendo à calculadora gráfica, o Diogo utiliza o seguinte esquema: Edita a função original, edita uma função constante definida pela derivada da função original, em ordem a *x*, no ponto x_0, e determina, por meio dessa função, a imagem de um certo valor de *x*, obtendo assim a derivada no ponto de abcissa x_0.

Fase inicial do processo de génese instrumental

Esse esquema é explicado pelo aluno na sétima entrevista (Anexo 7), questão 1.3, ao determinar o declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa zero:

> **Diogo**: Então, chegamos à conclusão que eu já tenho o gráfico. Agora (pausa bastante longa), isto tinha assim aquela coisa gira

> que nós fizemos na aula, da derivada, desta expressão (aponta a representação gráfica no visor), vejamos se eu ainda me lembro (vai ao editor de funções) que era … A derivada, com a calculadora, desta função, calcular a derivada, da outra expressão. (Obtém mensagem de erro) Pois! Mas como eu já previa, deu-me erro.
> **Investigadora**: Hum, então, porque será?
> **Diogo**: Não sei! Ah! Já sei. (Volta ao editor de funções) *x* (coloca *x*), será? (Visualiza a representação gráfica).
> **Investigadora**: Explica aquilo que fizeste, para eu perceber o que é que introduziste na calculadora, eu daqui não vejo nada (ri).
> **Diogo**: Introduzi, pronto, eu não sei como é que se chama esta função (volta ao editor de funções e aponta), esta, pronto deve ser, esta função da calculadora … derivada, para determinar, *nDerive*, haaa, depois já tinha posto aqui, introduzido na, no *y3* já tinha introduzido a expressão, de *f* de *x*.
> **Investigadora**: Sim.
> **Diogo**: Haaa, e pus aqui *y3* (aponta).
> **Investigadora**: Sim.
> **Diogo**: E depois queremos saber, e depois, aqui a derivada (aponta o enunciado), no ponto de abcissa, zero, logo, pus que *x* era zero.
> **Investigadora**: Ah! Sim.
> **Diogo**: E então obtive, uma reta, que há de ser a, a derivada daquele gráfico (pausa), naquele ponto. […] O meu objetivo era ver o valor da derivada, porque esse valor da derivada irá ser o declive da reta. […] Gostava de poder calcular, aqui a (volta a visualizar a representação gráfica), a reta, o, o valor do *y* […] Desta reta (risos).
> **Investigadora**: Sim, e então como é que vais fazer isso?
> **Diogo**: (Voltou ao menu *Calc* e calculou um valor) Atribuindo um valor, ao, um valor qualquer já que a reta (gesto horizontal com a mão) … Vamos atribuir um valor qualquer ao *x*, no caso foi *x* igual a zero, e, obtive que o declive, ou derivada, é menos quatro, vírgula nove, nove, nove, nove …, suponho que seja cinco, menos cinco. (E7, questão 1.3)

Não sendo efetivamente o procedimento mais rápido para obter a derivada de uma função num ponto recorrendo à calculadora, a investigadora questiona-o se não haveria outro modo de o fazer. O Diogo refere um procedimento semelhante, sem, no entanto, definir a função constante no menu gráfico, usando a mesma funcionalidade (*nDeriv*), no menu *run*. Os dados recolhidos não fornecem muita informação relativamente ao modo de utilização da calculadora gráfica no estudo das derivadas, pois a calculadora gráfica praticamente não foi usada nesse tema.

7.3.6. Síntese

Os esquemas instrumentados desenvolvidos pelo Diogo, no âmbito do trabalho com as funções ao longo dos dois primeiros anos do secundário, envolveram essencialmente a representação gráfica e a utilização do menu *Calc* – cálculo de imagens, determinação de pontos de intersecção dos gráficos de duas funções, determinação de zeros e extremos, e do menu *Math* – módulo e derivada, juntamente com outras teclas utilizadas na edição da expressão analítica das funções estudadas. Alguns esquemas envolveram a representação numérica, na tabela, mas ocorreram com menor frequência. É interessante notar que, numa fase inicial do processo de génese instrumental, o aluno optou por recorrer à tabela para determinar o máximo de uma função, mas, mais tarde, apesar de se encontrar em dificuldades perante a utilização do esquema usual, não tomou essa iniciativa, sendo o recurso à representação numérica na tabela sugerido pela investigadora. A sua exclamação "Não estou habituado a utilizar a tabela e às vezes esqueço-me" (E3), sugere que, ao longo do processo de génese instrumental, vai havendo um refinamento relativo aos esquemas de utilização, acabando alguns por se tornar dominantes.

Numa fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental os esquemas permaneceram mais ou menos invariantes, sendo adaptados de acordo com as propriedades das novas classes de funções, no entanto, foi possível perceber algumas dificuldades na adaptação do esquema de utilização relativo à determinação de extremos no caso de uma função não familiar, com o Diogo a determinar a imagem do valor da variável independente em que, pela visualização da representação gráfica, lhe pareceu existir um mínimo. O apelo a esquemas menos frequentes ocorreu em situações em que o esquema usual levantou algum tipo de dificuldade ao aluno, devido aos constrangimentos da sua calculadora ou às propriedades das funções envolvidas.

A complexidade da expressão algébrica pode ter condicionado o recurso à calculadora gráfica inibindo o aluno de editá-la na máquina. Além disso, o tema matemático que a representação algébrica evoca pode também ter influenciado a flexibilidade em mudar de registo de representação e o recurso aos esquemas de utilização desenvolvidos.

Os esquemas de enquadramento fazem parte integrante da generalidade dos esquemas de utilização, já que, estando em causa a representação gráfica, é sempre necessário encontrar uma janela de visualização apropriada. O Diogo começa usualmente por recorrer ao *Zoom ZStandard* e, caso não consiga uma visualização adequada, vai ajustando os valores mínimos e máximos do retângulo de visualização, através de tentativa e erro, por vezes, com alguma ligação com a representação algébrica, ou com alguns aspetos do contexto no caso de um problema, embora o estabelecimento de conexões entre representações não seja um aspeto marcante na atividade do aluno.

7.4. Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada

Nesta secção são identificadas as situações e o objetivo com que o Diogo recorre à calculadora gráfica, no âmbito do trabalho com as funções.

7.4.1. Representação gráfica de uma função

Sempre que foi pedido ao aluno para representar graficamente uma função, este recorreu à calculadora gráfica. Nesses casos, embora não sendo muito rigoroso, tentou escolher uma escala para os eixos e determinou, recorrendo à máquina, alguns pontos que considerou relevantes na representação gráfica. Por exemplo, na questão 1.1 da quarta entrevista, parte individual (Anexo 4), o Diogo tentou considerar uma escala, embora não o tenha feito de forma adequada, e, para além das intersecções com o eixo das abcissas, considerou relevante a determinação dos pontos correspondentes aos extremos relativos da função (Figura 60).

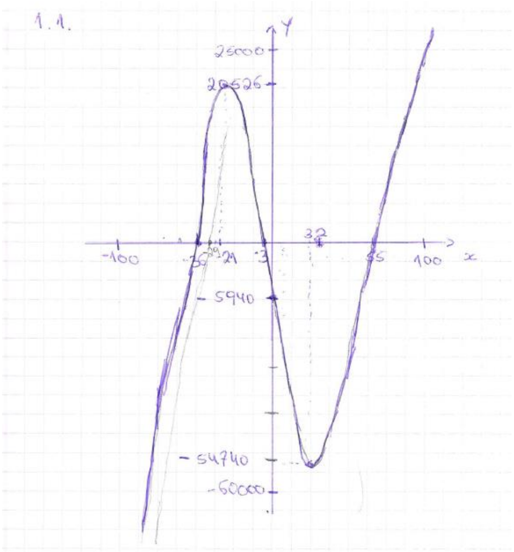


Figura 60 – Representação gráfica da função *p* (E4, parte individual, questão 1.1).

Para além das situações em que era pedida uma representação gráfica, a calculadora gráfica foi, por sua iniciativa, utilizada sistematicamente como um instrumento para converter a representação algébrica na representação gráfica.

7.4.2. Confirmação gráfica de resultados obtidos analiticamente

A calculadora gráfica é frequentemente utilizada como instrumento de confirmação de resultados obtidos analiticamente. Essa confirmação depende em parte do tempo que o aluno tem disponível para a realização das tarefas:

> **Investigadora**: Na [questão] 1.3, por exemplo, fizeste analiticamente, quando fazes analiticamente tens tendência a confirmar, ou nem por isso?
> **Diogo**: Quando tenho tempo, às vezes, confirmo (ri). (E6)

A menor ou maior familiaridade com os procedimentos analíticos parece ser também um fator que influencia a decisão de efetuar, ou não, a confirmação gráfica, embora isso não seja dito de forma explícita pelo aluno. O conteúdo matemático envolvido não parece ser decisivo, já que é possível identificar situações em que o aluno faz a confirmação e outras em que não o faz, envolvendo diversos conteúdos.

Familiaridade com os procedimentos analíticos

O comportamento do aluno perante determinadas questões parece indicar que, no caso em que os procedimentos analíticos já são rotineiros e o aluno sente uma certa segurança relativamente à sua execução, a confirmação recorrendo à calculadora gráfica poderá eventualmente ocorrer, caso tenha tempo, mas não parece ser usual. Por exemplo, relativamente à questão 1.3 da sexta entrevista, o Diogo efetuou a resolução analítica (Figura 61) e não mostrou intenção de efetuar a confirmação gráfica.

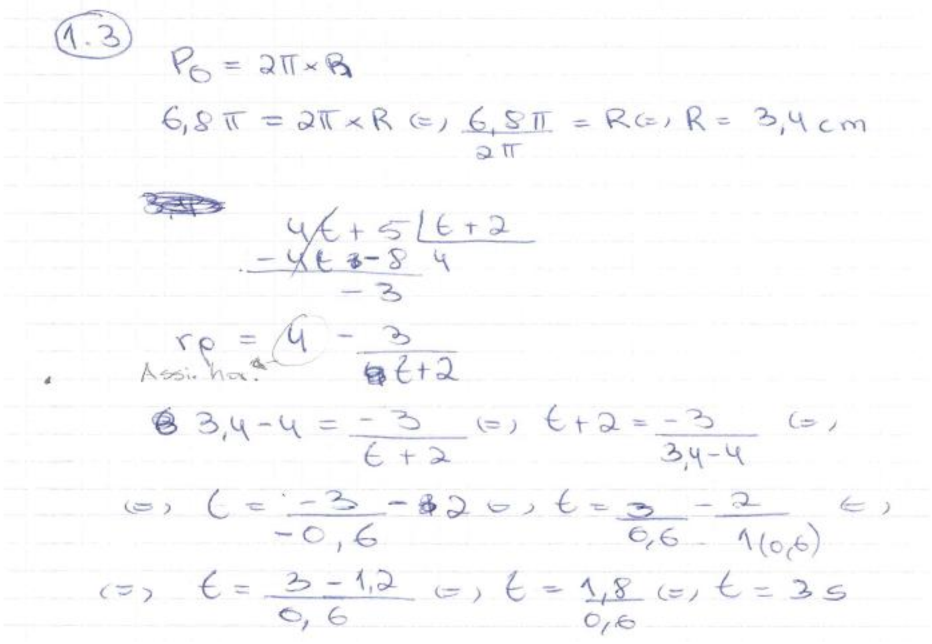
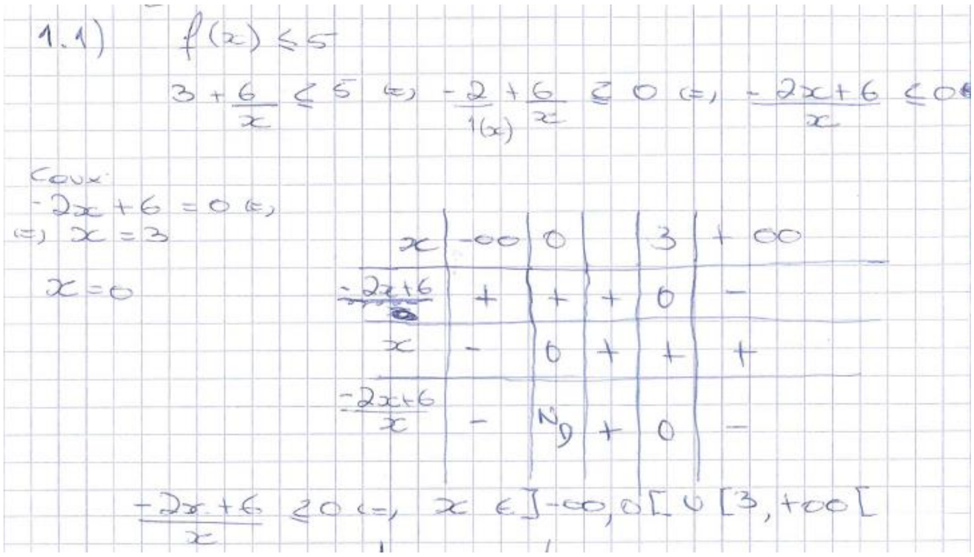


Figura 61 – Resolução da questão 1.3 (E6).

Esta atitude pode ser percebida noutras situações em que os procedimentos algébricos já se tornaram rotineiros na altura em que o aluno resolve a tarefa, como é o caso, por exemplo, da inequação fracionária proposta na questão 1.1 da ficha *Funções racionais e irracionais* (Anexo 17). A resolução analítica (Figura 62) não parece ter sido confirmada, apesar de o Diogo ter entretanto sugerido que poderiam ter resolvido graficamente:

> **Diogo**: Também podemos fazer com a máquina! Eu acho que sim, nós podíamos fazer com a máquina era muito melhor! […] Estás a fazer o gráfico? Este aqui [questão 1.1]?
> **Francisco**: Não! Estava a fazer a 1.2.
> **Diogo**: Então mas aqui também podemos fazer com um gráfico.
> **Francisco**: Então, mas agora já temos feito! (A13_11)


1.1) $f(x) \leq 5$

$3 + \frac{6}{x} \leq 5 \Leftrightarrow -2 + \frac{6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x} \leq 0$

Cou x:
$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 3$

$x = 0$

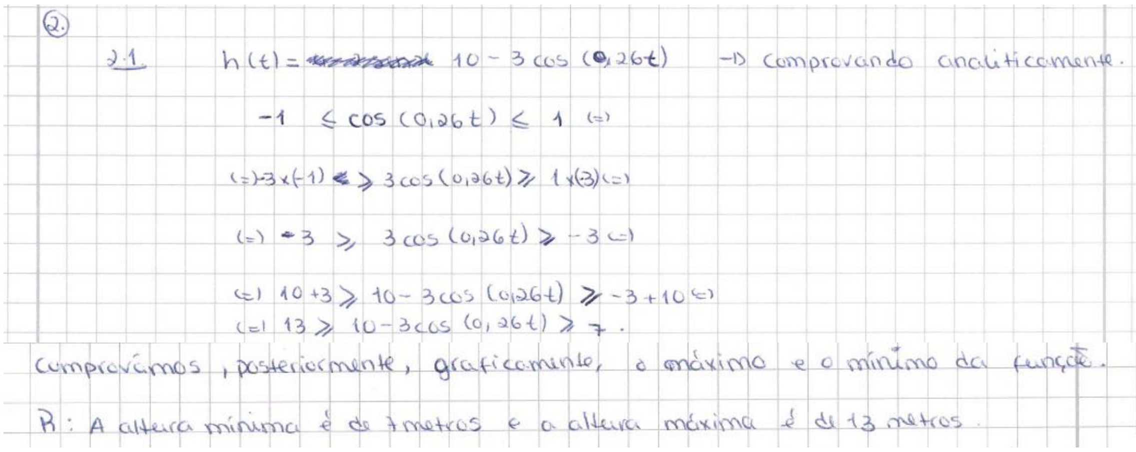
x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-2x+6$	+	+	+	0	−
x	−	0	+	+	+
$\frac{-2x+6}{x}$	−	N.D.	+	0	−

$\frac{-2x+6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$

Figura 62 – Resolução da questão 1.1 da ficha *Funções Racionais e Irracionais*, pelo par Diogo e Francisco.

Pouca familiaridade com os procedimentos analíticos

A confirmação de resultados obtidos analiticamente surge essencialmente quando o aluno, na altura em que realiza a tarefa, tem pouca familiaridade com os procedimentos analíticos. Por exemplo, antes de resolverem a ficha *Funções Trigonométricas* (Anexo 17), a professora explicou no quadro como é que podiam determinar analiticamente o contradomínio de uma função trigonométrica envolvendo um seno ou um cosseno. Os alunos tinham acabado de receber a informação e aplicaram-na na questão 2.1, tendo no entanto recorrido à calculadora gráfica para comprovar o resultado obtido, expressando-o inclusivamente no papel (Figura 63).


2.

2.1 $h(t) = 10 - 3\cos(0{,}26t)$ → comprovando analiticamente.

$-1 \leq \cos(0{,}26t) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \times (-1) \geq 3\cos(0{,}26t) \geq 1 \times (-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \geq 3\cos(0{,}26t) \geq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 + 3 \geq 10 - 3\cos(0{,}26t) \geq -3 + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13 \geq 10 - 3\cos(0{,}26t) \geq 7.$

Comprovámos, posteriormente, graficamente, o máximo e o mínimo da função.

R: A altura mínima é de 7 metros e a altura máxima é de 13 metros.

Figura 63 – Resolução da questão 2.1, da ficha *Funções Trigonométricas*, pelo par Diogo e Francisco.

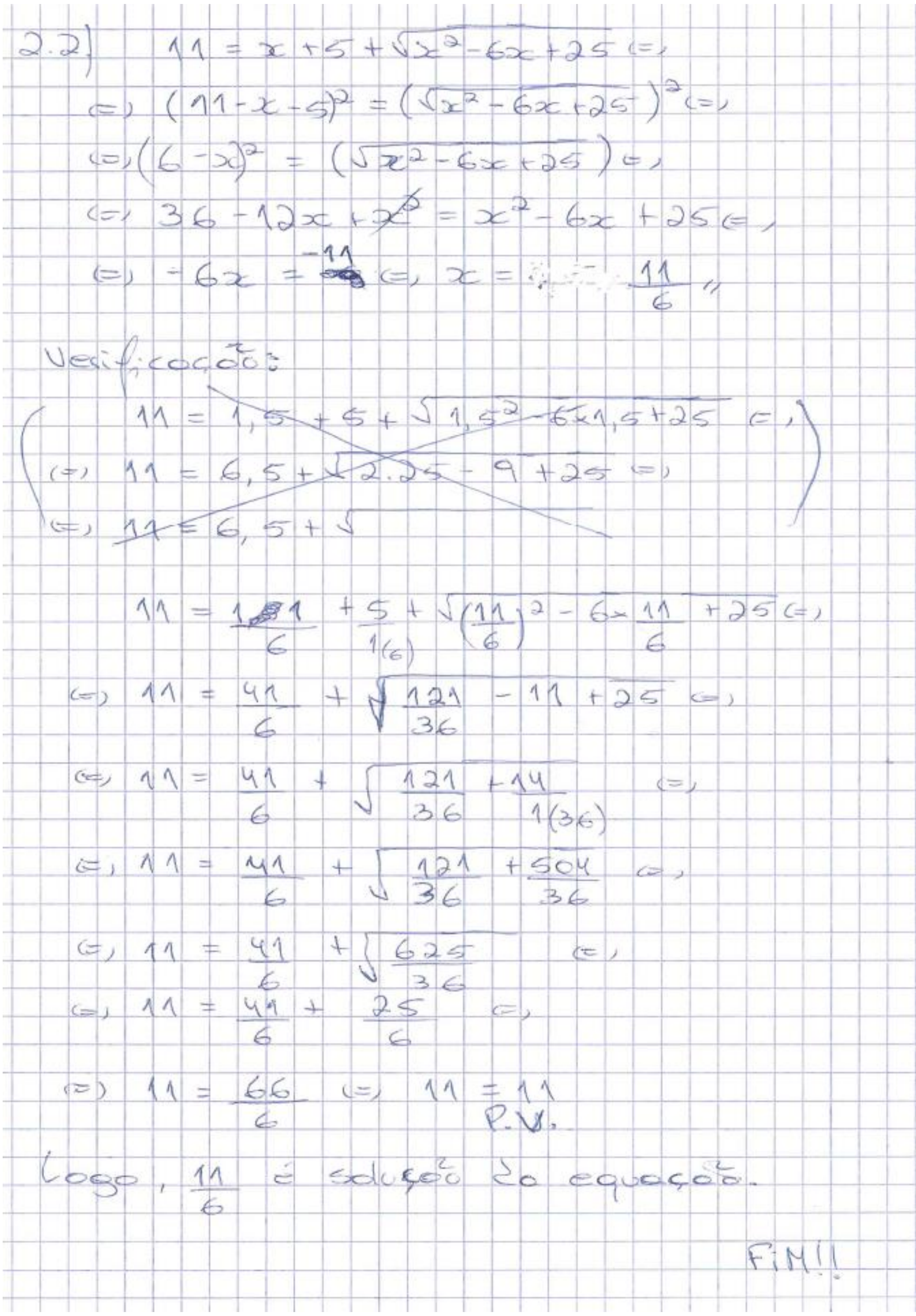
Outro exemplo onde a confirmação gráfica é evidente através do diálogo estabelecido com a professora diz respeito à equação irracional da questão 2.1 da ficha *Funções Racionais e Irracionais* (Anexo 17), cujo tema tinha sido iniciado há apenas três aulas atrás:

> **Professora**: Dá isso é? Já verificaram?
> **Francisco**: Já verifiquei.
> **Professora**: Como é que sabem? Verificou como?
> **Francisco**: (Apontando para a máquina) Colocámos aqui …
> **Professora**: Ah!
> **Francisco**: Ah, verificação e tal …
> **Diogo**: Que verificação? Ah! Mas eu sei que dá *Stora*, já vim aqui ver.
> **Professora**: Então viu como? Com a calculadora?
> **Diogo**: Com a calculadora gráfica. (A13_11)

Durante o diálogo com a professora o Francisco recordou que a resolução analítica de uma equação irracional inclui a verificação das soluções da equação obtida através da implicação formal na equação original. Ao fazerem a verificação analítica concluíram que algo estava errado (Figura 64). A professora ajudou-os a encontrar o erro de cálculo e os alunos voltaram a confirmar graficamente, obtendo dessa vez uma aproximação correta da solução:

> **Professora**: Verifiquem os cálculos, verifiquem os cálculos que têm, se estão corretos.
> **Francisco**: Então mas eu na calculadora vi!
> **Professora**: Como é que …? Deu bem na calculadora?
> **Francisco**: Deu!
> **Professora**: Deu?
> **Francisco**: Deu.
> **Professora**: Tens a certeza?
> **Francisco**: Absoluta. Olhe aqui *Stora*!
> **Professora**: Eu acho que não!
> **Francisco**: Dá mesmo, e até ajustei a janela e dá exatamente 1,5; e a expressão é esta (faz a leitura da expressão introduzida).
> **Professora**: (Olha os cálculos analíticos) Trinta e seis (pausa), menos vinte e cinco, quanto é que deu?
> **Francisco**: Menos nove! Não! Nove (pausa), é nove!
> **Professora**: Quanto é que é trinta e seis …
> **Diogo**: É onze!
> **Francisco**: *Stora*, então como é que eu vi na calculadora bem?
> **Professora**: Alguma coisa se passa aí!

Não foi possível perceber qual o erro que o Francisco cometeu na calculadora gráfica, no entanto, numa situação usual, o recurso à confirmação gráfica poderia contribuir para a correção do erro de cálculo feito na resolução analítica.



2.2) $11 = x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (11 - x - 5)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 6x + 25}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6 - x)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 6x + 25}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36 - 12x + \cancel{x^2} = x^2 - 6x + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{6}$ //

Verificação:

$\cancel{11 = 1,5 + 5 + \sqrt{1,5^2 - 6 \times 1,5 + 25} \Leftrightarrow}$

$\cancel{\Leftrightarrow 11 = 6,5 + \sqrt{2.25 - 9 + 25} \Leftrightarrow}$

$\cancel{\Leftrightarrow 11 = 6,5 + \sqrt{}}$

$11 = \frac{11}{6} + \frac{5}{1_{(6)}} + \sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2 - 6 \times \frac{11}{6} + 25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11 = \frac{41}{6} + \sqrt{\frac{121}{36} - 11 + 25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11 = \frac{41}{6} + \sqrt{\frac{121}{36} + \frac{14}{1_{(36)}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11 = \frac{41}{6} + \sqrt{\frac{121}{36} + \frac{504}{36}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11 = \frac{41}{6} + \sqrt{\frac{625}{36}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11 = \frac{41}{6} + \frac{25}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11 = \frac{66}{6} \Leftrightarrow 11 = 11$ P.V.

Logo, $\frac{11}{6}$ é solução da equação.

FIM!!

Figura 64 – Resolução da questão 2.1 da ficha Funções Racionais e Irracionais, pelo par Diogo e Francisco.

Na questão 1.2 da ficha *Derivadas* (Anexo 17), realizada em conjunto com o Francisco, para além de confirmarem a solução do problema de otimização graficamente, confirmaram também se a representação gráfica da função derivada obtida por meio das regras de derivação, aprendidas recentemente, coincidia com a representação gráfica da função derivada dada pela calculadora gráfica:

> **Francisco**: Agora vou fazer a derivada desta.
> **Diogo**: Como é que isso se faz? Eu nem sabia que isso dava para fazer aí!
> **Francisco**: Stora (espera que a professora se aproxime), não dá para pedir à máquina para fazer a derivada?
> **Diogo**: Pedir à máquina! (Ri)
> **Professora**: Dá para saber.
> **Francisco**: Dá?
> **Professora**: Dá!
> **Francisco**: É assim, nós fizemos, só que temos dúvidas se é assim que fica, então mais vale fazer a derivada mesmo …
> **Professora**: Ah, mas é assim, não te dá, na calculadora não te dá a derivada, dá-te naquele ponto.
> **Diogo**: Mas vemos se a expressão que nós temos e o que deu, se é igual, o gráfico. (A17_11)

Apesar de a professora ter referido que a calculadora não dava a expressão da função derivada, o Diogo expôs a ideia de comparar a representação gráfica da função derivada obtida analiticamente com a representação gráfica da função derivada dada pela calculadora.

7.4.3. Situações matemáticas que o aluno não consegue resolver analiticamente

Esta categoria abrange as situações que o aluno não consegue resolver por não ter ainda conhecimentos analíticos para o fazer, e as situações em que a calculadora gráfica surge como um recurso por não conseguir resolver analiticamente, apesar de conhecer os procedimentos analíticos.

Situações para as quais não tem conhecimentos para resolver analiticamente

A calculadora gráfica foi utilizada pelo Diogo em várias situações onde não conhecia os procedimentos analíticos para uma resolução algébrica. Por exemplo, para obter as dimensões do triângulo de área máxima, na questão 3.3. da terceira entrevista, o Diogo recorreu à calculadora gráfica estando consciente que não conseguiria avançar por processos algébricos. Isso é evidente quando, no final da entrevista, a investigadora o questiona acerca da utilidade da calculadora gráfica:

> **Diogo**: Eu acho que é útil, apesar de ainda não estar muito habituado a trabalhar com a máquina, mas nestes casos, a máquina facilita o trabalho, não conseguimos fazer de outra forma, por exemplo, neste exercício [questão 3.3], se não fosse a máquina não dava para fazer. […] Facilita-nos. Mas aqui …, na outra [questão 1] facilita-nos, mas aqui [questão 3.3], a única maneira é ir à máquina. (E3)

As coordenadas do ponto extremante foram obtidas apelando ao esquema de utilização usual desenvolvido para o cálculo de extremos. Na Figura 65 encontra-se a resolução gráfica dessa questão, apresentada no papel, onde é possível ver uma aproximação das coordenadas do ponto extremante, obtidas com recurso à calculadora gráfica.

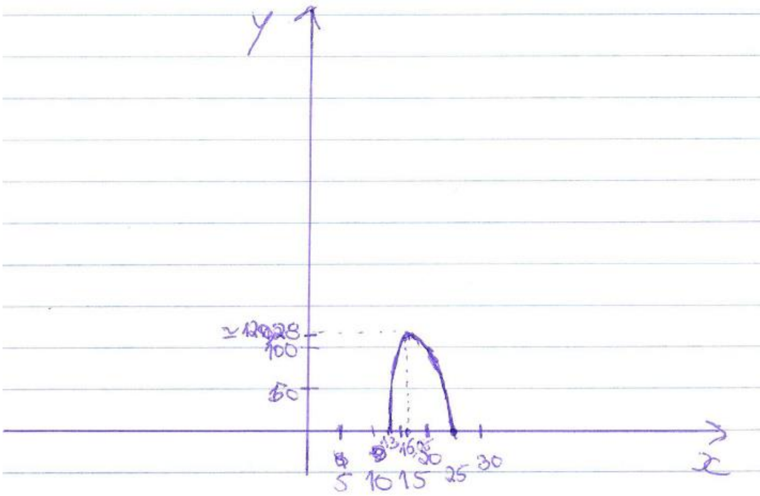


Figura 65 – Representação gráfica no papel (E3, questão 3.3).

Situações que não consegue resolver analiticamente

Os dados recolhidos parecem indicar que as situações em que a calculadora gráfica surge como uma alternativa por não conseguir resolver analiticamente, embora tendo os conhecimentos algébricos para o fazer, não são muito frequentes na atividade do aluno. Usualmente, perante uma determinada questão, o Diogo opta por resolver analiticamente ou por recorrer à calculadora gráfica, no entanto, é possível identificar algumas situações em que, devido a dificuldades na resolução analítica, o Diogo decide mudar de registo de representação. Por exemplo, o aluno começa por resolver a equação trigonométrica dada na questão 4 do teste de 25 de outubro de 2010 (Anexo 15) analiticamente, mas a partir de dada altura interrompe esse procedimento, apresentando depois a resolução gráfica com uma breve explicação (Figura 66).

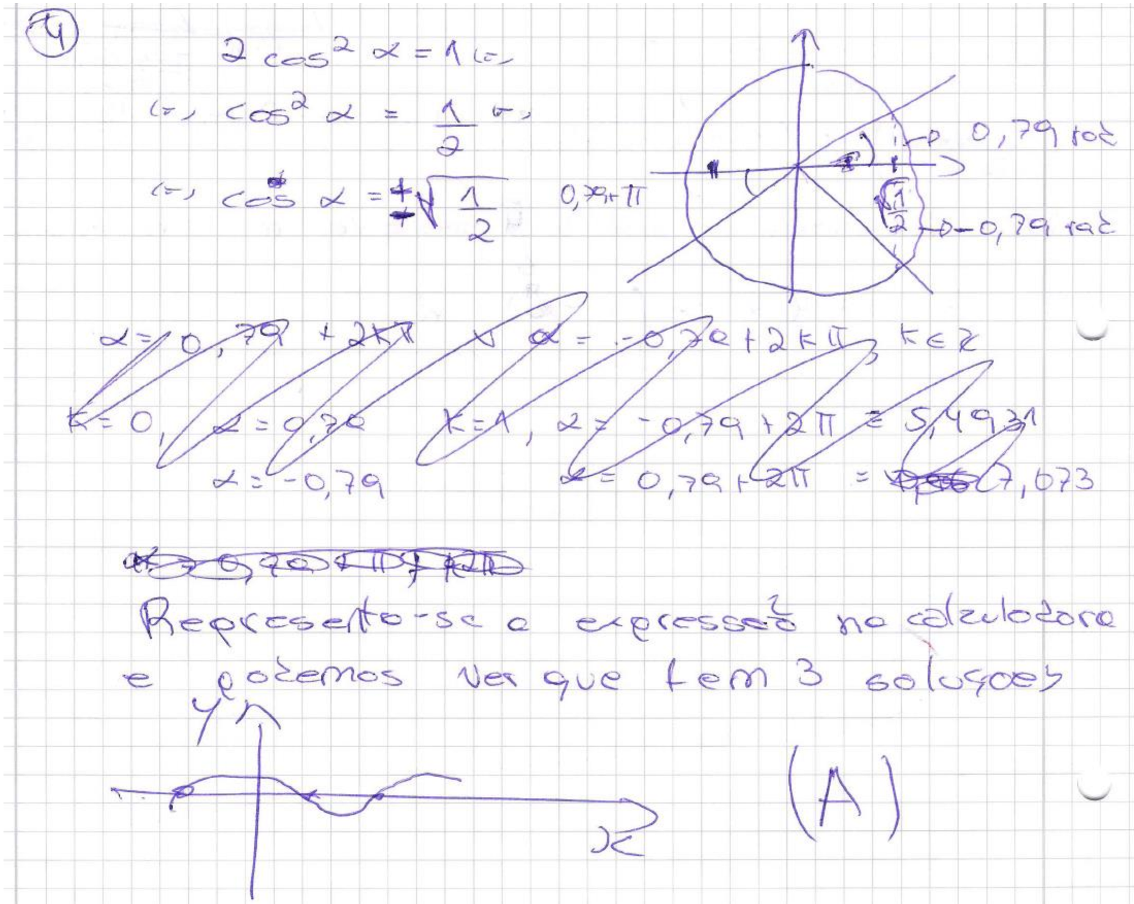


Figura 66 – Resolução da questão 4 do teste de 25 de outubro de 2010.

Podem ser identificadas mais duas situações, ambas no trabalho de pares com o Francisco, em que, após tentativa de resolução analítica, os dois alunos optam pela utilização da calculadora gráfica. Uma delas ocorreu na questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas* (Anexo 17) e a outra na questão 2.1 da ficha *Derivadas* (Anexo 17).

Relativamente à primeira situação é possível perceber que os alunos, a partir de determinado momento, não conseguem continuar a resolver a equação analiticamente

(Figura 67). Assim, decidem recorrer ao artefacto disponível, obtendo as soluções graficamente (Figura 55).

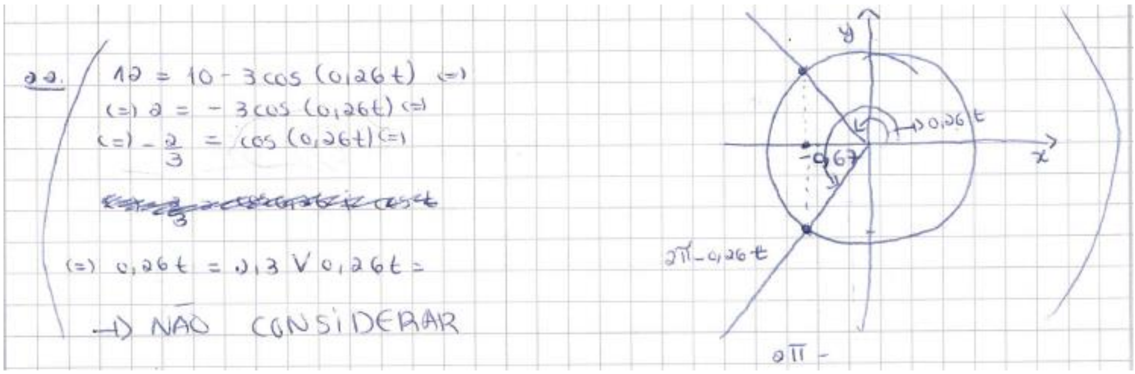


Figura 67 – Primeira tentativa de resolução da questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas*, pelo par Diogo e Francisco.

No que diz respeito à segunda situação referida, os alunos começaram também por resolver a equação analiticamente, mas as colegas da frente dizem-lhes que não vão conseguir. O Diogo, que até opta muitas vezes por recorrer à calculadora gráfica, ainda tentou encontrar uma estratégia para uma resolução analítica:

> **Sofia**: Não vais conseguir resolver isso analiticamente.
> […]
> **Francisco**: O que é que estás a fazer?
> **Diogo**: Tentar pôr o pi, depois o pi passa para aqui a dividir e ficamos só com estes números, que vai dar zero. (Pausa) Também não se vai conseguir. Não, pois não.
> **Helena**: Não.
> **Sofia**: Pois não, não vais conseguir! Graficamente!
> **Francisco**: Isto é tão complexo, com πs, *h*s …
> […]
> **Diogo**: Não, agora vamos fazer na calculadora … (Algum tempo depois) Consegues também resolver analiticamente sim senhor, fazes uma regra de Ruffini, baixas o grau, depois tens um do 2.º grau e tens outro (pausa) do 1.º, depois é só calcular os zeros. (A17_11)

Apesar da persistência do Diogo em avançar com uma resolução analítica, os alunos acabam por desistir e optam por mudar de registo de representação, embora a resolução no papel não o explicite (Figura 68). É possível ver que cometeram um pequeno erro ao equacionar o problema, escrevendo o valor 625π e não 624π dado no enunciado. A resolução do par mostra duas soluções, o que indica que os alunos não tiveram em conta o domínio da função ao definirem a janela de visualização. O domínio foi considerado posteriormente num diálogo com a investigadora, pelo que uma das soluções aparece então riscada.

(2)

2.1. $865\pi = \frac{10\pi h^2}{(3)} - \frac{\pi h^3}{3} \Leftrightarrow 865\pi = \frac{30\pi h^2 - \pi h^3}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \times 865\pi = 30\pi h^2 - \pi h^3 \Leftrightarrow 2595\pi = \pi(30h^2 - h^3) \Leftrightarrow 2595 = 30h^2 - h^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^3 - 30h^2 + 2595 = 0 \Leftrightarrow x = 12{,}09 \vee x = \cancel{26{,}2}$

Figura 68 – Resolução da questão 2.1 da ficha *Derivadas*, pelo par Diogo e Francisco.

Estas situações podem ter ocorrido, sobretudo, devido às equações envolvidas, já que, para ambas seria essencial obter informação a partir da máquina para poderem continuar a resolução analítica.

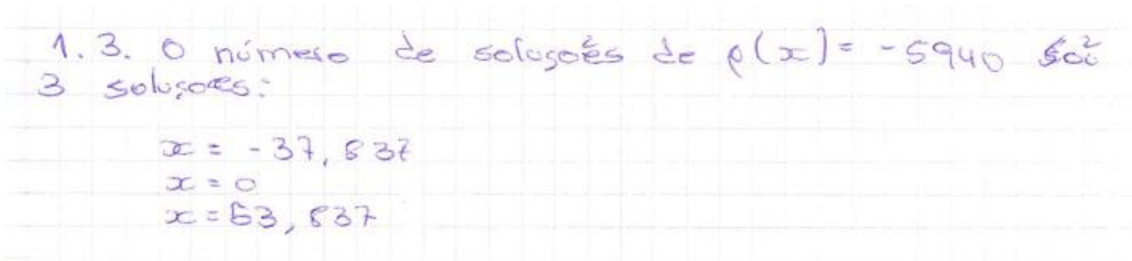
7.4.4. Instrumento facilitador de certos procedimentos

O Diogo recorre à calculadora gráfica na atividade com funções para certos procedimentos, nomeadamente, determinação de zeros, estudo do sinal, análise do domínio e contradomínio, determinação de extremos relativos, resolução de equações ou inequações, etc. O aluno mostra preferência para utilizar métodos gráficos mesmo quando tem conhecimentos para resolver analiticamente. Essa preferência deve-se essencialmente à facilidade e rapidez com que realiza certos procedimentos recorrendo à calculadora gráfica. Por exemplo, na questão 1.3 da quarta entrevista (parte individual), o Diogo nem sequer colocou a hipótese de resolver analiticamente a equação dada (Anexo 4), assim que leu o enunciado pegou na calculadora:

> **Diogo**: Vou, vou traçar esta reta na calculadora.
> **Investigadora**: Qual reta?
> **Diogo**: Menos cinquenta e nove mil e quarenta, menos cinquenta e nove mil não, menos cinco mil, novecentos e quarenta, (faz o gesto com a mão) e ver as interseções. […] Então interseta a função em três pontos, é agora o que eu vou determinar. (Efetua os procedimentos para determinar a primeira interseção) Vou só escrever aqui (pega no lápis e toma nota,

> escreve o valor de *x*, começa a escrever o valor de *y*), o *y* não é preciso (apaga). Vou agora calcular a outra interseção.
> **Investigadora**: Estavas a apontar o valor do *x* e do *y*, depois apagaste o do *y*?
> **Diogo**: Porque o do *y* não é preciso, é igual para todos, eu já sei aqui do enunciado que é menos cinco mil … (E4, parte individual)

As soluções da equação foram obtidas pelo Diogo apelando aos esquemas de utilização desenvolvidos, através da determinação das coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função *p* com a reta de equação $y = -5940$ (Figura 69).


1.3. O número de soluções de $p(x) = -5940$ são 3 soluções:

$x = -37,837$
$x = 0$
$x = 63,837$

Figura 69 – Resposta à questão 1.3 (E4, parte individual).

A equação envolvida na questão 1.4, da sexta entrevista (Anexo 6), foi igualmente resolvida de imediato recorrendo à calculadora gráfica: “Aqui, na, um, ponto, quatro, podemos utilizar a calculadora, não podemos?” (E6). O Diogo nem equacionou o problema, passando logo a editar as duas expressões na calculadora justificando a sua preferência por esse processo de resolução (Figura 70):

> **Investigadora**: Na [questão] 1.4 utilizaste a calculadora, na 1.3 não utilizaste, diz-me uma coisa, quando é que costumas utilizar? Quando estás a fazer livremente, sem te dizerem que tens que fazer com a calculadora, ou sem a calculadora? Quando é que costumas utilizar?
> **Diogo**: Depende dos exercícios, *Stora*, por exemplo, nos exercícios do género da 1.4, costumo utilizar, para ver a interseção (gesto com as mãos), dos dois.
> **Investigadora**: Porquê? Porque será que nesse caso utilizas?
> **Diogo**: Porque acho mais fácil! Do que fazer analiticamente. (E6)

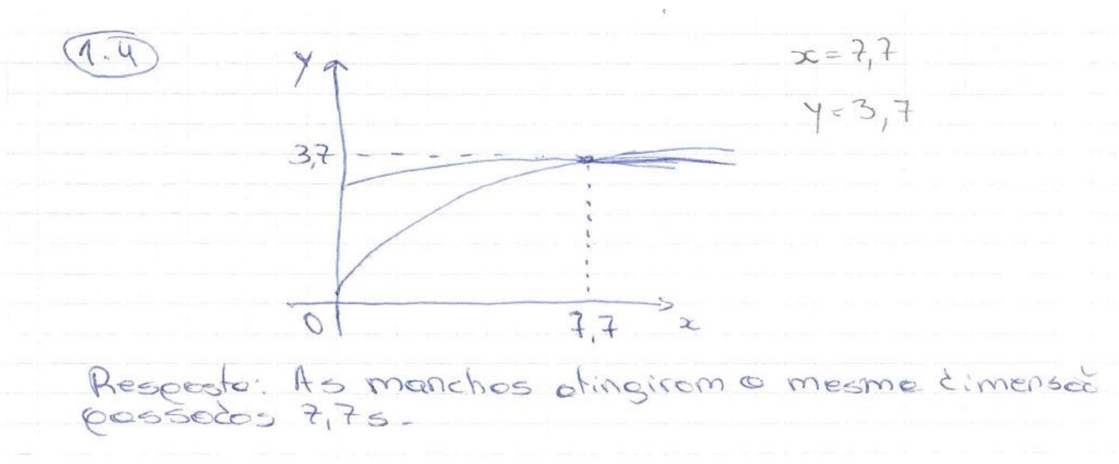


Figura 70 – Resposta à questão 1.4 (E6).

Também na sétima entrevista, questão 1.4 (Anexo 7), apesar de já ter conhecimentos para determinar analiticamente os extremos relativos da função, o Diogo optou por fazê-lo recorrendo à calculadora gráfica, referindo que o processo gráfico é muito mais rápido e fácil:

> **Diogo**: Ok (pausa), então …, para determinar também com a calculadora (pega na máquina, visualiza a representação gráfica).
> **Investigadora**: Como é que vais fazer então?
> **Diogo**: Vou aqui ao *calculate*, vou ver o mínimo (efetua os procedimentos para determinar o mínimo), o mínimo ou extremo relativo parece-me, y igual a menos quatro, vírgula, zero, seis, posso pôr … (toma nota do valor), um valor aproximado … […] Pronto, então, "determine com aproximação às centésimas o valor das abcissas do ponto A e B correspondentes aos extremos," então os valores das abcissas são, dois, vírgula doze, que corresponde ao mínimo, e, menos zero, vírgula setenta e nove, para o máximo.
> **Investigadora**: […] Existia outro processo, para resolver?
> **Diogo**: Haaaa, haveria, mas muito complicado!
> **Investigadora**: Como?
> **Diogo**: Era, através da função derivada, fazendo um quadro de sinal, não é bem um quadro de sinal, pronto, era um quadro, meteríamos o sinal da função derivada, e a monotonia da função *f* de *x*, e íamos ver quando é que era máximo e mínimo.
> **Investigadora**: E então, escolheste este processo porquê?
> **Diogo**: É muito mais rápido! […] E fácil também! (Risos) (E7)

Muitas das questões que são colocadas nos testes de avaliação impõem uma resolução analítica, no entanto, as questões de escolha múltipla são muitas vezes resolvidas pelo Diogo recorrendo à calculadora gráfica. O aluno refere que, ao longo do tempo, tem recorrido mais à calculadora para esse tipo de questão pois esta permite poupar tempo e, de algum modo, parece dar-lhe também uma certa segurança em termos da correção da resposta:

> **Diogo**: Costumo usar, ultimamente tenho usado mais, porque poupa-se muito mais tempo com a máquina, quando não nos dizem nada em contrário. Por exemplo nas escolhas múltiplas, haa, com a máquina é muito mais, podemos ter a certeza que está certo, podemos verificar e se não quisermos fazemos diretamente na máquina e poupa-se muito tempo.
> **Investigadora**: Hum, hum. Tens feito isso? Nos testes, no teste intermédio?
> **Diogo**: Sim.
> **Investigadora**: E o uso, pronto, para além da escolha múltipla, nas outras questões usas mais no fim, no meio, no início?
> **Diogo**: Normalmente é mais no início, na escolha múltipla, porque nos outros exercícios normalmente não nos deixam utilizar calculadora, só para confirmar (pausa), é que eu às vezes vou ver. (E8)

Em situações usuais, é possível perceber que o Diogo reconhece a equivalência de procedimentos em vários registos de representação, nomeadamente, entre o algébrico e gráfico, e que consegue tirar partido da sua calculadora gráfica, convertendo-a num instrumento que lhe permite obter, facilmente, uma resposta rápida para determinada questão.

7.4.5. Exploração de situações problemáticas

A calculadora gráfica foi utilizada pelo Diogo para explorar algumas situações problemáticas. Estão nesta categoria as situações de investigação sobre os efeitos de um parâmetro na representação gráfica dos elementos de uma família de funções; as situações em que o aluno não tem inicialmente uma estratégia de resolução delineando-a após a visualização da representação gráfica na calculadora e as situações em que a calculadora gráfica é usada para confirmar/refutar a previsão acerca da forma da representação gráfica de uma dada expressão algébrica e para testar se uma expressão algébrica poderá corresponder a uma determinada representação gráfica.

Investigações sobre os efeitos de um parâmetro na representação gráfica de uma família de funções

Perante uma questão onde seja pedido para investigar os efeitos de um parâmetro na representação gráfica de uma família de funções o Diogo recorre à calculadora gráfica. Por exemplo, na questão 1.1 da quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), o Diogo delineou de imediato uma estratégia para testar a sua conjetura acerca dos efeitos do parâmetro *b* na representação gráfica dos elementos da família de funções $y = x^2 + bx + 1$, usando a calculadora gráfica:

> **Diogo**: Eu acho que é só se é crescente ou decrescente. […] Eu penso que o *b* influencia se a reta, se a reta ou se a parábola, começa, é crescente ou decrescente, mas não tenho a certeza.
> **Investigadora**: Então o que é que vais fazer?
> **Diogo**: Vou introduzir uma expressão e fazer tentativa e erro, que é muito …
> **Francisco:** Mas isso não te vai permitir …
> **Diogo**: Vai, vai, meto as várias e vê-se. (E4, parte conjunta)

A visualização da representação gráfica de dois elementos da família de funções ($b = -2$ e $b = 2$) permitiu-lhe verificar que a sua conjetura inicial não estava correta (Figura 71), no entanto, os alunos concluíram que o parâmetro *b* influencia o "deslocamento da parábola" no eixo das abcissas, apenas com base nos dois casos particulares:

> **Diogo**: Cheguei à conclusão que não é isso!
> **Francisco**: Pois não!
> **Diogo**: É na, no deslocamento da parábola.
> **Francisco**: No eixo dos *yy*, certo? Não!
> **Diogo**: Sim.
> **Francisco**: No eixo do *x*. Do *x*.
> **Diogo**: É isso. *Stora*, já chegámos a uma conclusão (riem). (E4, questão 1.1, parte conjunta)

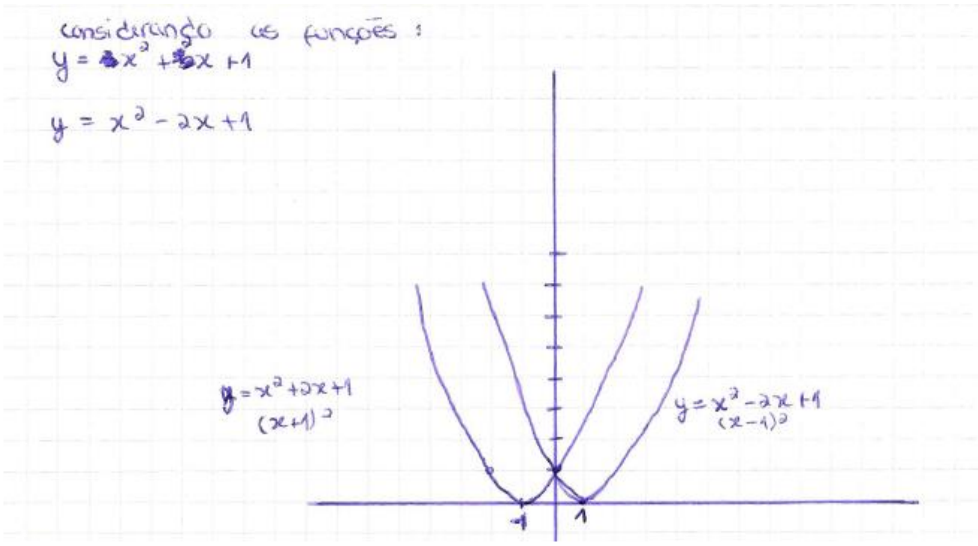


Figura 71 – Representação gráfica de dois elementos da família de funções $y = x^2 + bx + 1$, pelo par Diogo e Francisco.

A reação precipitada dos alunos em generalizar com base nos dois casos particulares mostra que estes não estavam ainda muito familiarizados com este tipo de tarefa, apesar de, em contexto de sala de aula, terem explorado os efeitos dos parâmetros na representação gráfica dos elementos das famílias de funções $y = a|x-h| + k$ e $y = a(x-h)^2 + k$. Quando a investigadora os questionou acerca dos valores que atribuíram ao parâmetro *b*, o Diogo decidiu experimentar um outro valor:

> **Investigadora**: Deixem-me só perceber uma coisa, vocês deram o valor dois e menos dois. Foi isso? Ok.
> **Diogo**: Sim. (Risos) Porque, isto, … (riem), não sei! Eu vou tentar com mais. (Pega na calculadora e digita) (Pausa muito longa) Aconteceu aqui um pequeno pormenor (baixinho).
> **Francisco**: É que isso não anda para o lado.
> **Diogo**: (Muito baixinho) É que isto passou para o eixo dos *yy*. (E4, parte conjunta)

Após atribuir mais valores ao parâmetro *b*, o Diogo começou a tentar relacionar a representação gráfica obtida com o valor absoluto de *b*:

> **Diogo**: (Pausa muito longa) Já cheguei à conclusão que quanto maior é o módulo do número, mas ele se desloca para baixo.
> **Francisco**: (Pausa) No eixo dos *yy*.
> […]
> **Diogo**: (Pausa longa) Estás a ouvir? Não concordas? Que o módulo do número que é o *b*, faz com que ele ande mais para

> baixo. Porque é assim, eu meti cinco *x* (pausa) menos, e meti mais, e depois no gráfico são estas duas aqui equivalentes (aponta para o visor), estão as duas para baixo do eixo dos *yy*, para baixo do eixo do *x*. E depois meti o sete, que é maior, é um valor absoluto, e também foi ainda mais para baixo, o vértice.
> **Francisco**: Logo quanto maior for o valor, maior for o módulo do valor …
> **Diogo**: Mais se desloca para baixo. (E4, parte conjunta)

O facto de terem atribuído mais valores ao parâmetro *b* permitiu-lhes compreender melhor a influência deste na representação gráfica dos elementos da família de funções, tendo depois começado a tentar relacionar também cada representação algébrica com as coordenadas do vértice da respetiva parábola. Era importante que os alunos tivessem atribuído também o valor zero ao parâmetro *b*, pelo menos no que diz respeito à questão 1.2, no entanto, foi a investigadora que os questionou acerca dessa possibilidade.

Numa situação semelhante, questão 1.3 da quinta entrevista (Anexo 5), realizada também em conjunto com o Francisco, a estratégia inicialmente adotada mostrou alguma evolução relativamente à situação anterior, com o Francisco a considerar atribuir dois valores positivos e um valor negativo aos parâmetros, e o Diogo a pretender inclusive atribuir o valor zero, embora neste caso tal não fizesse sentido:

> **Francisco**: (Pausa longa) Eu acho que o melhor é … (Pausa) Acho que a melhor maneira de resolvermos aqui é …
> **Diogo**: (Risos) É?
> **Francisco**: É dar valores. Primeiro, considerar esta função (aponta no enunciado para a primeira expressão), e darmos diferentes valores, para vermos quais são as alterações, as alterações que vão dar em cada gráfico. E depois fazemos aqui (aponta para a segunda expressão) também, e depois podemos tirar algumas conclusões. […] Eu estava a pensar fazer primeiro dois positivos e depois fazer um negativo, para ver a alteração que pode causar na função.
> **Diogo**: Já agora o zero, que vai ser zero!
> **Francisco**: Não, mas no meu …
> **Diogo**: No meu vai ser zero.
> **Francisco**: Mas no meu tem que ser diferente de zero, o *c*.
> **Diogo**: Ah! Ok, o meu também. (Risos) Boa, Diogo! (E5, questão 1.3)

Contudo, é possível perceber que os alunos mostram tendência para efetuar generalizações a partir de uma quantidade reduzida de casos particulares. Além disso os valores atribuídos aos parâmetros incluíram apenas números inteiros.

Situações para as quais não tem uma estratégia de resolução delineando-a a partir da representação gráfica visualizada na calculadora

A calculadora gráfica, por vezes, foi utilizada pelo Diogo como um instrumento de conversão da representação algébrica na gráfica com o objetivo de explorar a questão a partir desta representação. Por exemplo, na questão 2.3 da sexta entrevista (Anexo 6), o aluno decidiu recorrer à calculadora gráfica, antes mesmo de tentar interpretar o simbolismo envolvido. Assim, começou por analisar a representação gráfica da função $h(x)=\frac{20-9x-2x^2}{x-3}$, salientando a diferença entre a representação visualizada e a representação gráfica das funções racionais familiares (hipérboles):

> **Diogo**: (Lê o enunciado) Posso introduzir na calculadora?
> **Investigadora**: Podes.
> […]
> **Diogo**: Haaa, vou alterar a janela, porque não consigo ver bem. […] Vou aumentar um pouco no *x* (máximo) que estou a ver aqui umas coisas estranhas. Pois, este aqui ao contrário dos outros vai a descer! […] Nos outros gráficos que nós vimos até agora, haaa, a curva, aproximava-se, de um valor de *y*. (E6)

Observando, em seguida, a representação gráfica o aluno compreende que o gráfico da função tem uma assíntota a que chamou "diagonal". Para definir uma estratégia de resolução necessitou de interpretar o simbolismo matemático envolvido na questão, o que inicialmente lhe levantou dificuldades, como é possível perceber por algumas das suas exclamações:

> **Diogo**: […] Não estou a perceber como é que esta equação pode dar positivo, se a *Stora* quer os valores inteiros de *k* (pausa), pode dar positiva não, pode dar, impossível, se a *Stora* quer os valores inteiros de *k*, é porque tem de ser possível! Se temos um *k*, se temos *h* de *x* igual a qualquer coisa, é possível.
> **Investigadora**: Não, *h* de *x* igual a qualquer coisa é que não tem solução! Não é?
> **Diogo**: Então mas depois a *Stora* pergunta os valores inteiros de *k*.
> **Investigadora**: Onde isso acontece.

> **Diogo**: (Pausa longa) Que não tem solução?
> **Investigadora**: Sim.
> **Diogo**: Se não tem solução não há *k*! (E6)

No entanto, quando a investigadora lhe pediu que voltasse a analisar a representação gráfica, o Diogo acabou por delinear uma estratégia para responder à questão, não obstante algumas dificuldades na adaptação do esquema de utilização respeitante aos extremos, como foi referido na secção 7.3.4.

Confirmação/Refutação de conjeturas acerca da forma da representação gráfica de uma dada expressão algébrica ou da representação algébrica de uma determinada representação gráfica

Estas situações não foram frequentes na atividade do aluno, ocorrendo em situações pontuais. A primeira ocorreu na questão 2, quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), devido às características da própria questão, e a segunda ocorreu na sétima entrevista (Anexo 7), quando o aluno necessitou da expressão algébrica da função *f* para responder à questão 1.3. Como já não se recordava do procedimento analítico para converter a representação gráfica no polinómio correspondente, o Diogo escreveu um polinómio com os mesmos zeros (Figura 72) e recorreu à máquina para ver se a representação gráfica estava "muito longe" da representação dada no enunciado:

> **Diogo**: Só me falta aqui se calhar é um azinho [*a*] ou assim … (circunda o espaço entre o igual e os fatores).
> **Investigadora**: Se calhar, não é? (Risos).
> **Diogo**: Que era bonito se, se eu soubesse! (Pausa longa) A *Stora* não quer dizer, pois não? Como é que se determina o azinho?
> **Investigadora**: (Ri) Não!
> **Diogo**: (Pega na calculadora) Então vou emperrar aqui nesta!
> **Investigadora**: (Ri) Então agora vais fazer o quê? Conta lá.
> **Diogo**: (Está no editor de funções) Vou ver na calculadora se esta expressão está muito longe de …, do que deveria ser. (Edita a função, visualiza e determina a imagem de zero, observa) É mesmo esta! (E7)

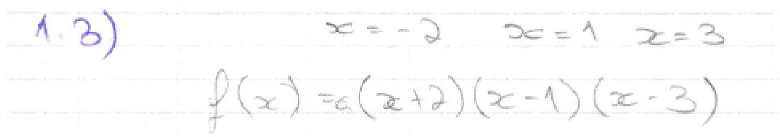


Figura 72 – Representação algébrica da função *f* (E7, questão 1.3).

O aluno conseguiu de imediato obter a expressão analítica de *f* pois o coeficiente do termo de maior grau era efetivamente um, não sendo necessário ajustar o valor. A questão acabou assim por não ter um grande caráter exploratório, mas, provavelmente, caso o coeficiente não fosse um, a situação teria conduzido a uma maior exploração.

7.4.6. Síntese

O Diogo opta muitas vezes por recorrer à calculadora gráfica em várias situações e com diferentes objetivos. Quando uma função está representada algebricamente e é pedida a sua representação gráfica o Diogo recorre sempre à calculadora gráfica. Em situações onde é necessário efetuar procedimentos, tais como resolver uma equação ou inequação e determinar extremos, faz muitas vezes apelo às capacidades gráficas da calculadora, justificando a escolha do processo gráfico devido à facilidade e rapidez. Quando decide recorrer a métodos analíticos, a posterior confirmação, através da abordagem gráfica, depende do tempo que o aluno tem para resolver a questão e também da segurança ou familiaridade com o processo analítico. Nos testes, a calculadora gráfica é utilizada pelo aluno essencialmente para responder às questões de escolha múltipla, já que as restantes questões, em geral, exigem uma resolução analítica.

Existem situações em que o aluno recorre à calculadora gráfica porque não consegue resolver analiticamente mas cuja estratégia é definida a priori, e situações em que o recurso à calculadora é feito numa tentativa de exploração da situação, sendo a estratégia de resolução delineada a partir da observação gráfica. A calculadora gráfica surge também como um instrumento que lhe permite explorar os efeitos de parâmetros na representação gráfica de elementos de famílias de funções e testar conjeturas referentes à forma da representação gráfica de determinada expressão algébrica ou o recíproco.

7.5. Aprendizagem do conceito de função e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno

Nesta secção pretende-se analisar tanto a aprendizagem relativa ao conceito de função, no seu sentido mais amplo, como a integração que o aluno faz da calculadora gráfica na sua atividade com funções ao longo do 10.º e 11.º anos de escolaridade. No final de cada subsecção é feito um pequeno resumo síntese.

No final do ensino básico, o conceito imagem de função do Diogo englobava representações gráficas correspondentes a retas, ou partes de retas e expressões analíticas do tipo $y = kx + b$, com k e b pertencentes a $\mathbb{R}$, sendo possível perceber alguma confusão entre o conceito e os procedimentos para determinar pontos ou parâmetros numa expressão. O conceito definição formal, aparentemente, não fazia parte do seu conceito imagem pois nunca foi evocado durante a primeira entrevista.

7.5.1. Reconhecimento e identificação de funções

O Diogo mostrou alguma facilidade em reconhecer e identificar funções, mesmo numa fase inicial da aprendizagem do tema. Por exemplo, na questão 1 da segunda entrevista (Anexo 2), o Diogo conseguiu identificar a função que relaciona a classificação corrigida e a classificação original, começando por pensar em termos processuais para responder à questão 1.2, mas passando para uma abordagem mais estrutural ao decidir efetuar a representação gráfica na calculadora:

> **Diogo**: Sim, penso que sim, que todas as (pausa), todas as classificações aumentam.
> […]
> **Investigadora**: […] Então e será que haveria uma maneira de ver se realmente …, confirmar isso?
> **Diogo**: Sim, deixe-me experimentar, com vários valores?
> **Investigadora**: Experimentar com vários valores. E mais?
> **Diogo**: Fazer um gráfico.
> **Investigadora**: Que tipo de gráfico? Como?
> **Diogo**: De uma função. É para fazer aqui, certo (pega na calculadora)? (E2)

Ainda nessa questão o aluno acabou por reconhecer que necessitava de comparar a representação gráfica da função que relaciona as duas classificações com a representação gráfica de uma outra função (função identidade) editando-a também na calculadora:

> **Diogo**: As notas iam sempre subir.
> **Investigadora**: E como é que tens a certeza, que iam sempre subir?
> **Diogo**: Porque o *x* é a classificação original. E o *y* é a classificação que fica depois. (Pausa) Quando sobe o *x*, (baixinho) sobe o *y*. […] Se fosse ao contrário é que desciam, se (pausa) eu acho que sim, sobem todas as classificações.
> […]
> **Investigadora**: Pois, mas como é que tens a certeza que no final vai ser sempre maior que o *x*?
> **Diogo**: (Pausa) (Baixinho) Como é que eu tenho a certeza?
> **Investigadora**: Pois, como é que poderias comparar melhor?
> **Diogo**: (Pausa bastante longa) Aqui no gráfico (pega na máquina), para, já sei mais ou menos porque é que isso acontece, haaa, as notas para serem iguais, a reta teria que ser mesmo uma reta que, fosse constante, certo?
> **Investigadora**: Constante?
> **Diogo**: Haa, sim, que distasse, *y* igual a *x*. Uma reta *y* igual a *x*.
> **Investigadora**: Então como é que poderias fazer?
> **Diogo**: Uma reta. (Digita na máquina) *y* igual a *x*. E aqui vemos que está acima dessa reta. (E2)

No âmbito do trabalho com funções o Diogo consegue de modo geral identificar funções, o que lhe permite resolver problemas, embora a ideia de função esteja muitas vezes implícita no trabalho e não seja explicitada. As situações em que o aluno teve que decidir se estava, ou não, perante uma função surgiram em sala de aula no início do tema, relativamente à representação gráfica, e na última entrevista, relativamente à representação algébrica e gráfica. Na aula, após a professora definir formalmente função, o Diogo mostrou compreender se determinada representação gráfica poderia ou não corresponder a uma função, como é possível perceber pela sua resposta à questão 1 da ficha *Noção de Função – Propriedades das Funções* (Anexo 10):

> **Professora**: […] Então Diogo, porque é que a *d*) não é função?
> **Diogo**: A *d*) não é função, porque os valores de *x*, a *x* corresponde …
> **Professora**: Os valores?
> **Diogo**: Não, *x* corresponde a vários, a vários valores de *y*.
> **Professora**: Infinitos, não é?

> **Diogo**: Sim.
> **Professora**: […] E porque é que a *c*) é uma função? […] Então é função porquê?
> **Diogo**: Para cada valor de *x*, há só um valor de *y*.
> **Professora**: Um e um só valor de *y*. (A2_10)

Os dados recolhidos na última entrevista relativamente à identificação de funções a partir da representação gráfica, são consistentes com a compreensão da aplicação da definição nesta representação. Relativamente à representação algébrica foi possível perceber que o Diogo não a relaciona diretamente com a definição, optando antes por efetuar a conversão para a representação gráfica. Mesmo no caso das expressões que lhe pareciam familiares, o aluno recorreu à representação gráfica na calculadora para confirmar a sua inclinação, o que sugere um maior à-vontade na aplicação do conceito definição a partir desta representação. Após ler a questão 1, da oitava entrevista (Anexo 8), o aluno pega de imediato na calculadora, aparentemente sem ter delineado uma estratégia que lhe permitisse editar a expressão algébrica $\text{sen}^4 x + y^2 = 1$ presente na alínea i):

> **Investigadora**: A partir desta expressão como é que estás a fazer para introduzir?
> **Diogo**: Ok. Primeiro estava a fazer mal, mas o que eu vou fazer é (aponta na expressão), haa, pôr esta expressão, em função do *y*, e introduzir na calculadora. (E8)

O aluno refere que vai escrever a expressão “em função do *y*” quando o que fez foi resolver a equação em ordem a *y*, não deixando transparecer em nenhum momento que tenha considerado a possibilidade de escrever *x* em função de *y*. Ao efetuar o tratamento da expressão simbólica ficou em dúvida acerca da obtenção de duas soluções, o que sugere uma certa compartimentação do conhecimento, contudo, decidiu corretamente:

> **Diogo**: […] Aqui, também fica mais ou menos raiz de qualquer coisa?
> **Investigadora:** Tens que pensar (ri). […] Então o que é que decidiste? Que ficava ou que não ficava?
> […]
> **Diogo**: Sim, decidi que ficava mais ou menos, raiz …. Sendo assim, como eu não sei introduzir isto na calculadora, se calhar introduzo uma expressão positiva e outra negativa. (E8)

Tal como referiu, o Diogo editou duas expressões na calculadora, tendo no entanto o cuidado de analisar as duas representações gráficas como se fossem uma única, correspondente à representação da relação simbólica inicial, excluindo a hipótese desta representar uma função, justificando: "Porque para o mesmo valor de *x*, o *y*, há dois valores, de *y*" (E8). Nas alíneas ii), iv) e vi) o Diogo procedeu de modo semelhante, começando pelo tratamento da expressão simbólica, resolvendo-a em ordem à variável *y*, efetuando com a calculadora a conversão para a representação gráfica, e decidindo, a partir dessa representação, se a relação poderia ou não representar uma função. A conversão na representação gráfica, com a calculadora, ocorreu mesmo em expressões que lhe seriam bastante familiares, como é o caso da relação ii) $xy=-3$: "Também é uma função, porque também trabalhámos este ano, com estes casos. (Edita a expressão, visualiza) Aí está, muito bem" (E8). A expressão vi) $x^2=\frac{y}{\pi}$, curiosamente não é identificada pelo aluno antes da visualização gráfica na calculadora: "Parece-me (pausa longa), uma função, sem dúvida, uma parábola …" (E8), o que mostra alguma dependência do artefacto para efetuar a conversão da representação algébrica na representação gráfica.

Relativamente à expressão definida por ramos $y=\begin{cases}4, & x\le 1\\ -2x+5, & x>4\end{cases}$, o Diogo optou também por efetuar a conversão na representação gráfica, fazendo, neste caso, um esboço no papel (Figura 73), representando corretamente o primeiro ramo. Para representar o segundo ramo o Diogo editou na calculadora a função correspondente, mas em vez de considerar essa representação para valores de *x* maiores do que quatro, encarou-a como se esta sofresse uma translação associada ao vetor (4,0).

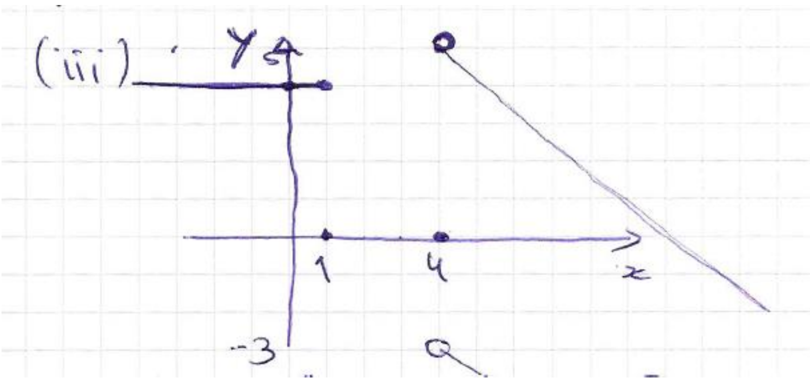


Figura 73 – Esboço feito no papel relativo à representação gráfica da expressão iii) (E8, questão 1).

Além disso, representou a semirreta com base nas coordenadas de um único ponto, sem atender à inclinação, apesar de falar nela:

> **Diogo**: Vou ver mais ou menos a inclinação, desta reta, tentar ver uma coisa precisa. (Calcula o valor para *x* igual a zero e representa-o para *x* igual a quatro) É assim, uma coisa assim.
> **Investigadora**: Calculaste o quê?
> **Diogo**: Haaa, a intersecção desta reta com o eixo, *Oy*, para saber mais ou menos em que ponto é que a reta começa a …, começa a reta pronto, a decrescer.
> **Investigadora**: (…) Portanto, quanto é que te deu a intersecção com o eixo *Oy*?
> **Diogo**: Deu-me cinco.
> **Investigadora**: Sim, e como é que representaste, a partir do quatro?
> **Diogo**: Representei, como se, representei como está representada aqui (aponta o visor), mas aqui inicia-se no *x* igual a zero, e aqui (esboço no papel), no *x* igual a quatro. Penso que é, igual, mas …, aqui está mal (coloca a bola aberta para *x* igual a quatro).
> […]
> **Investigadora**: Porque é que fizeste isso, só para eu tentar perceber melhor.
> **Diogo**: Porque pensei que isto (aponta a expressão do segundo troço) verificava-se a partir de *x* maior que quatro, que esta reta iria (pausa), ser assim, começar onde começava se fosse *x* igual a zero, não sei bem. (E8)

Tendo em conta a representação gráfica, o Diogo considerou que se encontrava perante uma função e, se não fosse questionado, teria avançado sem compreender que não tinha interpretado corretamente a notação envolvida. Esta alínea acabou por revelar não uma dificuldade na aplicação da definição de função, mas antes uma dificuldade de interpretação da notação envolvida na representação algébrica de uma função definida por ramos. A calculadora gráfica poderia ter sido utilizada nesta alínea de modo mais eficiente se o aluno soubesse editar funções definidas por ramos, contudo, é de salientar que esse assunto também não foi abordado nas aulas.

A expressão $\frac{x}{x-3}=6,\ x\neq 3$ veio reforçar as evidências relativamente a alguma confusão entre equação e função, já percebidas em ocasiões anteriores (por exemplo na secção 7.3.3). Inicialmente o Diogo começa por referir que a relação só tem a variável *x*, mas, aparentemente, o facto de poder resolver a equação graficamente, considerando funções convenientes, parece sobrepor-se à própria relação, apesar de ser percetível no discurso do aluno um certo conflito cognitivo. É possível perceber que o Diogo vai efetuando procedimentos, deixando transparecer, contudo, uma certa sensação de insegurança:

> **Diogo**: Mas esta expressão aqui só tem *x*!
> **Investigadora**: Sim. (Pausa longa) Então?
> **Diogo**: Vou tentar.
> **Investigadora**: O que é que introduziste na calculadora?
> **Diogo**: Esta expressão (aponta no enunciado o primeiro membro da equação).
> **Investigadora**: Que expressão?
> **Diogo**: Imaginando que era *y* igual a *x* a dividir por *x* menos três.
> **Investigadora**: Ah, imaginando.
> **Diogo**: Sim. E agora, introduzi também seis, para ver quando … […] (Vai ao menu *Calc* e calcula a intersecção) Haaa, o *y* é igual a seis, quando o *x* é três, vírgula seis, é uma solução possível, porque é diferente de três. *x*, *x* três vírgula seis, é diferente de três.
> **Investigadora**: Ok, mas essa expressão representa-te uma função ou não?
> **Diogo**: Sim, representa. Quer dizer …, não sei, está-me a meter aqui um bocado de confusão disto não ter um *y* mas … (risos), eu acho que sim, pelo menos na representação gráfica, a não ser que não possa introduzir como introduzi na calculadora, que é o que eu não tenho a certeza, da representação gráfica parece-me uma função. (E8)

Perante alguma insistência da investigadora, o aluno evidencia mais uma vez um certo conflito, já que, relativamente à resolução da equação, o Diogo compreende a equivalência dos seguintes procedimentos: (i) determinação da abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções $y=\frac{x}{x-3}$ e $y=6$; e (ii) determinação do zero da função $y=\frac{x}{x-3}-6$:

> **Investigadora**: Mas o que é que te parece uma função?
> **Diogo**: O (faz um gesto com a caneta no visor indicando hipérbole), aqui a, a *hiperbolezinha*.
> **Investigadora**: A hipérbole parece-te uma função. E mais (risos)?
> **Diogo**: E é só a única coisa que aqui me parece uma função.
> **Investigadora**: A outra que introduziste, *y* igual a seis, não te parece uma função?
> **Diogo**: É uma função, mas não são a mesma função.

> **Investigadora**: Pois, não são a mesma função, decididamente!
> **Diogo**: Se calhar teria de, passar o seis para o outro lado, e reduzir tudo ao mesmo denominador e assim obtinha uma só função. Mas ia, iria dar o mesmo.
> **Investigadora**: Hum, e então?
> **Diogo**: Só que em vez de calcular a intersecção com a reta *y* igual a seis, calculava com, *y* igual a zero.
> **Investigadora**: Hum, hum. Sim.
> **Diogo**: Eu acho que sim, que é uma função. (E8)

Neste caso, apesar de o Diogo deixar transparecer alguma incerteza provocada pelo facto de a expressão não ter a variável *y*, isso não foi suficiente para resolver o conflito, mesmo quando posteriormente voltou a sentir dificuldades ao determinar o domínio e contradomínio da suposta função:

> **Diogo**: Então mas (ri), eu faço o domínio e o contradomínio só do *x*, de *y* igual a *x* a dividir por três, haa, por *x* menos três, ou …?
> **Investigadora**: Não nós queremos o contradomínio da função, se isso representa uma função, nós queremos o contradomínio da função, e o domínio da função.
> **Diogo**: Então vamos fazer de uma forma diferente (vai ao editor e apaga a função constante, colocando menos seis na primeira expressão introduzida, visualiza), pronto, assim já sabemos, a assíntota vertical manteve-se, como era de esperar, e, e a horizontal continuo sem saber (ri). (E8)

Em resumo, o Diogo decide a partir do seu conceito definição *A cada objeto, tem que corresponder uma só imagem* se dada representação gráfica pode corresponder a uma função. Estando em causa a representação algébrica, o aluno opta por aplicar o conceito definição a partir da representação gráfica, recorrendo à calculadora que lhe permite um rápido acesso a esta representação. Assim, mesmo que, por si só, não consiga fazer um esboço da representação gráfica, a calculadora permite-lhe analisar a questão a partir dessa representação. Há a ressaltar, no entanto, o caso em que a relação simbólica se encontra definida por ramos, situação em que o Diogo não consegue converter a calculadora num instrumento eficiente, em parte devido a dificuldades de interpretação da notação envolvida.

Foi possível perceber alguma confusão entre equação na variável *x* e função, o que poderia ser interpretado como um efeito da utilização da calculadora na resolução gráfica de equações, no entanto, é de salientar que já na primeira entrevista, antes de ter tido contacto com este artefacto, o Diogo evidenciou a mesma confusão, considerando que o termo independente poderia estar a substituir a variável *y*. Apesar de o aluno ter concluído que uma equação na variável *x* representa uma função, foi possível perceber que essa situação lhe provocou um certo conflito, nomeadamente quando necessitou de determinar o domínio e contradomínio da dita função. Como Tall e Vinner (1981) referem "em certas circunstâncias os fatores de conflito cognitivo só se manifestam por uma vaga sensação de desconforto" (p 154), sendo essa a causa subjacente "àqueles sentimentos quando, na resolução de problemas ou na investigação, o indivíduo sente que algo está errado" (p. 154). Os autores salientam que pode ser necessário um tempo considerável para que a razão do conflito seja conscientemente compreendida, ou nem chegar a sê-lo.

7.5.2. Transformações de funções

Translações verticais e horizontais

Os invariantes operatórios relativos à translação vertical parecem ter sido facilmente instituídos, no entanto, a identificação do sentido da translação horizontal ficou dependente do recurso ao artefacto mediador durante um maior período de tempo. Com efeito, a resolução da questão 5.1, do teste de 5 Março de 2010 (Anexo 9), sugere que o Diogo identificou corretamente a translação vertical mas, relativamente à translação horizontal percebemos que houve hesitação, já que a representação gráfica correspondente a uma translação para a direita se encontra riscada, provavelmente porque, entretanto, o Diogo introduziu a expressão analítica na calculadora e visualizou a representação gráfica:

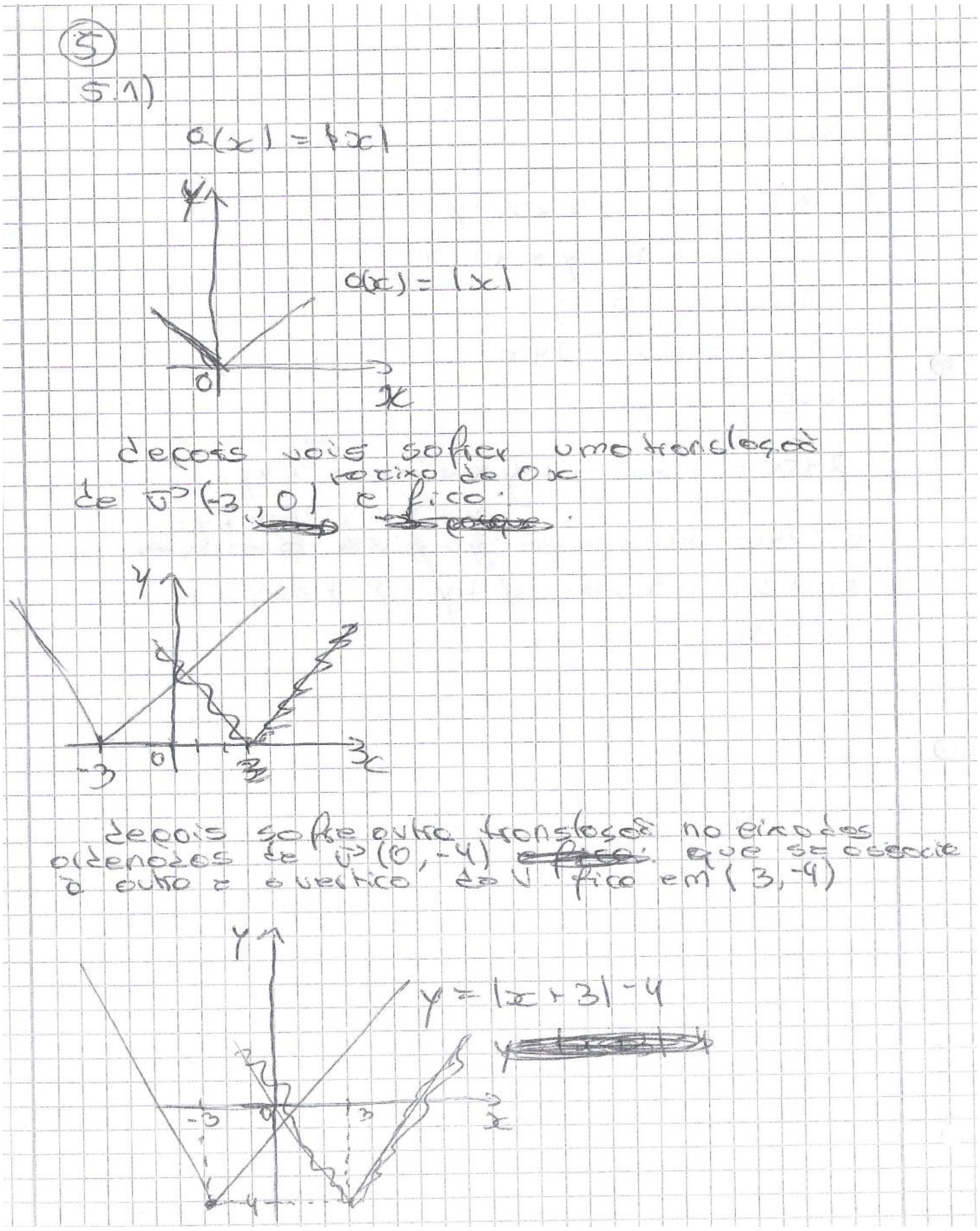


Figura 74 – Resolução da questão 5.1 do teste de 5 de março 2010.

Na quarta entrevista, parte individual (Anexo 4), é possível perceber que, de facto, os invariantes operatórios relativos à translação vertical estão instituídos, já que a questão 1.2 é resolvida de imediato pelo aluno, a partir da observação da representação gráfica feita na alínea anterior, não precisando de recorrer à calculadora para confirmar os efeitos do parâmetro k na representação gráfica de $p(x)+k$. Contudo, o mesmo não acontece relativamente à translação horizontal, já que, apesar de inicialmente o Diogo ter identificado o sentido correto da translação, ao ser questionado acabou por ficar em dúvida e decidir pelo sentido contrário. Neste caso, parece que o aluno memorizou os efeitos da transformação na representação gráfica não conseguindo depois compreender a razão de ser do sentido da translação:

> **Diogo**: A função, que eu tracei aqui (aponta para o visor da calculadora), vai andar toda, toda, sete casas, para a esquerda.
> **Investigadora**: Sete unidades para a esquerda.
> **Diogo**: Sete unidades para a esquerda.
> **Investigadora**: Porquê para a esquerda?
> **Diogo**: Porque é mais, e como sabemos que … (pausa), devia ser menos, ok, não sei.
> **Investigadora**: Atenção que eu não estou a dizer que está mal, só perguntei porquê?
> **Diogo**: Pois! (Ri) (Volta a ler o enunciado, pausa longa).
> **Investigadora**: Ok, vá, continua, vai, vai raciocinando em voz alta.
> **Diogo**: Estou a pensar como é que pode ser (olha o enunciado). Estou a pensar melhor … No final é mesmo para a direita.
> **Investigadora**: É para a direita?
> **Diogo**: É.
> **Investigadora**: Então?
> **Diogo**: Porque, qualquer valor de *x* mais sete (pausa), vai para a direita (ri). (E4, questão 1.4, parte individual)

A calculadora gráfica poderia ser uma importante ferramenta para decidir o sentido do deslocamento, no entanto, o Diogo não soube convertê-la num instrumento eficaz. Isso pode ter acontecido devido à complexidade da função envolvida, pois apesar de compreender que a expressão algébrica de $p(x+7)$ poderia ser obtida substituindo x por $x+7$, não tentou editá-la desse modo na calculadora. Em vez disso, começou por tentar simplificar a expressão, acabando por desistir devido a dificuldades de ordem algébrica:

> **Diogo**: *x* elevado ao cubo mais vinte e um, porque como é *x* elevado a três, o sete repete-se três vezes, vinte e um! Somam-se três setes aos três *xx* que aqui estão.
> **Investigadora**: Somam-se três setes? (Pausa) Aos três *xx*?
> **Diogo**: Porque, normalmente se fosse só um *x*, somavam-se sete unidades, como são três somam-se vinte e uma.
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: (Ri) Está mal, ok! (Pausa) Então mas eu … (pega na calculadora). (E4, questão 1.4, parte individual)

Na quinta entrevista, realizada em conjunto com o Francisco, no primeiro período do 11.º ano, o Diogo não parece identificar de imediato a translação horizontal $f(x-1)$, presente na função *g*, questão 1.2.1 (Anexo 5), no entanto, o recurso à calculadora gráfica: “Vamos fazer …, introduzir na calculadora, seno de *x*, (para o colega) vê lá se fazes o mesmo que eu, menos (pausa, hesita um pouco), um” (E5), permitiu-lhe recordar tanto a transformação como os seus efeitos. Apesar da sua ligeira hesitação edita corretamente a expressão analítica da função *g*, mas o mesmo não acontece com o Francisco que escreve seno de *x* e depois subtrai uma unidade. O diálogo seguinte mostra como a transformação geométrica acaba por ser recordada:

> **Diogo**: […] Fica assim?
> **Francisco**: Não. A função simplesmente desce uma unidade para baixo. […] A tua função deu assim?
> **Diogo**: Deu mais ou menos igual. Só que o meu está aqui (aponta no visor da sua calculadora).
> **Francisco**: Só que não deu, o meu não passa do eixo *Ox*.
> **Diogo**: A tua não passa do eixo?
> **Francisco**: Do eixo *Ox*. O que é que tu fizeste? (Mostra o editor de funções ao colega) Não fizeste assim?
> **Diogo**: Não.
> **Francisco**: Pois! Porque também não é assim!
> **Diogo**: Eu fiz assim (mostra a expressão no editor de funções). Não sei se é assim.
> **Francisco**: Não! Se calhar tu até tens bem.
> **Investigadora**: Então? Têm coisas diferentes, não é? […] Qual é que acham que está certa?
> **Francisco**: A dele.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Ele tem razão. Eu lembro-me de estudar isto o ano passado e aqui só se movimentava para a esquerda e para a direita, a função só se movimentava no eixo *Ox*. Eu tinha feito como se fosse *f* de *x*, o *x* entre parêntesis, e depois menos um, aí é que baixava, descia uma unidade.
> **Investigadora**: Então e aqui movimenta-se para a direita ou para a esquerda?
> **Diogo**: Para a direita.
> **Francisco**: Para a direita.
> **Investigadora**: Porquê para a direita?
> **Diogo**: Porque é um.
> **Francisco**: Porque normalmente é *x* menos algo …
> **Diogo**: *h*.
> **Francisco**: *h*? Já não sei se era *h*!
> **Investigadora**: Também não importa. Não importa a letra que lá colocamos.

> **Diogo**: O *h* é um, por isso anda um para a direita, se fosse menos um é que andava um para a esquerda. (E5, questão 1.2.1)

O facto de a expressão analítica da função *g* ser mais simples do que a expressão analítica da função considerada na questão 1.4 da quarta entrevista, parte individual, contribuiu, por certo, para o Diogo conseguir recorrer à calculadora para visualizar a representação gráfica. Talvez por isso, dessa vez, tenha afirmado com segurança o sentido correto da translação, já que tinha a representação gráfica no visor.

A exploração das transformações geométricas recorrendo à calculadora gráfica vai permitindo que estas se tornem instrumentais na atividade do aluno, não sendo de facto necessário, a partir de dada altura, recorrer ao artefacto mediador. Por exemplo, na questão 1.1, da sétima entrevista (Anexo 7), o Diogo identificou de imediato o sentido da translação horizontal, utilizando essa informação para determinar o domínio da função *g* (Figura 75):

> **Diogo**: Para determinar o domínio como, é uma raiz, o radicando vai ter que ser maior, que zero, maior ou igual que zero. (Pausa) Vamos ver a partir deste, deste gráfico, posso só pôr … (escrever no enunciado).
> **Investigadora**: Sim, sim, podes desenhar.
> **Diogo**: Então se, se, é *f* de *x* mais dois, este é o gráfico de *f* de x (aponta), haaa, mais dois, logo vai andar duas unidades para a esquerda, haa, e estes valores aqui são os que supostamente (os que escreveu), os zeros que a função *f* de *x*, ou neste caso a função *g* de *x*, terá. (E7)

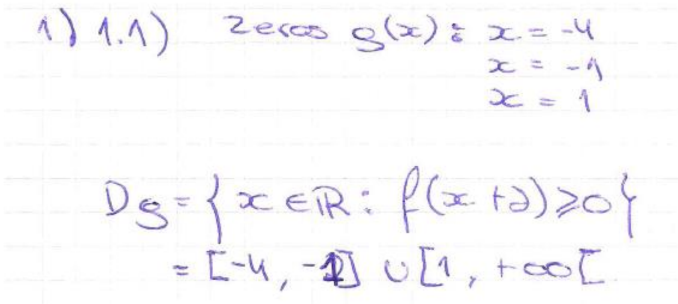


Figura 75 – Resolução da questão 1.1 (E7).

Ao ser questionado sobre os efeitos da transformação $f(x+2)$ no gráfico da função *f*, o Diogo, desta vez, não mostra hesitação, embora a sua justificação se baseie essencialmente na memorização e não revele propriamente compreensão do fenómeno:

> **Investigadora**: Na questão um ponto um tu disseste-me que aquela transformação, no gráfico de *f*, era deslocar duas unidades para a esquerda.
> **Diogo**: Hum, hum. Para a esquerda.
> **Investigadora**: E, não me pareceu que tivesses dúvidas. Como é que tens a certeza disso?
> **Diogo**: Como é que eu tenho a certeza disso? Então porque é uma função (ri), que nós estudámos nas aulas, e sabemos que quando é *x* mais alguma coisa, desloca-se no gráfico para a esquerda. (E7)

Simetria relativamente aos eixos

A exploração feita na sala de aula envolveu essencialmente a simetria relativamente ao eixo das abcissas, sendo a simetria relativamente ao eixo das ordenadas abordada numa questão em que era dada a representação gráfica de uma função e era pedida a representação gráfica de funções envolvendo várias transformações da primeira. Contudo, mesmo no caso da simetria em relação ao eixo das abcissas, parece que os invariantes operatórios demoraram algum tempo a ser instituídos. Por exemplo, na quinta entrevista, questão 1.2.2 (Anexo 5), ao visualizar a representação gráfica da função $h(x) = -f(x) + 3$, o Diogo identificou a translação vertical mas não conseguiu compreender o efeito da transformação $-f(x)$:

> **Diogo**: Subiu.
> **Francisco**: Pois subiu. Subiu três unidades, para cima, em relação à primeira.
> **Diogo**: Eu não percebo é aqui a influência do menos.
> **Francisco**: A influência … Pois! É isso também que eu não estou a perceber. (E5)

Perante a dúvida decidiram editar também a função $y = f(x) + 3$ e comparar as duas representações gráficas, conseguindo identificar as duas transformações geométricas que, aplicadas ao gráfico de *f*, originam o gráfico de *h*. Porém, o Diogo não parece dar relevância à ordem pela qual as transformações geométricas têm que ser aplicadas:

> **Diogo**: É simétrico à outra.
> **Francisco**: As imagens …
> **Diogo**: Simétrico? (Risos)
> **Investigadora**: Então?
> **Diogo**: Entretanto …

Francisco: (Pausa longa, o aluno aponta as representações gráficas) As imagens da função seno de *x*, mais três, haa, são simétricas às imagens da função menos seno de *x*, mais três, em relação ao, à reta *y* igual a três.
Investigadora: Hum. Sim, então e se quisessem comparar só com a função seno de *x*?
Diogo: Só com seno de *x*?
Investigadora: Sim. O que vocês concluíram está correto, mas …
Diogo: Ah! Ok. (Visualizam a representação gráfica de seno de x) Ah! Pois!
Francisco: Vemos que (pausa), em relação à função seno de *x*, a função …
Diogo: Sobe três unidades.
Francisco: Sobe três unidades.
Diogo: Sobe três unidades e depois (pausa longa), fica o simétrico do seno, de *x*.
Francisco: Mas … Exato!
Investigadora: (Pausa longa) Ok. Sobe três unidades e depois é o simétrico, isso não importa, a ordem importa? No fundo têm aí duas transformações geométricas, certo?
Francisco: Certo.
Investigadora: E a ordem por que elas aparecem não importa?
Francisco: (Pausa longa) Importa!
Diogo: A ordem?
[…]
Investigadora: Haa, se é indiferente subir primeiro e depois fazer a simetria?
Diogo: É indiferente.
Francisco: Não!
Diogo: Não! Há uma …
Francisco: Eu acho que temos que fazer primeiro a simetria.
Diogo: Sim.
Francisco: E depois fazemos a subida. (E5)

Esta questão respeitante à ordem pela qual as transformações geométricas são consideradas não ficou resolvida para o Diogo, como é possível perceber na sua resolução da questão 1.6 da ficha de avaliação de 28 de fevereiro de 2011 (Anexo 15), onde se pediam as equações das assintotas do gráfico da função $v(x) = -g(x+1) - 2$. O aluno utilizou o teorema-em-ação $-f(x)$ *corresponde a uma simetria do gráfico de f relativamente ao eixo Ox*, o que sugere que os invariantes operatórios relativos a esta transformação, nessa altura, já estavam estabelecidos, contudo, a questão envolvia também outras transformações e o Diogo não atendeu à ordem pela qual as transformações geométricas têm que ser consideradas, acabando assim por não conseguir resolver a questão com sucesso (Figura 76). A confirmação com a calculadora gráfica que efetuaria facilmente dado que, numa questão anterior, tinha determinado a expressão analítica de *g*, poderia ter contribuído para obter com sucesso as equações das assíntotas da função *v*. Mas, como vimos anteriormente, a confirmação com a calculadora gráfica está dependente do tempo que o aluno tem disponível, e da maior ou menor familiaridade com o assunto em questão. Neste caso, provavelmente, o aluno estaria relativamente seguro da sua resolução, e o tempo poderia ter sido também um fator condicionante.

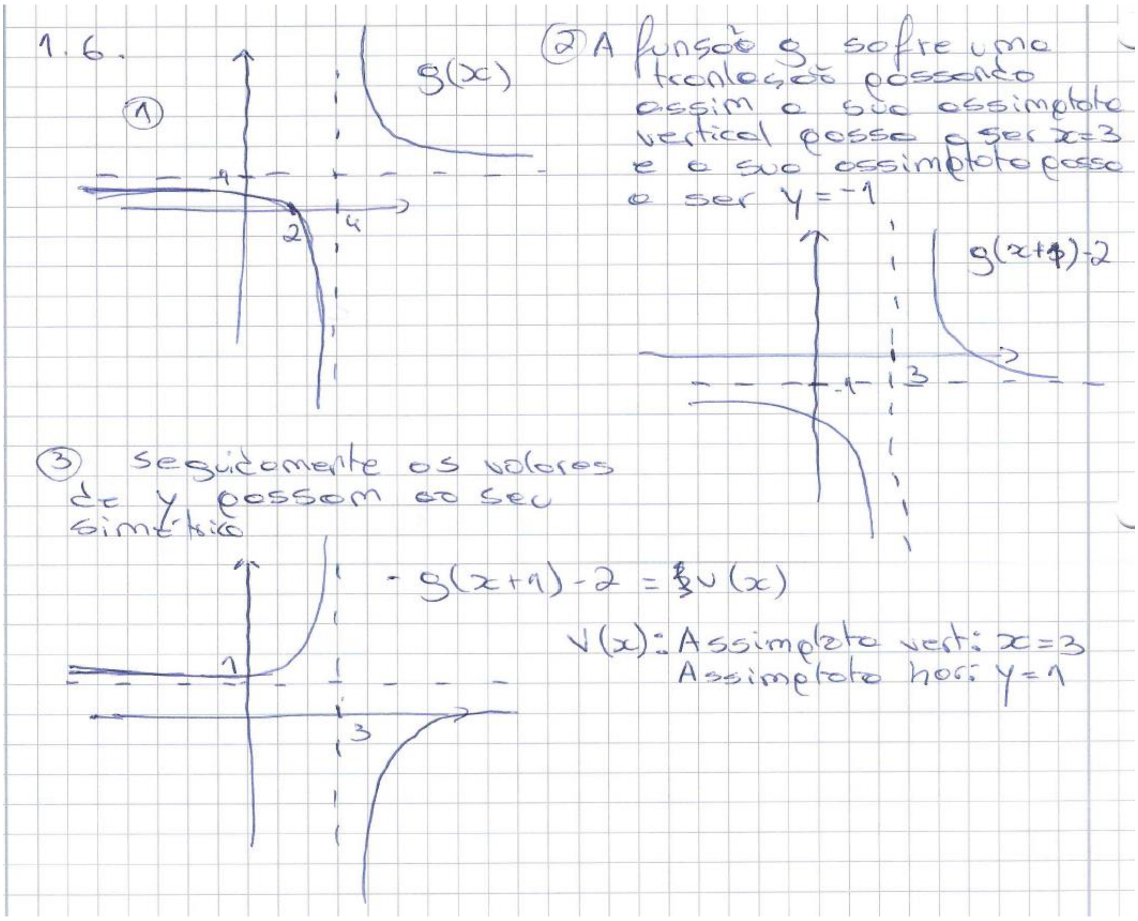


Figura 76 – Resolução da questão 1.6, segunda parte, ficha de avaliação de 28 fevereiro 2011.

Na questão 1.3 da quinta entrevista (Anexo 5), as conclusões retiradas pelos alunos no caso de *c* ou *d* serem negativos, ficaram dependente da função particular, que não os levou a distinguir a simetria em relação ao eixo *Oy*, da simetria em relação ao eixo *Ox* (Figura 78). A exploração da questão 2.1 poderia contribuir para que os alunos conseguissem perceber a diferença entre uma transformação e a outra, no entanto, os alunos limitaram-se a editar a expressão analítica de *f* e *g* na calculadora gráfica, copiando as representações gráficas obtidas no intervalo $[0, 2\pi]$, não relacionando o domínio das duas funções (Figura 77):

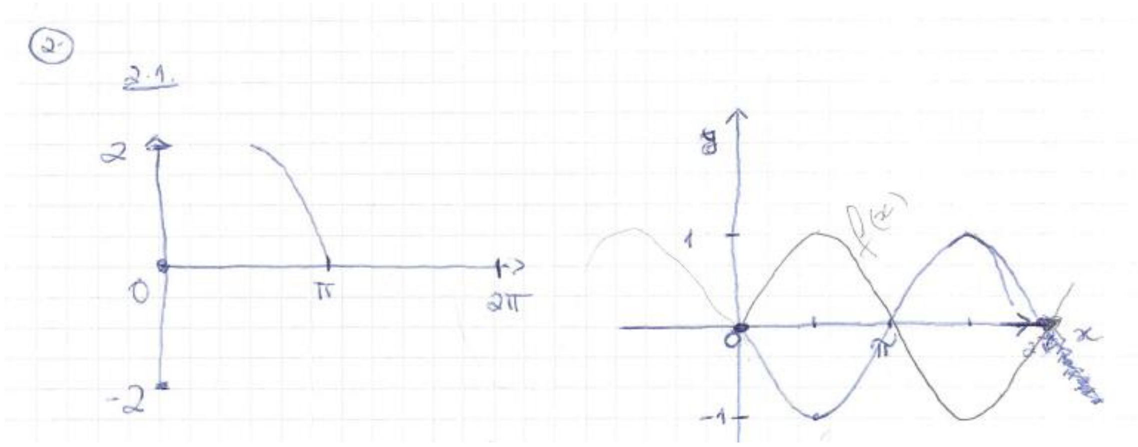


Figura 77 – Representação gráfica das funções *f* e *g* (E5, questão 2.1).

Só quando foram questionados sobre o domínio da função *f* e sobre o modo como a função *g* estava definida, é que o Diogo compreendeu que o domínio da função *g* não poderia ser o mesmo que o da função *f*, referindo que a representação gráfica deveria estar na parte negativa do eixo *Ox*: "De zero a menos dois pi, devia ser para aqui" (E5). Neste caso, a calculadora gráfica não foi convertida num instrumento eficaz porque o aluno não atendeu a algo essencial para definir a função, ou seja, o seu domínio. Se tivesse editado na calculadora a expressão analítica e o domínio da função *f*, poderia definir *g* a partir da expressão editada, já que a sua calculadora admite essa possibilidade.

Alongamento vertical ou horizontal

O alongamento vertical e horizontal não foi praticamente trabalhado na sala de aula, pelo que o aluno e o seu colega não estavam familiarizados com os seus efeitos quando foram confrontados, na questão 1.3 da quinta entrevista (Anexo 5), com esse tipo de transformação. Os alunos decidem atribuir valores aos parâmetros *c* e *d* e visualizar as representações gráficas de modo a tirar conclusões acerca do efeito dos parâmetros na representação gráfica dos elementos das famílias de funções. A exploração da questão foi dividida pelo par, tendo o Diogo ficado com a investigação dos efeitos do parâmetro *d* e o Francisco com os de *c*. Em seguida, foram transmitindo um ao outro as suas conclusões, e fizeram alguma exploração conjunta, nomeadamente no caso de os parâmetros tomarem valores negativos. Apesar de atribuíram valores positivos e negativos aos parâmetros, consideraram apenas valores absolutos maiores que um. As conclusões retiradas pelo par encontram-se registadas na Figura 78.

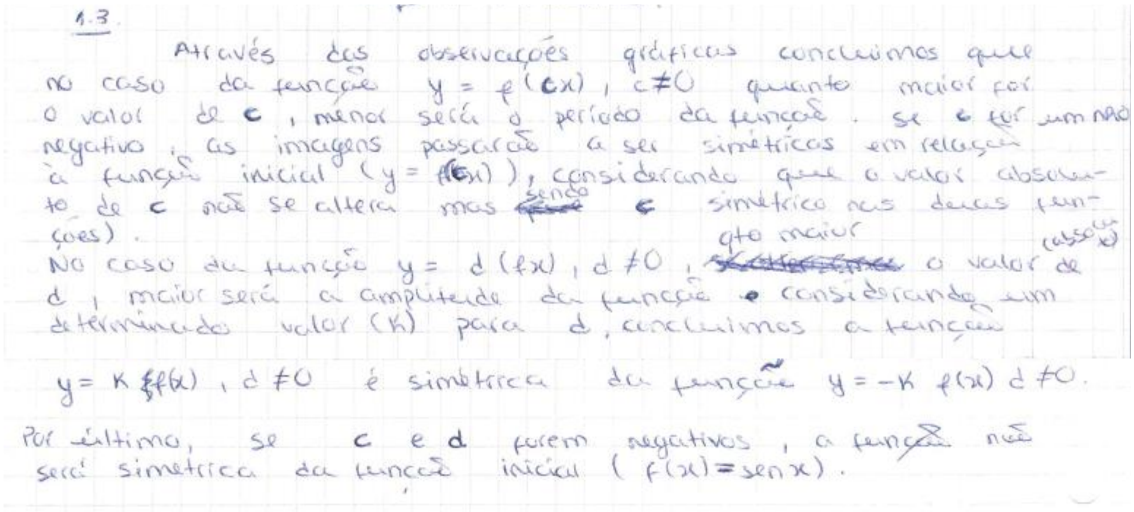

1.3.
Através das observações gráficas concluímos que no caso da função y = f(cx), c ≠ 0 quanto maior for o valor de c, menor será o período da função. Se c for um nº negativo, as imagens passarão a ser simétricas em relação à função inicial (y = f(x)), considerando que o valor absoluto de c não se altera mas sendo c simétrico nas duas funções).
No caso da função y = d(fx), d ≠ 0, quanto maior (absoluto) o valor de d, maior será a amplitude da função e considerando um determinado valor (K) para d, concluímos a função
y = K f(x), d ≠ 0 é simétrica da função y = −K f(x) d ≠ 0.
Por último, se c e d forem negativos, a função não será simétrica da função inicial (f(x) = sen x).

Figura 78 – Resolução da questão 1.3 (E5).

Os alunos conseguiram relacionar os efeitos dos parâmetros com algumas características da função trigonométrica envolvida, como o período e a amplitude, apesar de cometerem algumas imprecisões na linguagem. Por exemplo, dizem que quanto maior é o *c* menor será o período da função, quando deveriam referir-se ao valor absoluto de *c*, no entanto, relativamente ao parâmetro *d* já tiveram essa preocupação:

> **Diogo**: Quanto maior for o valor de *d*, maior a amplitude (pausa), da função. […] Se alterarmos o …
> **Francisco**: E vice-versa, não é?
> **Diogo**: Claro! (Risos)
> **Francisco**: Não!
> **Diogo**: E vice-versa? Como assim?
> **Francisco**: Não, não! Se o *d* for negativo também aumenta …
> **Diogo**: Sim, quanto maior o valor absoluto mais aumenta! Percebes?
> **Francisco**: O valor …, então tem que se escrever. (Emenda e lê) O valor absoluto de *d*, maior será a amplitude da função. (E5)

É interessante notar que, tal como a translação horizontal, o alongamento horizontal é um pouco contraintuitivo para os alunos. Quando o Francisco estava a referir as conclusões relativamente ao alongamento horizontal, o Diogo interrompeu-o, pois considerava que o período da função não deveria diminuir quando o valor absoluto de *c* aumentasse:

> **Diogo**: No caso da função *y* igual a *f* de, abre parêntesis, *cx*, fecha parêntesis, com *c* diferente de zero …
> **Francisco**: Haaa, quanto maior for o valor de …
> **Diogo**: Atribuído a *c* …
> **Francisco**: (Vai escrevendo) A *c* …
> **Diogo**: Maior será o período da função.
> **Francisco**: Menor!
> **Diogo**: Menor …, quanto maior …
> **Francisco**: Menor.
> **Diogo**: Menor?
> **Francisco**: Hum, hum.
> **Diogo**: Hum?
> **Francisco**: (Volta a pegar na calculadora e a fazer as representações gráficas da função seno de *x*, e seno de, dois *x*) Agora vai aparecer a do dois *x* …
> **Diogo**: Ah! Ok, eu não tinha percebido isso há bocado. Hum, hum. (E5)

Mesmo depois de ter concordado com as conclusões referentes ao efeito do parâmetro *c*, no que toca ao período da função, o Diogo volta a estranhar esse facto quando os alunos exploram a questão 2.2. Inicialmente ambos consideraram que *c* deveria ser 2, mas após a investigadora pedir para identificarem as representações gráficas de *f* e de *h*, o Francisco concluiu que *c* teria que ser $0,5$, tendo o Diogo referido "não faz sentido", necessitando de visualizar a representação gráfica na calculadora:

> **Diogo**: Neste caso aqui o que era o *c*, na função *h* aumentou. O valor absoluto e também manteve o sinal.
> **Investigadora**: Não sei.
> **Francisco**: Na minha opinião ficava *f*, a mim ficava seno de dois *x*, na minha opinião, porque o período, neste caso …
> **Diogo**: É o dobro. (Pausa) É o dobro não!
> **Francisco**: É exatamente, metade.
> **Diogo**: Por isso é que aumenta …
> **Investigadora**: Portanto, na vossa opinião seria *f* de dois *x*?
> **Diogo**: *f* de dois *x*.
> **Investigadora**: Hum. Então e vocês já identificaram qual é o gráfico da *f* e qual é o gráfico da *h*?
> […]
> **Diogo**: Logo vai ter que ser seno de, menos dois *x* (pausa), não!
> **Francisco**: Não, não é menos dois. (Pausa) Seno de, um meio …
> **Diogo**: Um meio?

> **Francisco**: Um meio de *x*. Zero, vírgula, cinco *x*.
> **Diogo**: Não faz sentido!
> **Francisco**: Vamos tentar! (Pega na máquina).
> **Diogo**: Se calhar também devia fazer (pega na sua calculadora).
> **Francisco**: Então temos a função *f* de *x* (pausa), que é igual a seno de *x* … […] Então a janela aqui neste caso (vai à janela), seria de zero a quatro pi. (Visualiza) Hum! Mas eu não sei limitar a função. […] E a outra função seria seno de ponto cinco *x* (visualiza as representações).
> **Diogo**: Hum, Hum! Xeque-mate!
> **Francisco**: Conseguimos! (E5)

A calculadora gráfica permitiu-lhes confirmar a conjetura do Francisco, mas é possível perceber que o Diogo manteve a conceção errónea acerca dos efeitos do parâmetro *c*, já que, na questão 1.3 da entrevista 7 (Anexo 7), o aluno considera que os zeros de $f\left(\frac{x}{2}\right)$ irão corresponder aos zeros de *f* a dividir por 2:

> **Diogo**: Eu estava a pensar que não sabia! Então, mas estava a tentar pensar como é que aqui o *x* sobre dois pode influenciar …
> **Investigadora**: Hum. (Pausa longa) E então?
> **Diogo**: Hum (pausa muito longa), os valores de *x* vão ser metade, do que supostamente eram, do que …, pronto, *f* de *x*, os valores em relação ao *f* de *x*, os valores de *x*, vão ser metade (pausa), não sei é como é que isto vai, influenciar aqui na função. Mas, acho que vou fazer, um quadro de sinal.
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: (Pausa) Mas não sei, o que é que sei, sei os zeros, os zeros supostamente vão ser, estes valores (aponta na representação gráfica), a dividir por dois (pausa), certo?
> **Investigadora**: Não sei.
> **Diogo**: Vão ser, vão ser, *Stora*. (E7)

Apesar de alguma indecisão o Diogo não recorreu à calculadora gráfica, provavelmente por não ter a expressão analítica da função *f*, que só determinou na questão seguinte. Poderia ter substituído *x* na expressão $f\left(\frac{x}{2}\right)$ por um dos supostos zeros, e confirmar a partir da representação gráfica da função *f* se a imagem seria efetivamente zero, mas não houve essa intenção. Nesta situação, em que os invariantes operatórios não estão estabelecidos, como é possível perceber pela resposta dada pelo Diogo, relativamente a essa transformação: “Não é nada, para mim não é nada” (E7), uma visão mais pontual poderia trazer alguma luz à questão.

Após ter determinado a expressão analítica de *f* a investigadora pediu-lhe para confirmar se a transformação produzia os efeitos que tinha suposto. O Diogo utilizou a calculadora para visualizar a representação gráfica, recordando então que já tinha visto anteriormente os efeitos de uma transformação do género:

> **Diogo**: Ah! (Visualiza) Pois, agora é que eu me estou a lembrar vagamente disto, do ano passado. É quando se divide. Acontecia assim um processo que, o *x* aumentava (pausa), e neste caso foi o que aconteceu. Devia ser a multiplicar por dois os valores de, do *x* em vez de dividirmos por dois. (E7)

A utilização do artefacto, nesta questão, estava dependente da determinação prévia da expressão analítica da função *f*, e talvez por isso o Diogo não o tenha utilizado.

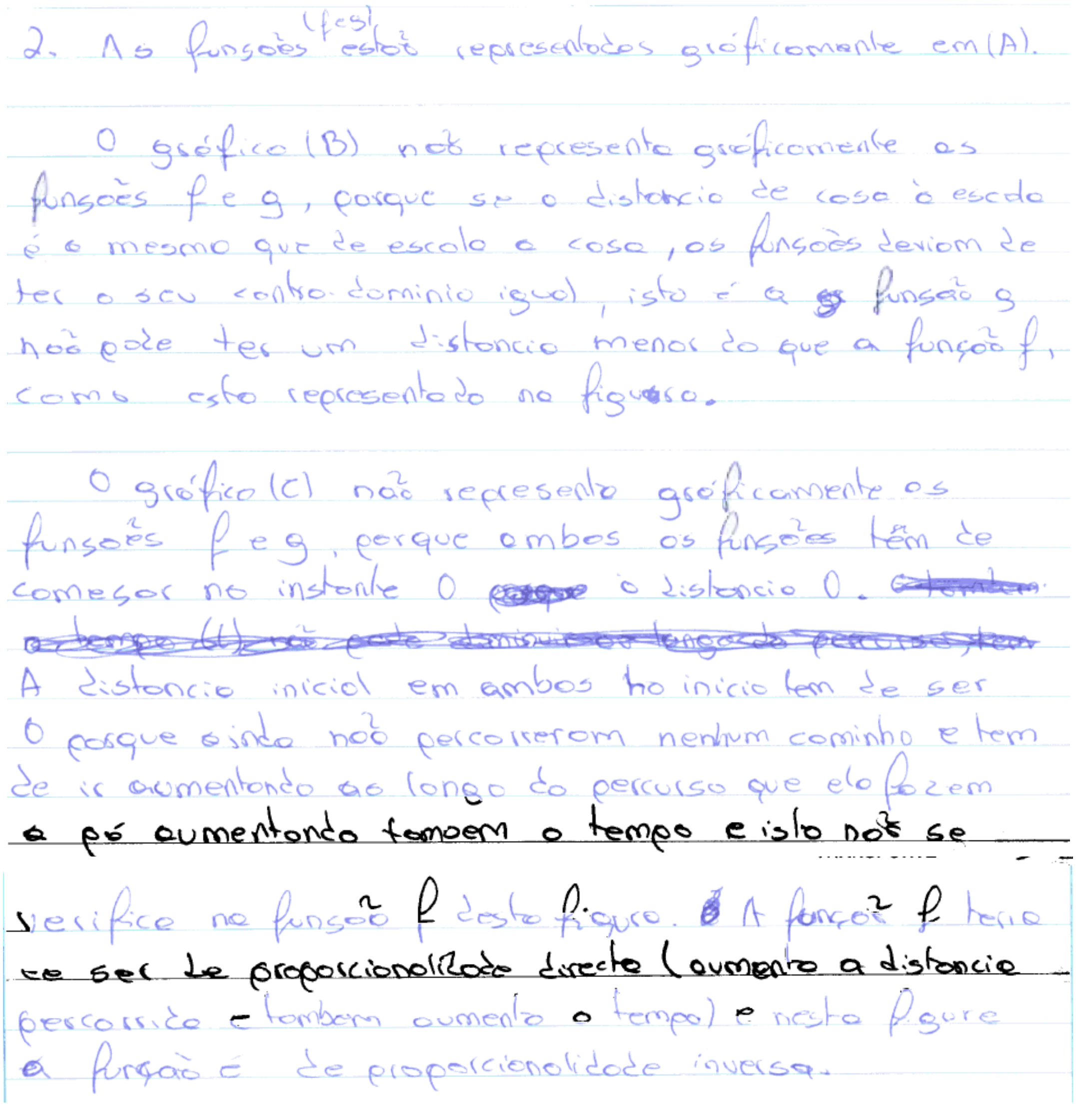
Em resumo, a visualização dos efeitos das transformações de funções na representação gráfica da função original, a partir do artefacto mediador, vai permitindo ao aluno memorizar esses efeitos, o que contribui para a instituição dos teoremas-em-ação que utiliza depois em situações semelhantes, sem recurso ao artefacto. Os teoremas-em-ação, como por exemplo, $f(x)+k$ *corresponde a uma translação do gráfico de f associada ao vetor* $(0,k)$, ou, $f(x-h)$ *corresponde a uma translação associada do gráfico de f associada ao vetor* $(h,0)$, parecem assim basear-se mais na memorização do que na compreensão desses efeitos. Em situações de dúvida relativamente aos efeitos da transformação o Diogo recorre à calculadora gráfica, no entanto, o recurso ao artefacto parece ficar condicionado pela complexidade da expressão algébrica envolvida ou pelo facto de esta não ser conhecida. Nessas situações, o aluno não demonstrou flexibilidade em encontrar uma estratégia alternativa que lhe permitisse obter alguma informação sobre a transformação geométrica associada.

Tal como a literatura sugere o sentido da translação horizontal é um pouco contraintuitivo para o aluno, sendo possível perceber que os invariantes operatórios relativos a esta transformação demoraram mais tempo a ser estabelecidos do que os relativos à translação vertical. O alongamento horizontal, tal como a translação horizontal, parece ser também contraintuitivo para o Diogo, já que, numa situação em que não recorreu ao artefacto, decidiu pelo efeito contrário (contração quando deveria ser dilatação). As transformações de funções são encaradas pelo aluno a um nível global, no entanto, uma abordagem a nível local poderia contribuir para uma melhor compreensão das transformações de funções e dos seus efeitos na representação gráfica. A utilização eficaz da calculadora gráfica no que diz respeito às transformações de funções depende também da compreensão do conceito de função, tendo sido possível perceber que, no caso em que o domínio é um intervalo limitado, o aluno não conseguiu utilizar a calculadora de modo eficiente por não atender ao domínio da função correspondente à transformação.

7.5.3. Conversão de representações

Conversão da representação verbal na representação gráfica ou algébrica

Em problemas de identificação da representação gráfica de uma função a partir da representação verbal o Diogo demonstrou alguma facilidade, conseguindo usualmente identificar a informação relevante no registo verbal e os correspondentes efeitos na representação gráfica. Por exemplo, no teste intermédio de 5 de maio de 2010, questão 2 do grupo II, (Anexo 9), o Diogo conseguiu identificar a representação gráfica correta e comunicar a razão da sua escolha, embora tenha cometido um erro ao afirmar que a representação da função *f*, em (C), correspondia a uma proporcionalidade inversa:



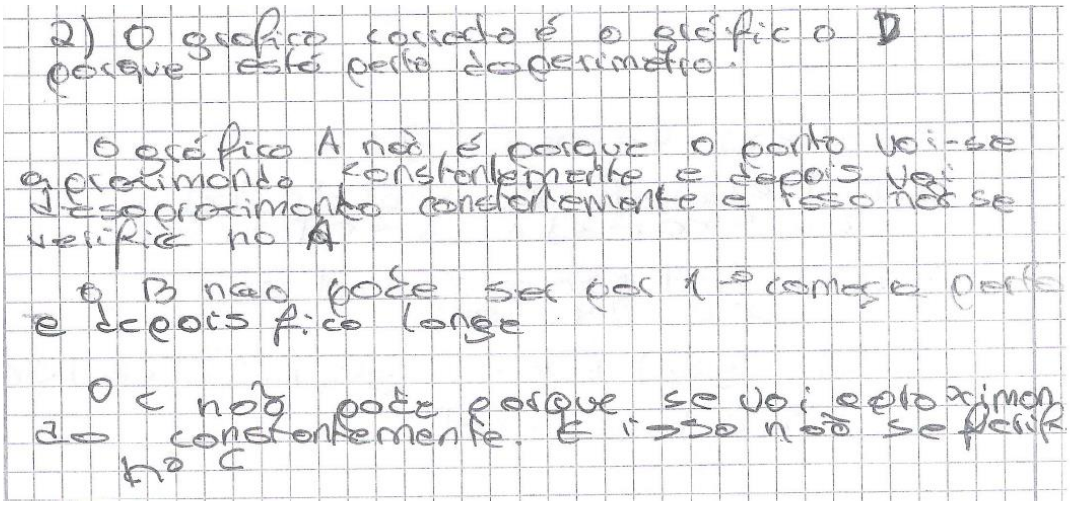
2. As funções (f e g) estão representadas graficamente em (A).

O gráfico (B) não representa graficamente as funções f e g, porque se a distância de casa à escola é a mesma que de escola a casa, as funções deviam de ter o seu contra-domínio igual, isto é a ~~g~~ função g não pode ter uma distância menor do que a função f, como está representado na figura.

O gráfico (C) não representa graficamente as funções f e g, porque ambas as funções têm de começar no instante 0 ~~[illegible]~~ à distância 0. ~~o tempo (t) não pode diminuir ao longo do percurso, tem~~ A distância inicial em ambos no início tem de ser 0 porque ainda não percorreram nenhum caminho e tem de ir aumentando ao longo do percurso que ela fazem e só aumentando também o tempo e isto não se verifica na função f desta figura. ~~o~~ A função f tem de ser de proporcionalidade directa (aumenta a distância percorrida e também aumenta o tempo) e nesta figura a função é de proporcionalidade inversa.

Figura 79 – Resolução da questão 2, do grupo II, do teste intermédio de 5 de maio 2010.

A conversão da representação verbal na representação gráfica, em problemas daquele tipo, envolve muitas vezes conexões com a geometria, sendo importante compreender o tipo de covariação entre as duas variáveis para escolher a opção correta (ou eliminar as opções incorretas). A questão 2, da segunda parte do teste de março de 2010 (Anexo 9), é um exemplo disso. A escolha da opção correta passava pela compreensão do tipo de covariação entre as variáveis, que para o Diogo, tendo em conta a expressão por ele utilizada – “vai-se aproximando constantemente”, e a representação gráfica escolhida, parece ser linear:


2) O gráfico correcto é o gráfico D porque está perto do perímetro.

O gráfico A não é porque o ponto vai-se aproximando constantemente e depois vai desaproximando constantemente e isso não se verifica no A

O B não pode ser por 1º começa perto e depois fica longe

O C não pode porque se vai aproximando constantemente. E isso não se verifica no C

Figura 80 – Resolução da questão 2, da segunda parte, do teste de 5 de março de 2010.

Apesar de, em questões semelhantes, não ter sido necessário escrever a expressão analítica da função, talvez neste caso fosse o modo mais eficaz de obter a representação gráfica correta, já que nas opções (C) e (D) estão representadas funções com os mesmos zeros, o mesmo ponto extremante e os mesmos intervalos de monotonia. A expressão analítica não seria familiar ao aluno, no entanto, a conversão na representação gráfica poderia facilmente ser obtida a partir da calculadora gráfica.

Relativamente à conversão da representação verbal na representação algébrica, notou-se ao longo do tempo uma evolução por parte do Diogo, resultante de uma maior facilidade em termos da escrita de uma variável em função da outra. Inicialmente o Diogo revelou, de facto, algumas dificuldades na conversão da representação verbal na gráfica, o que pode estar associado a uma visão mais operacional do conceito de função. Numa das aulas em que a professora estava a corrigir o problema 5.3.3 da série de problemas de Fevereiro de 2010 do GAVE, o Diogo expressou um sentimento semelhante ao que tinha transmitido na primeira entrevista relativamente à função *g* da questão 4.2 (Anexo 1), mostrando alguma dificuldade em compreender o papel das variáveis:

> **Professora**: Multiplicar o preço pela quantidade. Mas temos que ter atenção aqui a uma coisa.
> **Diogo**: Como é que nós sabemos, qual preço?
> **Professora**: Hum?
> **Diogo**: Como é que nós sabemos qual é que é o preço e qual é que é quantidade?

> **Professora**: Então a relação que dá o preço, o preço é o *x*, o *y* é a quantidade, está aí escrito Diogo!
> **Diogo**: Sim, mas (pausa), qual? Há muitas quantidades e há muitos preços, qual é que nós vamos pôr?
> **Francisco**: Nós temos que …
> **Diogo**: Ah! Temos que fazer uma função geral? Está bem. (A24_10)

O discurso do aluno aponta para uma visão operacional do conceito e para alguma compartimentação relativamente às diferentes representações de função, o que pode contribuir para dificuldades na conversão de representações. Nessa tarde, ao responder à questão 3.3 da terceira entrevista (Anexo 3), o Diogo voltou a revelar alguma dificuldade em relacionar as variáveis envolvidas no problema. Aliás, inicialmente, o aluno sugeriu resolver a questão por tentativas: “Só se for fazer por tentativas. […] Atribuindo vários valores, para as várias, atribuir vários valores e determinar as áreas” (E3). Quando a investigadora salientou o trabalho que essa estratégia iria dar o aluno respondeu: “Pois. Hum, hum” (E3) e após uma longa pausa referiu “ Isto talvez com uma, com uma função desse” (E3), sendo aqui evidente uma compartimentação entre as várias representações de função. De qualquer modo, o Diogo continuou a mostrar dificuldades em trabalhar com as várias variáveis: “Não sei para que é que eu vou tentar arranjar, preciso de saber a altura. […] Não sei qual é o *x*, eu não sei, não vou tirar daqui nenhum resultado” (E3). Foi a investigadora que recordou que a variável *y* podia ser escrita em função de *x*, já que o Diogo tinha representado um triângulo retângulo com as variáveis, *h*, *y* e *x*. A partir do momento em que acrescentou a relação entre *y* e *x* (Figura 81), o aluno conseguiu obter a expressão algébrica que dá a área do triângulo em função de *x*.

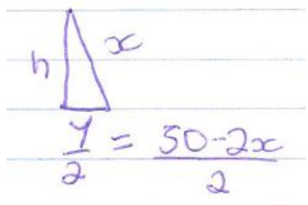
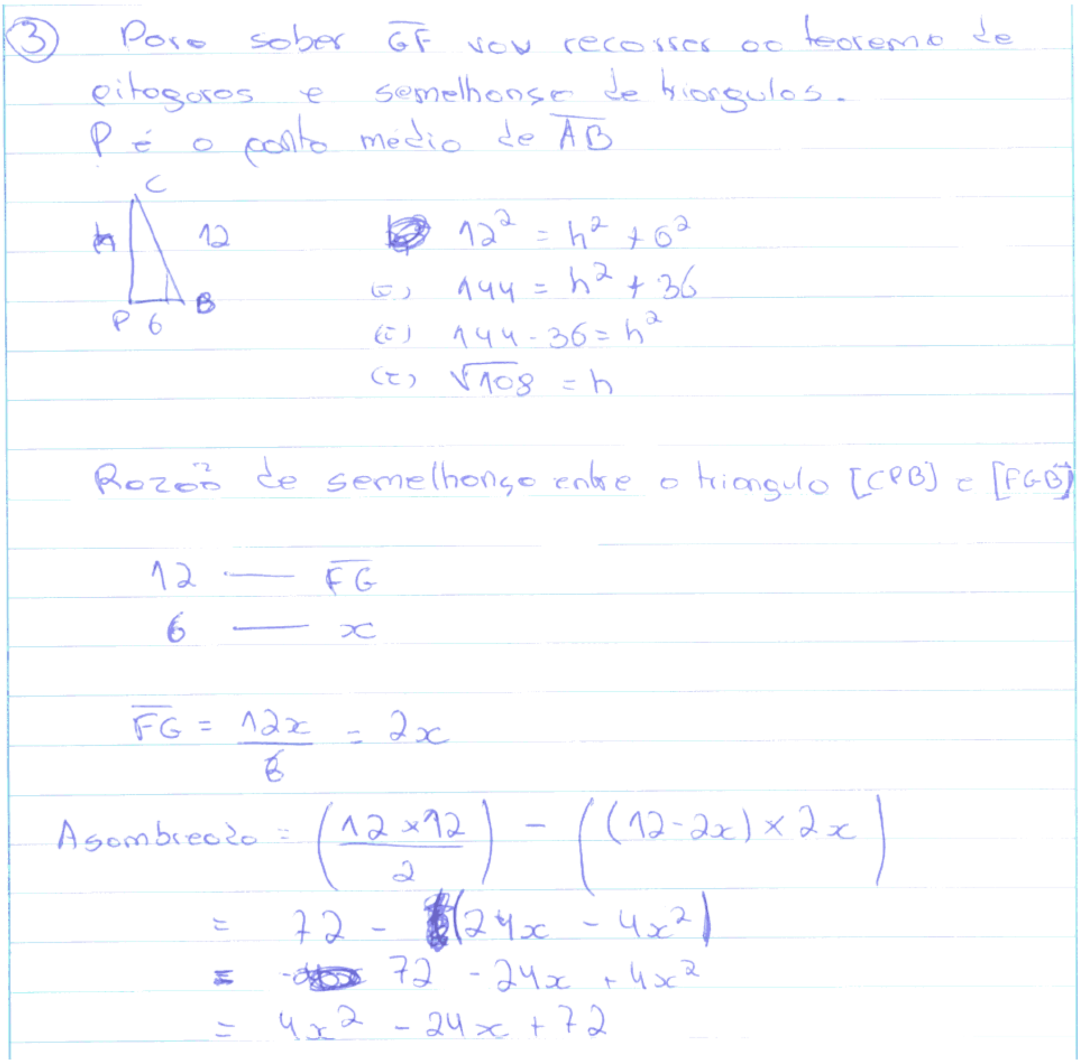


Figura 81 – Esquema feito pelo Diogo (E3, questão 3.3)

Na altura do primeiro teste intermédio, apesar de algum trabalho desnecessário, o Diogo conseguiu obter facilmente a expressão que dá a área pedida em função de *x*, na questão 3 do grupo II do teste de 5 de maio de 2010 (Anexo 9), o que mostra uma evolução ao nível da conversão da representação verbal (e geométrica) na representação algébrica:


3) Para saber $\overline{GF}$ vou recorrer ao teorema de pitagoras e semelhança de triangulos.
P é o ponto médio de $\overline{AB}$

$$12^2 = h^2 + 6^2$$
$$\Leftrightarrow 144 = h^2 + 36$$
$$\Leftrightarrow 144 - 36 = h^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{108} = h$$

Razão de semelhança entre o triangulo [CPB] e [FGB]

12 — $\overline{FG}$
6 — x

$$\overline{FG} = \frac{12x}{6} = 2x$$

$$A_{sombreado} = \left(\frac{12 \times 12}{2}\right) - \left((12-2x) \times 2x\right)$$
$$= 72 - (24x - 4x^2)$$
$$= 72 - 24x + 4x^2$$
$$= 4x^2 - 24x + 72$$

Figura 82 – Resolução da questão 3, do Grupo II, do teste intermédio de 5 de maio 2010.

O sucesso na conversão da representação verbal, muitas vezes também associada a uma representação geométrica, na representação algébrica, depende não só da evolução do conceito de função e da maior ou menor facilidade com que o aluno consegue escrever uma variável em função de outra, mas também da capacidade para visualizar e relacionar vários outros conceitos e conteúdos, e até da capacidade de tratamento algébrico. Por exemplo, na questão 1, primeira parte, do teste de 28 de outubro de 2011 (Anexo 15), o Diogo conseguiu escrever $\overline{OH}$ e $\overline{CH}$ em função da amplitude do ângulo α, no entanto, o facto de não conseguir visualizar como variava a altura do triângulo [OAC], levou-o a recorrer a um procedimento muito mais complicado que, aliado a dificuldades no tratamento algébrico, não lhe permitiram chegar à solução (Figura 83).

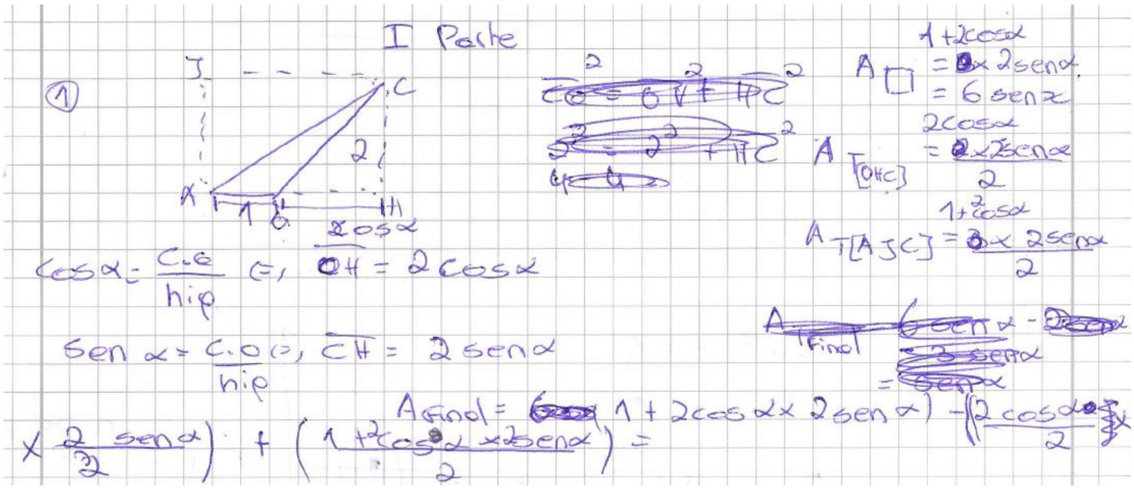


Figura 83 – Resolução da questão 1, primeira parte, do teste de 28 outubro de 2010.

Em várias situações, foi possível verificar que a dificuldade inicialmente demonstrada em termos da conversão da representação verbal na algébrica, relacionada com o próprio conceito de função, foi ultrapassada. Na última entrevista, questão 6.1 (Anexo 8), embora inicialmente tenha perguntado se tinha que determinar o raio e dito que não sabendo a altura não conseguiria fazer, parece que isso deve ter acontecido porque, devido à falta de tempo, o aluno não estava efetivamente a resolver o problema mas a dizer por alto o que faria nessa situação:

> **Diogo**: Isto é mesmo para eu fazer, com um suposto valor do raio da base, ou tenho de determinar o raio da base?
> **Investigadora**: Não, é em função do raio da base.
> **Diogo**: Em função do raio da base, logo não preciso de determinar o, o raio. […] É que eu achei que como tinha, o volume, que poderia descobrir a partir do volume o raio, mas precisava de ter a altura!
> **Investigadora**: Pois, não, mas é para pôr tudo em função do raio!
> **Diogo**: Ok. (Escreve a área como $2\pi r^2$)
> […]
> **Investigadora**: Se calhar ias-me só dizer o que é que ias fazer. Só assim, por alto.
> **Diogo**: Eu iria determinar agora esta área (aponta no papel), que iria ser dois pi, r, ao quadrado.
> **Investigadora**: Sim.

> **Diogo**: Haaa, e já tinha a expressão (pausa), pronto já sabia quanto dinheiro é que ia gastar em tampas.
> **Investigadora**: Hum, hum.
> **Diogo**: E depois, fazia o mesmo para a zona lateral, com o perímetro, haaa, só que não sei a altura, também não sei como é que iria fazer essa parte.
> **Investigadora**: Hum. Portanto, aí é que entra o volume.
> **Diogo**: Pois!
> **Investigadora**: Não é?
> **Diogo**: Ia pôr tudo em função do, do raio. (E8)

Foi possível perceber uma evolução na conversão da representação verbal na representação algébrica, associada a uma evolução do conceito de função, com o aluno a conseguir abordar as questões de modo mais estrutural.

Conversão da representação algébrica na representação gráfica

A conversão da representação algébrica na representação gráfica é feita pelo Diogo, usualmente, recorrendo à calculadora gráfica. No entanto, o aluno tem que decidir se está ou não perante uma visualização apropriada e efetuar os ajustes necessários na janela de visualização, o que pressupõe o estabelecimento de conexões entre representações e a relação com o contexto no caso de um problema. Como vimos na secção 7.3.1, os esquemas de enquadramento desenvolvidos pelo aluno envolvem essencialmente tentativa e erro, contudo, é possível perceber que o aluno procura estabelecer conexões com a representação algébrica, embora por vezes isso se resuma a identificar o tipo de função envolvida. Por exemplo, vimos nessa secção que na questão 1.1 da terceira entrevista (Anexo 3), o Diogo atendeu ao facto de a expressão que estava no interior do módulo ser do segundo grau. Aparentemente o aluno teria uma ideia da representação gráfica, mas demorou muito tempo até conseguir uma janela satisfatória, não tendo recolhido outras informações a partir da expressão algébrica, ou de outras representações, como a numérica. Na questão 1.1 da quarta entrevista, parte individual (Anexo 4), o comportamento do aluno é semelhante, demorando muito tempo a alterar os valores mínimos e máximos para cada uma das variáveis na janela de visualização, sem recolher informação de outras fontes. Ao tentar decidir se estaria perante uma representação aceitável, focou a sua atenção na representação algébrica, embora tenha tido alguma dificuldade em reconhecer o grau do polinómio, que inicialmente considerou ser 6:

Diogo: Agora apareceu-me três, riscos. Isto, acho que quer dizer que o gráfico é maior ainda, do que eu estava à espera, logo vou ter que pôr o y maior, ainda.
Investigadora: Tinhas ideia da representação gráfica? Olhando para a expressão?
Diogo: Da representação gráfica? Não.
Investigadora: Não? De maneira nenhuma?
Diogo: Não.
[…]
Diogo: Estou a pôr agora quinze mil. E ainda não consigo ver totalmente. (Altera) Hum, hum, já está mais perto. […] Pronto, já consigo ver o gráfico todo.
Investigadora: E como é que tens a certeza que estás a ver o gráfico todo?
Diogo: Hum (pausa).
Investigadora: Há bocadinho disseste que não tinhas ideia da representação gráfica. Como é que agora sabes que estás a ver realmente o gráfico todo? Que não te falta nada?
Diogo: Não tenho a certeza.
Investigadora: Não?
Diogo: (Pausa longa) Mas, provavelmente nem estou a ver o gráfico todo!
Investigadora: Será?
Diogo: (Pausa) Isto é uma, uma equação, de grau, seis.
Investigadora: Seis? Como é que tu vês o grau?
Diogo: Não. Se calhar é só mesmo três! (E4)

Após ter decidido qual o grau do polinómio, o Diogo considera que está perante uma representação gráfica aceitável, com base num teorema-em-ação que não é verdadeiro: *Uma função polinomial de grau três muda o seu sentido de variação três vezes*:

Diogo: Agora já sei que deve ser este porque, se é do terceiro grau, muda três vezes, é crescente, depois decresce, pronto é do terceiro grau (ri).
Investigadora: Qualquer função do terceiro grau, cresce, decresce, e …
Diogo: Sim.
Investigadora: Sempre?
Diogo: Sim. (E4)

Inicialmente o aluno referiu não ter ideia acerca do aspeto da representação gráfica, o que sugere que, ao contrário do que acontece com uma função afim ou quadrática, a expressão algébrica não lhe evoca de imediato as possíveis formas que a representação gráfica pode assumir. Além disso, parece que o conceito imagem do

Diogo relativamente às funções cúbicas, na altura da entrevista, não englobava funções monótonas. Este facto pode ser explicado tendo em conta que o trabalho desenvolvido na sala de aula, para além de privilegiar o tratamento algébrico, envolveu polinómios com dois ou três zeros. Contudo, esta ideia parece que se manteve, já que na sexta entrevista (Anexo 6), ao analisar a representação gráfica obtida para a função g definida por $g(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1}$, o Diogo volta a manifestar essa conceção, referindo: "Eu acho que este *x* aqui (denominador) vai interferir, vai baixar o grau desta coisa toda, e vai ficar assim, porque senão se fosse de grau três, de grau três, aquilo tinha que dar assim uma coisa  (gesto com a mão)" (E6)

Para as funções afins e quadráticas parece que o Diogo desenvolveu alguns esquemas que lhe permitem identificar na representação algébrica determinadas propriedades da função e os seus efeitos na representação gráfica. Isso é visível quando na questão 2 da quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), os alunos efetuam o esboço da representação gráfica de cada um dos fatores, sem recorrer à calculadora gráfica. No entanto, no caso das funções quadráticas, isso nem sempre isso é feito de forma imediata. Por exemplo, relativamente ao fator $\left(x^2+2\right)$, o Diogo não conseguiu identificar o vértice da parábola, começando por referir que tinha que transformar a expressão num caso notável. A translação associada ao vetor $(0,2)$ relativamente à parábola de equação $y=x^2$ só foi assinalada pelo aluno depois de visualizar a representação gráfica na calculadora:

> **Diogo**: Olha que tens de desenvolver isso, tens de desenvolver não! Tens que pôr isso para trás.
> **Francisco**: O quê?
> **Diogo**: O quadrado de fora. (Pausa) E depois mais um, não? […] É que eu acho que nós temos que fazer agora aqui, o caso notável!
> **Francisco**: Não, não tens!
> **Diogo**: Antes de isso acontecer …
> **Francisco**: Não tens.
> **Diogo**: Antes disso acontecer …
> **Francisco**: Sabes qual é, sabes. Mete lá *x* ao quadrado na calculadora. […] Não, vai dar exatamente, uma parábola …
> **Diogo**: Não, porque antes disto acontecer …
> **Francisco**: Com o vértice em zero, zero.
> **Diogo**: Isto já é o caso notável desenvolvido! Antes disto acontecer devia de haver aqui um menos, ou um mais qualquer

> coisa, que depois de desenvolver o caso notável se junta com este e desapareceu (ri). Não te assustes.
> **Francisco**: Eu acho que não. Esta aqui é igual a isto (representa sumido com a esferográfica, como se a representação gráfica de $y = x^2$ tivesse sofrido uma translação horizontal), dá-me o lápis, é esta (passa com o lápis). Agora esta …. Esta aqui (aponta), *x* mais um, é para aqui (representa ao lado)
> **Diogo**: (Estava a mexer na calculadora e deve ter feito a representação do primeiro fator) O que é que tu disseste? Que era igual a qual (espreita para a folha onde o Francisco representou, a Investigadora tapa com a mão o visor da calculadora do Diogo).
> **Francisco**: Não é? Não é!?
> **Diogo**: A *Stora* tapou! É para eu não te dizer.
> **Francisco**: Supostamente é porque não é.
> **Investigadora**: É *x* quadrado, não é? Mais dois!
> **Diogo**: Sim. (Pausa) E o mais dois é qual? Como se fosse o *k*, não?
> **Francisco**: Sim. Ah! Não! Pois é, era subir em vez de deslocar para o lado. (E4)

No que diz respeito às funções cúbicas não há evidência de o aluno conseguir identificar o que é relevante no registo algébrico para efetuar a conversão para o registo gráfico. A dificuldade em antever a forma da representação gráfica no caso das funções polinomiais de grau superior a dois é visível na resolução da questão 2 da quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), apesar de a expressão algébrica permitir um reconhecimento instantâneo dos zeros e da sua multiplicidade, bem como do sinal do coeficiente do termo de maior grau. Como foi referido anteriormente, perante esta questão, os alunos optaram por representar graficamente cada um dos fatores, tentando depois efetuar um esboço da representação da função pedida.

Relativamente às funções racionais é possível perceber que, no caso em que a representação gráfica é uma hipérbole, o Diogo desenvolveu esquemas que lhe permitem identificar propriedades da função no registo algébrico e correspondentes efeitos no registo gráfico. Isso é percetível na resposta dada à questão 3 da sétima entrevista (Anexo 7), relativamente à expressão $y = \frac{a}{x-b}$, com $a \neq 0$, apesar de alguma confusão inicial relativamente à existência de assíntota horizontal:

> **Diogo**: Para traçar o primeiro, ir-lhes-ia dizer (pausa) … Que (pausa), o *b* era a assíntota vertical.
> **Investigadora**: O *b*?

> **Diogo**: (Pausa longa) Não. Sim! Não o *b* não, quando, a assíntota vertical ...
> **Investigadora**: É a reta …
> **Diogo**: Pronto, é a reta, *x* igual a, a *b*. Haaa, e que supostamente isto devia ter aqui a assíntota horizontal, mas não tem, portanto, é mais fácil para eles, haaa, traçava, primeiro …
> **Investigadora**: Então mas não percebi. Tem assíntota horizontal ou não tem?
> **Diogo**: Não tem! Quer dizer (pausa longa) Não tem!
> **Investigadora**: Hum. E então como é que ficaria a representação gráfica?
> **Diogo**: Ficaria … (pausa longa). Quer dizer, tem, claro que tem. Então não tem? É zero! Tem uma assíntota horizontal que é zero, a representação gráfica …
> **Investigadora**: Horizontal que é? (Pausa) *y* …
> **Diogo**: Igual a zero. (E7)

O Diogo identificou a forma da representação gráfica e os efeitos do parâmetro *a* na representação gráfica:

> **Diogo**: […] E também o *a*, iria influenciar a amplitude, a distância daqui (centro), para o gráfico, até ao centro.
> **Investigadora**: Apenas?
> **Diogo**: Não, também se iriam encontrar no, em que quadrantes se iria encontrar, que se iria encontrar o gráfico. (E7)

De um modo geral, em expressões do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, sendo $b \neq 0$, o Diogo identifica o que é relevante na representação algébrica para efetuar a conversão na representação gráfica, tendo desenvolvido esquemas de tratamento algébrico que lhe permitem, quando possível, escrever uma expressão racional nessa forma. Por exemplo, na questão 1.5 da sexta entrevista (Anexo 6), o Diogo recorre ao tratamento algébrico das expressões $r_p(t) = \frac{4t+5}{t+2}$ e $r_v(t) = \frac{5t+1}{t+3}$, para identificar as assíntotas do gráfico das funções e responder ao problema (Figura 84):

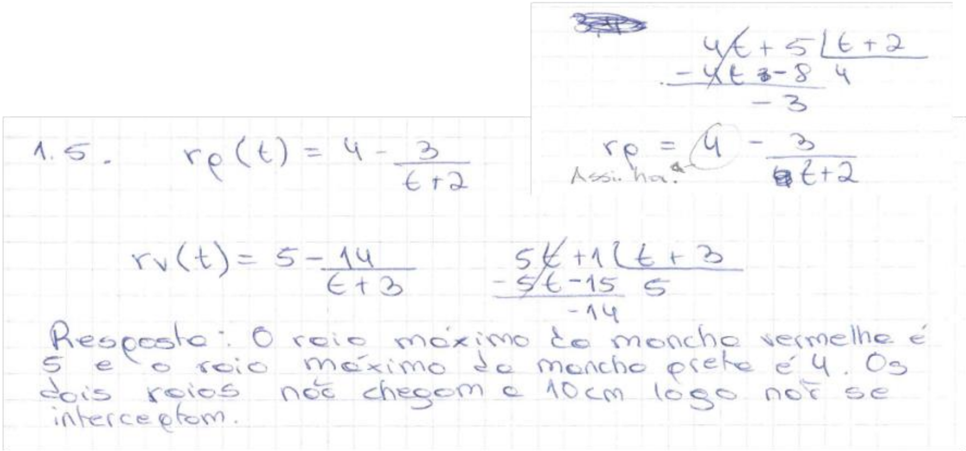


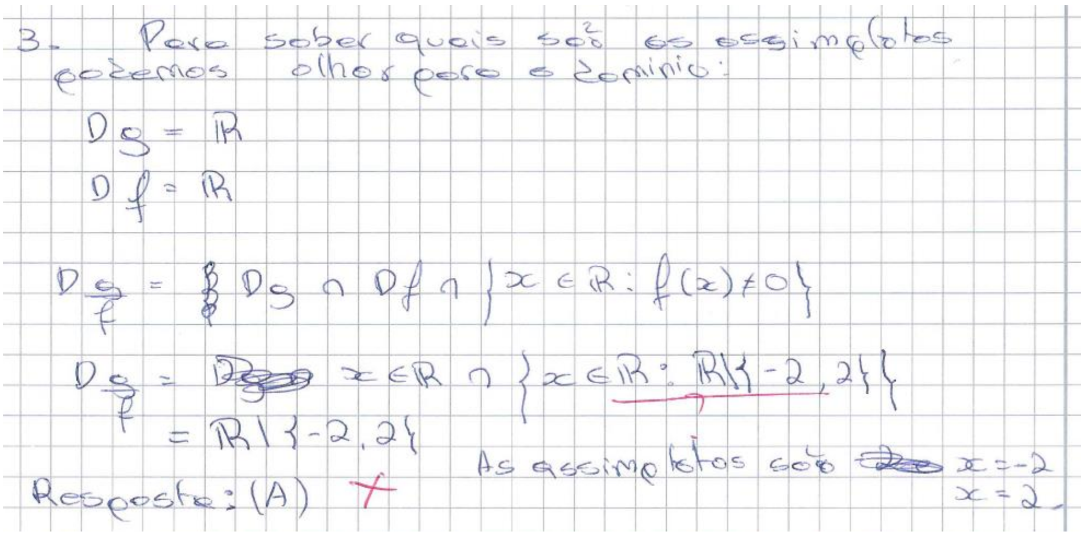
Figura 84 – Resolução da questão 1.5 (E6).

No caso de outro tipo de funções racionais o Diogo não parece conseguir prever a forma da representação gráfica, por exemplo, na questão 3 da sétima entrevista (Anexo 7), relativamente à expressão $y = ax + b + \frac{c}{x}$ o aluno refere: "Isto não me parece com nada. Isto é uma reta mais, uma função deste tipo (aponta para a outra expressão). Certo? (Pausa longa) Ah! Coitados, se não houvesse calculadoras gráficas … (risos)" (E7). Não tendo ideia da representação gráfica, o Diogo apelou à calculadora, atribuindo o valor dois a todos os parâmetros, começando por explicar que diria "aos supostos alunos que não poderiam usar calculadora gráfica" para reduzirem tudo ao mesmo denominador, deixando transparecer a convicção de que o gráfico de uma função racional deverá ter uma assíntota correspondente aos valores de *x* para os quais a função não está definida:

> **Investigadora**: E em que é que isso te indicava melhor a forma do gráfico?
> **Diogo**: Pelo menos sabia que tinha uma assíntota, vertical.
> **Investigadora**: Sempre?
> **Diogo**: Sempre que o suposto *b* que aqui devia de estar, fosse, zero. Não! Sempre! Iria ter sempre uma assíntota.
> **Investigadora**: Qual é que seria essa assíntota?
> **Diogo**: Zero. Neste caso era zero.
> **Investigadora**: *x* igual a …
> **Diogo**: *x* igual a zero (risos), esqueça *Stora*, eu vou errar isto para sempre.
> **Investigadora**: Mas isso acontecia sempre?
> **Diogo**: Então, eu penso que sim.
> **Investigadora**: Então e se o *c* for zero?

> **Diogo**: (Pausa longa) A assíntota iria continuar a ser, zero. *x* igual a zero.
> **Investigadora**: Seria uma assíntota?
> **Diogo**: Se o *c* for zero, sim.
> **Investigadora**: Então experimenta lá, se faz favor.
> **Diogo**: (O aluno muda na expressão introduzida o *c* para zero, visualiza) Pois, não tinha. (E7)

Esta convicção manifestou-se em diversas situações e ao longo do tempo, sendo evidente que o aluno não consegue identificar na representação algébrica, as situações em que a representação gráfica apresenta uma assíntota ou um buraco. Devido a esta conceção, o aluno errou uma escolha múltipla numa ficha de avaliação, 28 de fevereiro 2011 (Anexo 15), apesar de ter recorrido à calculadora e observado que a representação gráfica possuía apenas uma assíntota. A questão envolvia a indicação do número de assíntotas verticais do gráfico da função $\frac{g}{f}$, sendo *g* definida por $g(x) = 2x + 4$, e *f* uma função quadrática com dois zeros, representada graficamente. A Figura 85 apresenta a resolução escrita do aluno.


3. Para saber quais são as assimptotas podemos olhar para o domínio:

$D_g = \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_{\frac{g}{f}} = \{ D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

$D_{\frac{g}{f}} = x \in \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}\}$

$= \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$

As assimptotas são $x = -2$, $x = 2$.

Resposta: (A)

Figura 85 – Resolução da questão 3, escolha múltipla, ficha de avaliação de 28 de fevereiro de 2011.

Na aula, quando a professora comentava alguns erros cometidos pelos alunos, foi possível perceber que o Diogo tinha recorrido à calculadora, mas considerou que não teria feito corretamente a conversão da representação gráfica de *f* na representação algébrica, sendo essa a causa da representação gráfica na calculadora apresentar apenas uma assíntota, acabando por optar pela alternativa referente à existência de duas assíntotas verticais:

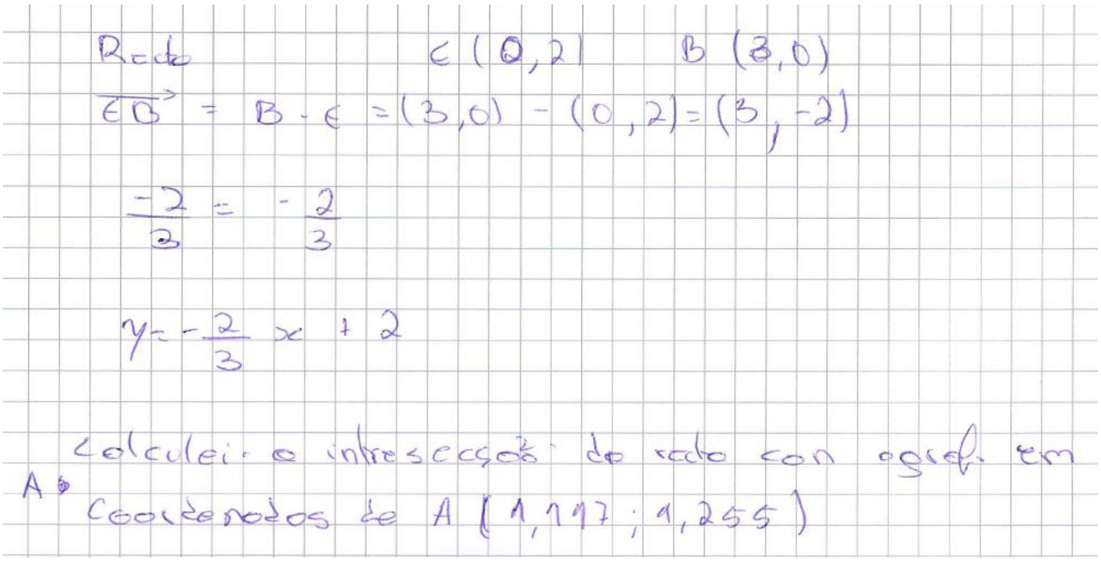
> **Diogo**: Eu até fui verificar à calculadora, e sabia que era só [a reta de equação *x* igual a] 2.
> **Professora**: É que nesse exercício até podiam ter ido à máquina e ver o que é que o gráfico dava. E chegavam à conclusão que só tinha uma assíntota.
> **Diogo**: Mas é que eu vi que só tinha uma assíntota, mas pensei, ok, introduzi mal a expressão, analiticamente … (A11_11)

Este tipo de conceção pode levantar algumas dificuldades ao trabalhar com funções que não lhe são muito familiares, mesmo quando a conversão da representação algébrica na gráfica é feita recorrendo à calculadora gráfica, pois a visualização pode entrar em conflito com a conceção desenvolvida, influenciando o desempenho do aluno.

Conversão da representação gráfica na representação algébrica

A conversão da representação gráfica na representação algébrica foi feita pelo aluno com sucesso em várias situações, nomeadamente, no que diz respeito a funções afins, quadráticas, e racionais cuja representação gráfica é uma hipérbole. Para estas funções o Diogo consegue identificar as propriedades relevantes no registo gráfico e relacionar com as correspondentes características no registo algébrico, ou seja o aluno consegue articular com coerência os dois registos de representação.

Relativamente à função afim podemos ver, por exemplo, que na questão 5, da segunda parte, do teste de julho de 2010 (Anexo 9), o Diogo converteu com sucesso a representação gráfica da função afim na representação algébrica, necessária para poder recorrer à calculadora gráfica como era sugerido. O aluno não chegou a completar a questão, mas determinou corretamente, recorrendo à máquina, as coordenadas do ponto A, correspondente à interseção dos gráficos das duas funções:



Reta C(0,2) B(3,0)

$\overrightarrow{CB} = B - C = (3,0) - (0,2) = (3,-2)$

$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

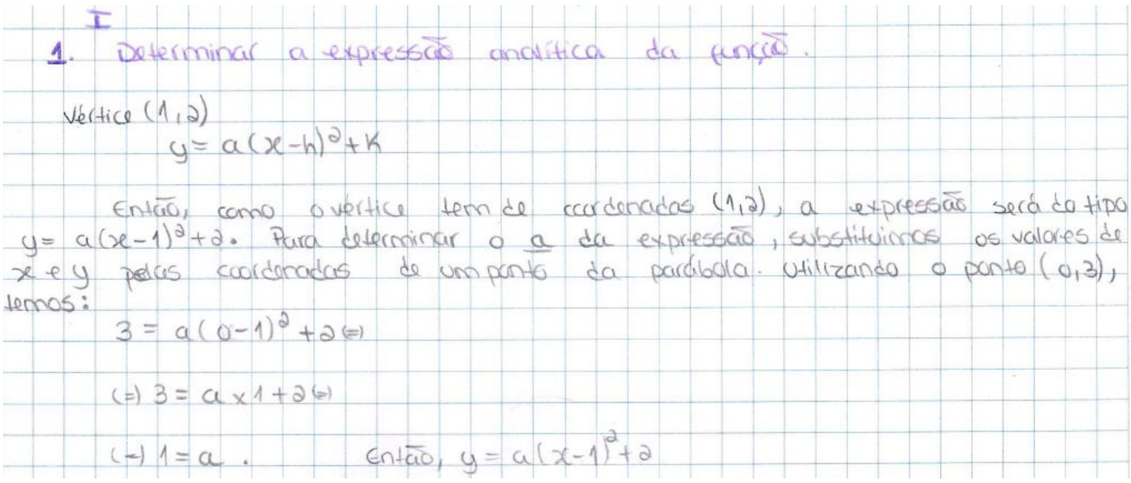
$y = -\frac{2}{3}x + 2$

A: Calculei a intresecção da reta com o gráf. em

Coordenadas de A (1,117 ; 1,255)

Figura 86 – Resolução da questão 5, segunda parte, teste de julho 2010, 10.º ano.

No que diz respeito à conversão da representação gráfica da função quadrática na representação algébrica podemos, por exemplo, ver o trabalho do aluno, em conjunto com o Francisco, relativamente à representação gráfica I presente na ficha de exploração *Relacionando a função quadrática e a função afim* (Anexo 11):



I

1. Determinar a expressão analítica da função.

Vértice (1,2)

$y = a(x-h)^2+k$

Então, como o vértice tem de coordenadas (1,2), a expressão será do tipo $y = a(x-1)^2+2$. Para determinar o a da expressão, substituímos os valores de x e y pelas coordenadas de um ponto da parábola. Utilizando o ponto (0,3), temos:

$3 = a(0-1)^2+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = a \times 1 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = a$. Então, $y = a(x-1)^2+2$

Figura 87 – Conversão da representação gráfica I na algébrica, ficha *Relacionando a função quadrática e a função afim*.

Quanto às funções racionais, cuja representação gráfica é uma hipérbole, podemos ver, por exemplo, como o aluno efetua a conversão da representação gráfica da função *g* na representação algébrica, na questão 1.3 da segunda parte da ficha de 28 de fevereiro de 2011 (Anexo 15). Neste caso, apesar de o tipo de expressão estar identificado no próprio enunciado, o Diogo relaciona corretamente os parâmetros *a* e *c* na expressão algébrica com as equações das assíntotas do gráfico (o aluno alterou *b* para *a* mas o raciocínio está correto):

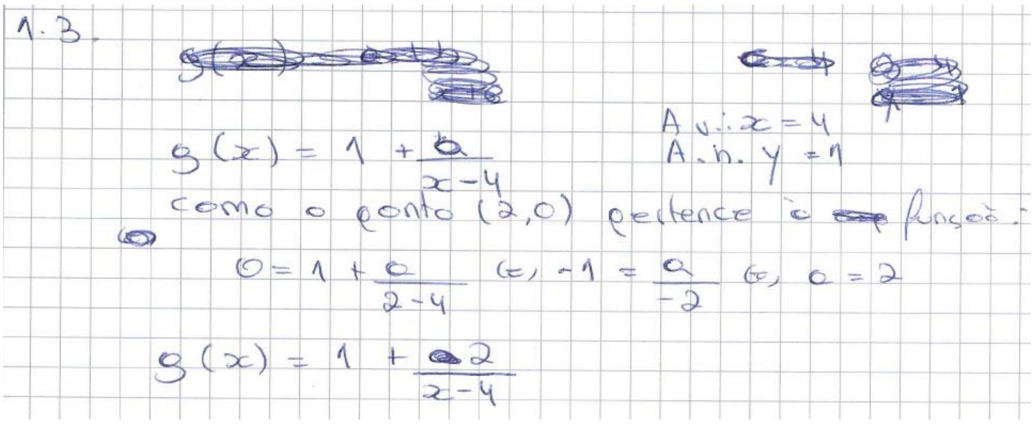


Figura 88 – Resolução da questão 1.3, segunda parte, ficha de 28 de fevereiro 2011.

Os exemplos que acabámos de ver correspondem a situações familiares ao aluno, sendo os procedimentos já instrumentais na sua atividade. A conversão da representação gráfica de uma função cúbica na representação algébrica, no caso de funções com três zeros assinalados na representação gráfica, foi trabalhada na sala de aula, sendo de esperar que os procedimentos fossem também já imediatos, no entanto, na sétima entrevista (Anexo 7), quando o Diogo necessitou da expressão algébrica da função *f* representada graficamente, não se recordou do que era necessário para obter o "azinho", como lhe chamou. Perante a dificuldade surgida, o aluno decidiu recorrer à calculadora de modo a testar se a representação gráfica da sua expressão estaria "muito longe do que deveria ser" (E7). Ao visualizar a representação gráfica o Diogo determinou com a calculadora a imagem de zero e conclui de imediato que era mesmo aquela expressão. Como a investigadora o questionou se tinha a certeza, ele determinou o primeiro zero através do menu *Calc*, confirmando em seguida os restantes zeros na tabela. A calculadora permitiu-lhe assim resolver a questão 1.3, o que não seria possível sem ter a expressão algébrica de *f*. A primeira reação do Diogo foi dizer que não sabia fazer porque não tinha a expressão, acabando depois por focar a sua atenção nos zeros:

> **Diogo**: […] Hum, eu aqui precisava de saber (pausa), ou se calhar não, era bom se eu soubesse (ri), a expressão, do gráfico, *f*, de *x*.
> **Investigadora**: Sim?
> **Diogo**: Mas como não sei (pausa longa, ri), não sei fazer!

> **Investigadora**: (Risos) Então e, não, não podes determinar a expressão?
> **Diogo**: (Pausa bastante longa) Talvez! (Pausa longa) Aquilo que eu sei acerca desta reta é que *b*, é seis.
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: E (pausa), não devo saber mais, nada.
> **Investigadora**: (Pausa bastante longa, risos) E então?
> **Diogo**: (Pausa muito longa) Não sei fazer isso! Não sei fazer!
> **Investigadora**: O quê?
> **Diogo**: Não sei, normalmente eu costumo fazer quando nos dão a expressão da, de *f*.
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: Se não nos derem a expressão de *f* …
> **Investigadora**: E não consegues determinar a expressão?
> **Diogo**: Talvez, a partir dos zeros. (E7)

No entanto, caso não conseguisse decompor o polinómio em fatores, provavelmente não resolveria a questão, pois na sua atividade com funções cúbicas nunca recorreu, por exemplo, a um sistema para determinar os coeficientes do polinómio, ou à regressão cúbica na calculadora. Aliás, esta funcionalidade da calculadora não foi nunca utilizada pelo aluno ao longo da sua atividade com funções.

Em resumo, relativamente à conversão de representações, foi possível perceber uma evolução na conversão da representação verbal na algébrica, notando-se uma maior facilidade em termos da escrita das variáveis em função de uma delas. Esta capacidade é determinante na resolução de problemas, seja a resolução analítica ou gráfica, já que é necessário ter a expressão algébrica da função para poder aceder às funcionalidades gráficas da calculadora.

Em determinadas funções, nomeadamente, afins, quadráticas e racionas cuja representação gráfica é uma hipérbole, o Diogo consegue identificar as propriedades relevantes e a sua relação nos dois registos de representação – algébrico e gráfico, conseguindo efetuar a conversão de um registo para o outro, apesar de, no caso das funções quadráticas, por vezes a conversão não ser imediata. A exploração feita em termos de transformações de funções parece ter tido um papel relevante nesse sentido. Noutro tipo de funções, em que o estabelecimento de conexões entre a representação algébrica e gráfica não foi tão trabalhado, como é o caso das funções cúbicas ou outras funções racionais para além das referidas, o Diogo parece ter desenvolvido algumas conceções erróneas, como por exemplo, a ideia de que a representação gráfica de uma função cúbica envolve sempre mudança de variação, ou que, no caso das funções racionais, os valores para os quais a função não está definida correspondem sempre a assíntotas verticais do gráfico da função.

De qualquer modo, quando o aluno pretende converter a representação algébrica na gráfica recorre, usualmente, à calculadora, mesmo em funções que aparentemente lhe são bastante familiares. Uma vez que o artefacto está à sua disposição, o aluno tem a possibilidade de o usar como instrumento para aceder à representação gráfica, mesmo quando a questão impõe uma resolução analítica. A conversão da representação gráfica na algébrica poderia eventualmente ser feita recorrendo à calculadora, passando pela conversão na representação numérica, mas isso não aconteceu na atividade do aluno no âmbito do trabalho com as funções.

7.5.4. Fluência e flexibilidade representacional

Perante determinada questão o Diogo escolhe a representação que pretende utilizar para resolver a tarefa, mantendo-se, usualmente, nesse registo de representação. Como vimos na secção 7.4.2, no caso de optar pela resolução algébrica, o aluno por vezes recorre à confirmação com a calculadora, mas a mudança de registo é feita no final da resolução algébrica, apenas com o objetivo de confirmação. Esta escolha inicial pode, muitas vezes, ser considerada uma *escolha flexível*, na medida em que o aluno elege a representação de acordo com a tarefa e o à-vontade com a representação escolhida para desempenhar aquela tarefa. Por exemplo, as questões 1.3 e 1.4 da sexta entrevista (Anexo 6) envolvem ambas a resolução de uma equação fracionária, contudo, o Diogo optou por resolvê-las recorrendo a diferentes representações, a primeira analiticamente e a segunda graficamente (resolução da questão 1.3 na secção 7.4.2 e resolução da questão 1.4 na secção 7.4.4). Apesar de semelhantes, a equação relativa à questão 1.4 envolve mais cálculos, havendo, portanto, uma maior probabilidade de serem cometidos erros, o que pode ter pesado na decisão do aluno. Este justificou a sua escolha em termos da maior facilidade da resolução gráfica relativamente à resolução analítica.

O contexto pode condicionar a escolha flexível de uma representação, através da imposição de um método de resolução. Por exemplo, relativamente à inequação $P(x) \leq 4(x-3)$, sendo $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$, presente na questão 4.3 do teste de 4 junho de 2010 (Anexo 9), o aluno teria optado por recorrer à calculadora gráfica para determinar os zeros do polinómio resultante do tratamento algébrico, no entanto, não o fez porque a professora disse no teste que não podiam utilizar a calculadora. Na aula, quando faziam a correção, o Diogo fez referência a essa intenção:

> **Aluno**: *Stora*, neste aqui nós não podíamos usar a calculadora?
> **Professora**: Não! Não, porque eu na altura tinha dito.
> **Diogo**: Pois! Porque eu tinha chegado até aqui [$x^4 - 6x^3 + 9x^2 \leq 0$] e depois risquei, porque eu aqui a única solução que via, era ir à calculadora ver os zeros, dessa …
> **Professora**: Mas, ó Diogo, olha lá bem para o polinómio e vê lá se não conhecem nenhum zero deste polinómio? (A31_10)

A imposição de não utilizar a calculadora levou-o a recorrer à alínea anterior, o que não lhe permitiu resolver a tarefa com sucesso, sendo visíveis algumas dificuldades de ordem algébrica (Figura 89). Neste caso, a visualização da representação gráfica e a determinação de um zero do polinómio poderia contribuir para o aluno pensar numa estratégia de resolução analítica, contudo, parece que a restrição de não usar a calculadora o inibiu de visualizar a representação gráfica da função polinomial resultante.

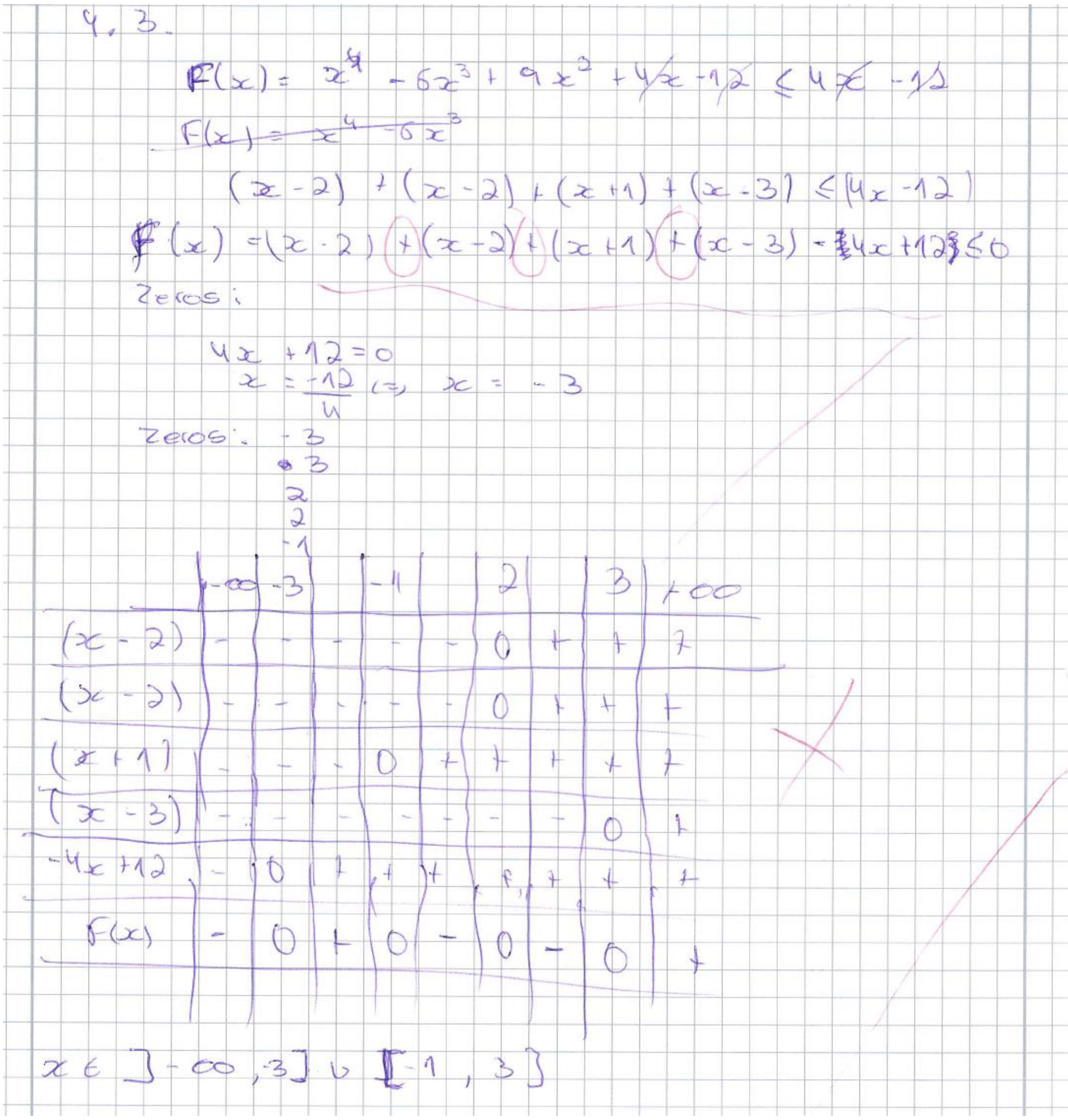
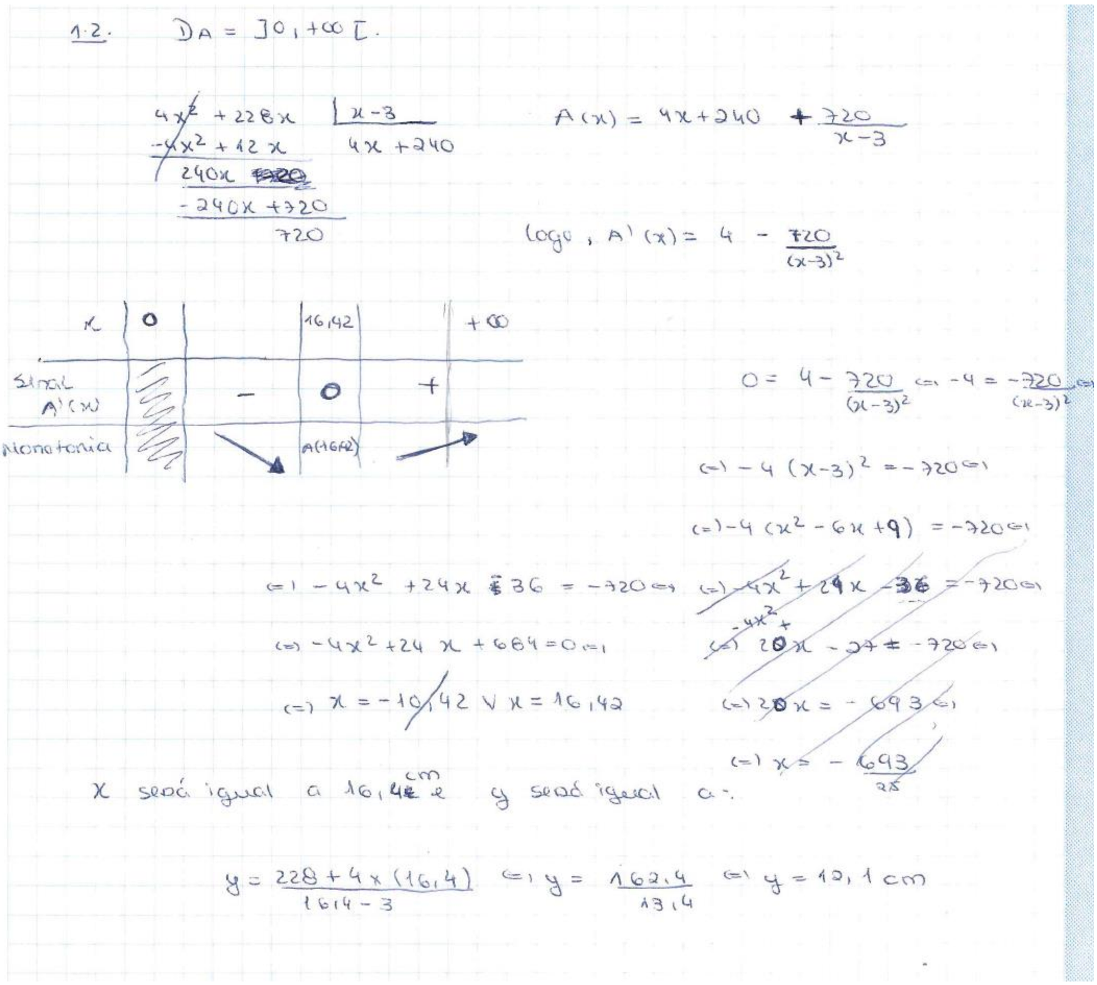


Figura 89 – Resolução da questão 4.3 do teste de 4 de junho de 2010.

Quando não há uma imposição de um método de resolução o contexto pode ainda influenciar a representação escolhida para a resolução de determinada tarefa. Por exemplo, o aluno pode considerar que, perante determinado contexto, seja esperado, ou até valorizado, que utilize determinada representação. É possível perceber isso na resolução da questão 1.2 da ficha *Derivadas* (Anexo 17), em que são pedidas as dimensões da página de modo a que se gaste o mínimo de papel. Esta questão seria resolvida mais rápida e facilmente recorrendo à calculadora gráfica, como o próprio Diogo referiu na sétima entrevista (Anexo 7) relativamente a uma questão semelhante (questão 1.3). No entanto, os alunos optaram por resolver analiticamente (Figura 90), apesar de o enunciado não impor esse tipo de resolução. O facto de nas aulas anteriores terem resolvido problemas de otimização através da função derivada, provavelmente, influenciou os alunos, naquele contexto, a decidirem pela representação algébrica.


1.2. $D_A =]0, +\infty[$.

$A(x) = 4x + 240 + \frac{720}{x-3}$

Logo, $A'(x) = 4 - \frac{720}{(x-3)^2}$

x	0		16,42		$+\infty$
Sinal $A'(x)$		$-$	0	$+$	
Monotonia		↘	A(16,42)	↗	

$0 = 4 - \frac{720}{(x-3)^2} \Leftrightarrow -4 = -\frac{720}{(x-3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4(x-3)^2 = -720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4(x^2 - 6x + 9) = -720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x^2 + 24x - 36 = -720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x^2 + 24x + 684 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -10,42 \vee x = 16,42$

x será igual a 16,4 cm e y será igual a:

$y = \frac{228 + 4 \times (16,4)}{16,4 - 3} \Leftrightarrow y = \frac{162,4}{13,4} \Leftrightarrow y = 12,1$ cm

Figura 90 – Resolução da questão 1.2 da ficha *Derivadas*, pelo par Diogo e Francisco.

Os dados sugerem que, nalgumas situações, particularmente envolvendo funções trigonométricas, a escolha da representação nem sempre foi a mais adequada, talvez por o Diogo não ser muito fluente neste tópico, quer ao nível da representação gráfica, quer ao nível da representação algébrica. Por exemplo, para obter os zeros da função seno, questão 1.1 da quinta entrevista (Anexo 5), o Diogo começou por analisar a representação gráfica na calculadora, mas não conseguiu encontrar uma estratégia que lhe permitisse obter uma expressão geral, mostrando até alguma confusão relativamente a essa terminologia:

Diogo: Então traçamos uma reta que é *y* igual a … (pausa), não!

> **Francisco**: *y* igual a zero.
> **Diogo**: Vê, essa reta já está traçada. Vemos quando é que o … Aquela coisa, está a ver? Intersecta com o eixo do *y* igual a zero.
> **Francisco**: Vamos ver a intersecção das supostas funções.
> **[**…]
> **Diogo**: Uma expressão geral … espera, é o que está a pedir é uma expressão geral, mas eu não sei fazer isso. […] Nas expressões gerais que nós fazemos das outras …, das outras …, pronto, a Stora percebe (risos), nenhum deles … Quando olhamos para lá dizemos: "Ok, os zeros desta função são tal, tal e tal". Normalmente isso está numa tabela, e nós com uma expressão geral não conseguimos logo determiná-los. (E5)

Neste caso, a representação gráfica não foi a mais adequada para o Diogo conseguir realizar a tarefa, acabando por resolvê-la analiticamente, depois de "tomar consciência" que se encontrava perante uma equação trigonométrica:

> **Investigadora**: Isso é uma equação trigonométrica, e vocês sabem resolver equações trigonométricas!
> **Francisco**: Ai isto é …?
> **Diogo**: Sim, isso é uma equação …, e trigonométrica. (Pausa longa) Faz aí a bolinha (faz um gesto circular com a mão)! (E5)

Apesar de ter tido sucesso na resolução algébrica daquela equação, a opção de recorrer a essa representação para determinar os zeros da função $g(x) = f(x-1)$, na questão seguinte, não foi a mais acertada, dadas as dificuldades que sentiu em trabalhar com o argumento da função, sendo a resolução algébrica terminada pelo colega. Além disso, o Diogo tinha visualizado a representação da função *g* na calculadora e identificado a translação associada à representação gráfica da função *f*, pelo que uma resolução baseada na comparação dos efeitos da transformação nos zeros da função *f* seria mais imediata.

A escolha flexível da representação a utilizar perante determinada tarefa é importante pois pode conduzir a uma resolução com sucesso provavelmente de forma mais rápida do que recorrendo a outra representação. Porém, igualmente importante parece ser a capacidade para, em caso de dificuldade, mudar de registo de representação e estabelecer conexões entre representações. Isto é bastante evidente na questão 2.1 da sexta entrevista (Anexo 6), onde, para além das representações relativas às funções envolvidas, o Diogo tem que enfrentar as representações próprias do artefacto, já que o decide integrar na atividade. O aluno optou por estudar o domínio e o contradomínio das funções *f* e *g*, recorrendo à representação gráfica: "Posso fazer como eu quiser, não é *Stora*? Posso ir à calculadora?" (E6), o que, tendo em conta o seu desempenho relativamente ao estudo do domínio e de propriedades das funções a partir da representação gráfica poderia ser considerada uma escolha flexível. No entanto, as funções presentes na questão, apesar de aparentemente familiares, vieram provocar um certo conflito com as imagens mentais que o Diogo desenvolveu para as funções racionais, sendo visível na sua atividade alguma dificuldade em estabelecer conexões entre representações e em compreender determinadas limitações da calculadora gráfica. A representação gráfica obtida na calculadora para a função *f*, definida por $f(x)=\dfrac{8-4x}{2x-4}$, entrou em conflito com a imagem mental esperada: "Mas eu só estou a ver uma linha. E uma, uma expressão deste tipo deveria ser uma, uma hipérbole" (E6). Depois de várias alterações na janela de visualização, o aluno expressou o seu conflito perante a obtenção do domínio numa e noutra representação:

> **Diogo**: Aqui [representação gráfica] o domínio parece que é o conjunto $\mathbb{R}$, porque não tem início e não tem fim, mas aqui [representação algébrica], se eu fizesse de maneira analítica, eu diria que o domínio, é o conjunto $\mathbb{R}$ exceto 2! (E6)

O aluno não compreende porque é a representação gráfica não tem uma assíntota e porque é que, aparentemente, na calculadora a função está definida para *x* igual a 2. Perante a sua confusão, a investigadora sugeriu que confirmasse com a calculadora a existência de imagem para *x* igual a 2, procedimento que o aluno aparentemente desconhecia:

> **Diogo**: Posso calcular! Ah! Com a máquina? […] Está bem. […] Não, não sabia. (Observa o que a máquina devolve) Ah! Pois, realmente, não tem nenhum valor de *y*! Mas este gráfico é uma reta! (Ri) Parece-me uma reta! (E6)

O Diogo poderia ter efetuado o tratamento da expressão algébrica, procedimento que tinha realizado na questão 1.5 dessa entrevista, para tentar esclarecer o conflito que a representação gráfica lhe causou, mas não o fez. A sua resposta em relação ao contradomínio da função é baseada em imagens mentais evocadas pelo tipo de função, sem que tenha atendido à representação gráfica, possivelmente por ainda não estar seguro dela. Inicialmente considera que o contradomínio é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, depois reformula a resposta e diz que é $\mathbb{R}$, justificando: "Eu pensava que todas as funções deste tipo tinham que ter, contradomínio $\mathbb{R}$. Não sei porquê, era uma ideia que eu tinha" (E6). Ao ser confrontado pela investigadora com as funções presentes na questão 1, o Diogo apercebe-se da contradição: "Era $\mathbb{R}$ exceto, pois! Tinha exceto! (Risos) […] O contradomínio era, num $\mathbb{R}$ exceto, quatro, e noutro $\mathbb{R}$ exceto, cinco." (E6). A investigadora questiona-o sobre a informação que retira da representação gráfica relativamente ao contradomínio, e o aluno revela continuar em dúvida relativamente à representação gráfica: "Isto é partindo do princípio que a representação gráfica está bem, não é, *Stora*? […] Parece-me que todos os objetos têm a mesma imagem!". Só depois de verificar se tinha editado corretamente a expressão na calculadora é que o Diogo recorreu à tabela para confirmar a conjetura "todos os objetos têm a mesma imagem" (E6).

Relativamente à função *g*, definida por $g(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1}$, o Diogo volta a frisar a diferença entre a representação gráfica esperada e a representação obtida na calculadora: "Não faz variações daquelas que eu estava a esperar" (E6). Neste caso, considerou que o domínio era $\mathbb{R}$, sem que tenha mostrado conflito entre o domínio aparente da representação gráfica visualizada na calculadora e o domínio da expressão algébrica, como aconteceu no caso da função *f*. Ao ser confrontado pela investigadora com a expressão algébrica o aluno toma, desta vez, a iniciativa de recorrer à representação numérica na calculadora:

> **Investigadora**: E olhando para a expressão da função, *g*? O que é que dirias, se não tivesses feito a representação gráfica?
> **Diogo**: (Pausa bastante longa) Não diria.
> **Investigadora**: Não dirias, nada? Em relação ao domínio?
> **Diogo**: (Pausa longa) Se fosse como esta (anterior) o domínio tinha que ser $\mathbb{R}$, exceto menos um.
> **Investigadora**: Então e qual é a diferença?
> **Diogo**: É o numerador.
> **Investigadora**: E isso interfere alguma coisa com o domínio da função?
> **Diogo**: Pois, talvez não
> **Investigadora**: (Ri) Diz o que vais fazer.
> **Diogo**: (Foi ao menu *Calc*) Vou calcular para o valor *x* igual a menos um. (Risos) Pois! Aconteceu o mesmo que no outro. Haa, também não tem nenhum, nenhum *y*. (E6)

O Diogo reformula a resposta relativamente ao domínio e determina o máximo, recorrendo ao menu *Calc*, para indicar o contradomínio. A opção de recorrer à representação gráfica para determinar o domínio e o contradomínio das funções *f* e *g*, seria, na perspetiva do aluno, uma opção que lhe permitiria resolver facilmente e com sucesso a tarefa. Contudo, viu-se confrontado com conflitos resultantes de alguma incompreensão relativamente ao modo de funcionamento da calculadora e às funções envolvidas que, apesar de aparentemente familiares, tinham características diferentes das com que habitualmente trabalhara. A utilização da calculadora apenas no modo gráfico, sem estabelecer conexões entre representações, não seria um instrumento eficaz.

O desempenho do Diogo na questão 2 da sétima entrevista (Anexo 7), reforça a ideia de que, em determinadas situações, particularmente situações não familiares, a capacidade para estabelecer conexões entre representações e conjugar informação proveniente de várias fontes é essencial para uma resolução com sucesso, em particular quando se integra na atividade um artefacto que também tem capacidades representacionais. Relativamente ao domínio da função *f*, definida por $f(x)=\sqrt{16-x^2}$, o Diogo optou por uma resolução analítica, o que não lhe trouxe dificuldades (Figura 91).

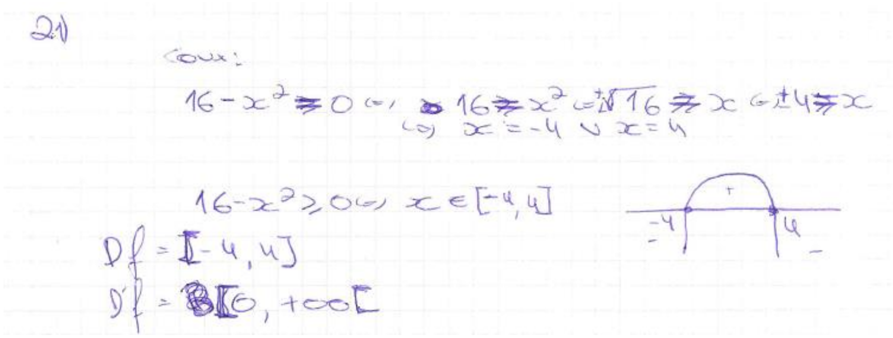


Figura 91 – Resolução da questão 2.1 (E7).

A resposta dada para o contradomínio da função mostra que o aluno de algum modo atendeu à representação algébrica, começando por considerar que seria $\mathbb{R}$: “Porque não há aqui nada que imponha que (pausa), os valores de *x* entre menos quatro e quatro, podem tomar todos os valores, no *y*” (E7). Mais tarde, ao analisar o contradomínio da função *h*, definida por $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ (questão 2.3.1), altera o contradomínio de ambas as funções para o intervalo $\left[0,+\infty\right[$, aparentemente por ter prestado maior atenção à representação algébrica: "O contradomínio devia ser o, o de zero a mais infinito, […] a raiz não vai tomar nenhum valor negativo" (E7).

Para determinar as interseções com os eixos, na questão 2.2, o Diogo optou por recorrer à representação gráfica. Ao visualizar a representação obtida na calculadora seria de esperar que o aluno reformulasse o contradomínio da função, contudo, o que lhe provocou conflito foi o facto de a representação não lhe parecer consistente com o domínio que determinou analiticamente:

> **Diogo**: Pelos vistos eu já me enganei em alguma coisa! (Pausa) Porque, quatro e menos quatro não são (pausa), não pertencem, ao domínio. Certo?
> **Investigadora**: Porquê?
> **Diogo**: Porque na, no ponto quatro e menos quatro, o gráfico não passa nesses pontos.
> Investigadora: Não?
> **Diogo**: Não!
> **Investigadora**: Então?
> **Diogo**: Se calhar passa (Ri) (Vai ao menu Calc)
> **Investigadora**: Não, porque é que dizes isso?
> **Diogo**: Porque parece-me! Tem aqui uma falha. (E7)

A informação recolhida da representação algébrica diz-lhe que 4 e -4 fazem parte do domínio e que as suas imagens são 0, mas a representação gráfica na calculadora parece fornecer uma informação divergente, pelo que o aluno toma a iniciativa de recorrer à representação numérica na calculadora para confirmar:

> **Investigadora**: Então e olhando para a expressão, faz-te sentido o *x* ser quatro, por exemplo, ou não?
> **Diogo**: (Pausa muito, muito longa) Olhando para a expressão ... Haaa, sim, faz sentido o *x* ser quatro! (Pausa) Eu acho que sim.
> **Investigadora**: Se o *x* for quatro?
> **Diogo**: Se tem que ser maior ou igual … Pois, se o *x* for quatro, haaa …
> **Investigadora**: Qual é a imagem?
> **Diogo**: É zero! A imagem é zero.
> **Investigadora**: Hum. (Pausa) E então?
> **Diogo**: Mas na calculadora isso não me parece! (Pausa) Porque tem ali o *x*, suponho que no *x* igual (pega na máquina), a menos quatro (vai ao menu *Calc*), por exemplo, tem ali uma falha! (Calcula a imagem de menos quatro) Quer dizer, diz que está definida, mas no gráfico, aqui diz que é zero, mas no gráfico …

Investigadora: Então e porque será que isso acontece?
Diogo: (Pausa longa) Não sei. (E7)

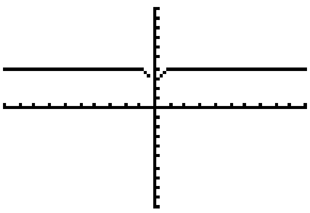
As limitações inerentes à representação gráfica na calculadora não são compreendidas pelo aluno que, para além de não conseguir explicar porque é que não consegue visualizar a interseção com o eixo *Ox* na representação gráfica, demora algum tempo a aceitar a informação proveniente das várias representações, deixando que, por alguns momentos, a representação gráfica visualizada se sobreponha às restantes:

Diogo: Pronto, agora perguntam-nos as coordenadas dos pontos de intersecção, com os eixos, o único ponto de intersecção que eu vejo aqui com os eixos, é o ponto (pega na máquina e vai ao menu *Calc*), deixe-me cá ver … (dá o valor de zero ao *x*)
Investigadora: Com que eixo?
Diogo: Haaa, com o eixo *Oy*, e as coordenadas são zero, quatro.
Investigadora: Portanto o que é que fizeste?
Diogo: Calculei quando o *x* era zero.
Investigadora: Sim.
Diogo: E vi que *y* é quatro.
Investigadora: Hum.
Diogo: Quando o *x* é zero.
Investigadora: E então? Intersecção com o eixo *Ox*?
Diogo: Intersecção com o eixo do *x*, é esta situação, haa, eu pensava que, havia menos quatro e quatro, mas, pelos vistos, não há.
Investigadora: Mas há, ou não há?
Diogo: Quer dizer, se eu calcular, se eu calcular o (vai ao menu *Calc*), *x* igual a quatro, ou *x* igual a menos quatro (calcula para *x* igual a menos quatro), dá, o *y* dá-me zero.
Investigadora: E então?
Diogo: Apesar de a representação gráfica não …, sei lá, não me parecer! Não baixa ali! Não me parece que intersecte aqui com os eixos, mas como não dá não definida em *y* …
Investigadora: Nunca te tinha acontecido? (Pausa) Não?
Diogo: Não!
Investigadora: Mas isso acontece com frequência, depende da janela!
Diogo: Pronto. Mas já que *y* é igual a zero, e não, não definido, tem de intersectar aqui o eixo. (E7)

O Diogo acaba por aceitar que existem dois pontos de interseção com o eixo das abcissas, mas como é possível perceber no extrato acima, a representação gráfica na calculadora provocou-lhe alguma confusão.

A representação escolhida para a determinação do domínio da função *h*, na questão 2.3.1, foi a gráfica, mas o Diogo tentou também obter informação a partir da representação numérica na calculadora. Contudo, a conjugação da informação dessas duas representações não foi suficiente para que o aluno respondesse com sucesso à questão, devido à aparente consistência da informação transmitida pelas duas representações analisadas (Figura 92):

> **Diogo**: Então vou recorrer aqui à tabela (percorre algumas linhas), o domínio será exceto, haaa, exceto zero. […] Introduzi a expressão na calculadora, vi a representação gráfica, vi que para o, para *x* zero não tínhamos nenhum valor de *y*, que não era definida.
> **Investigadora**: Como é que viste isso?
> **Diogo**: Recorrendo aqui à tabela, podemos ver que, todos os valores, de *x* têm uma imagem correspondente, e o valor de zero não tem nenhuma imagem, definida, não está definido.
> **Investigadora**: Hum, em zero não está definido. E como é que sabes que todos os [outros] valores de *x* têm uma imagem?
> **Diogo**: Suponho, porque senão teria, na representação gráfica, teria que haver alguma, falha. (E7)



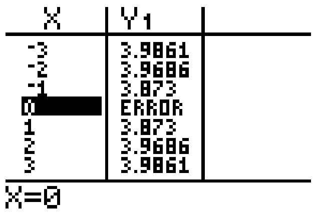


Figura 92 – Representações visualizadas pelo Diogo na calculadora (E7, questão 2.3.1).

É interessante notar que, apesar de o Diogo, em várias ocasiões, ter conseguido analisar o contradomínio de uma função a partir da representação gráfica, neste caso, parece haver uma resistência por parte do aluno em aceitar a informação proveniente dessa representação, o que pode estar relacionado, por um lado, com alguma incompreensão relacionada com o funcionamento da calculadora, e, por outro lado, com determinadas imagens mentais desenvolvidas pelo Diogo relativamente a certas classes de funções e também a determinados conceitos, como por exemplo, o de assíntota horizontal. Inicialmente, o Diogo justifica que o contradomínio de *h* é $\mathbb{R}$, tal como tinha considerado para a função *f*:

Diogo: Porque (pausa longa), para todos os valores que o *x* tomar, pela mesma razão que a outra *Stora*, para todos os valores que o *x* tomar, pode, ser, pode haver todos os valores de *y*, pode …, não sei explicar, mas pronto acho que é assim.
Investigadora: E, e olhando para a representação gráfica?
Diogo: Olhando para a representação gráfica … (pausa).
Investigadora: E recorrendo a outras coisas se quiseres.
Diogo: (Observa a representação gráfica durante um certo tempo, vai à tabela) Pois! Haa (pausa), que isto é, quando o *x* tende para menos infinito, que a função é decrescente, crescente, não parece aqui, mas pelos valores podemos ver que a função (vai percorrendo as linhas da tabela), é crescente.
Investigadora: Hum.
Diogo: Logo …
Investigadora: E está-se a aproximar de alguma coisa? Ou não?
Diogo: Está-se a aproximar …, quando tende para (pausa longa), não, não se está a aproximar de nada.
Investigadora: Não?
Diogo: Quer dizer, a subir, acho eu. Sempre, até, chegar a mais infinito (pausa), do, do *y*.
Investigadora: Parece-te isso pela representação gráfica?
Diogo: Não me parece pela representação gráfica, mas pelos valores, se está sempre a subir …
Investigadora: Então quais são os valores, que te estão a dar no *y*?
Diogo: No *y* inicialmente dava-me três, vírgula, nove, nove, nove, seis, depois, três, vírgula, nove, nove, nove, sete … mas agora, está-me a dar quatro, mas …, para no quatro. Não me dão valores acima de quatro, logo isso contradiz um bocado o que eu acabei de dizer (risos)
Investigadora: Então?
Diogo: Então, tendem para, quatro (aponta o quatro na tabela), mas, não deveriam de ser quatro. Se, por exemplo, nas assíntotas, tendem também para o valor da assíntota mas nunca são esse valor. Então não estou a perceber porque, é que vai dar quatro. (E7)

O Diogo parece não aceitar que a função *h* tenha uma assíntota horizontal de equação $y = 4$, porque a calculadora devolve a imagem *quatro* para determinados valores de *x*, o que vai contra a sua conceção de assíntota horizontal. Essa conceção é transmitida explicitamente pelo aluno na oitava entrevista ao ser questionado sobre a sua ideia de assíntota horizontal:

Diogo: Não ter nenhum valor (pausa), naquele (pausa longa), naquele valor, de y! Não haver, quer dizer, não sei explicar. […] A assíntota horizontal é quando, haaa, do domínio, todo o domínio, se nós considerarmos todo o domínio, nenhum objeto

> desse domínio, vai conter, esse ponto, não vai, não vai ter essa imagem. (E8)

Para tentar resolver o conflito o Diogo sugere verificar analiticamente a existência de assíntota horizontal, mas não possui fluência em termos da representação algébrica, naquele tipo de função, acabando por desistir. Porém, ao dar mais atenção à representação algébrica, como foi referido anteriormente, percebe que o contradomínio não pode ser $\mathbb{R}$:

> **Diogo**: […] Também se podia fazer de uma forma analítica, se isto tiver alguma assíntota substitui-se na expressão (pausa), não sei, não sei muito bem. Ah! Já sei outra coisa que eu tenho mal. Que é, o contradomínio não devia ser o conjunto $\mathbb{R}$.
> **Investigadora**: Hum. E então?
> **Diogo**: O contradomínio devia ser o, o de zero a mais infinito.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Diogo**: Porque, nenhum valor, a raiz não vai tomar nenhum valor negativo. (E7)

No que diz respeito às interseções do gráfico de *h* com os eixos coordenados (questão 2.3.2), o Diogo conseguiu concluir, pela análise da representação numérica, que não existe interseção com o eixo das ordenadas. Relativamente à interseção com o eixo *Ox* o aluno teve algumas dificuldades, alterando a janela de visualização sem conseguir perceber as interseções com esse eixo, acabando por concluir que não existiriam. No entanto, como continuava com dúvidas, a investigadora questionou-o se conseguia retirar alguma informação da representação algébrica. O aluno optou, então, por determinar analiticamente os zeros, e, mais uma vez, a informação proveniente das várias representações provocou-lhe um certo conflito:

> **Diogo**: Isto é um bocado, assim um bocado contraditório! […] Porque tenho valores para *x*, para quando o *y* é zero. Parece-me muito mal!
> **Investigadora**: O que é que te parece mal (risos)? O teu cálculo ou …
> **Diogo**: Pois, parece-me mal o meu cálculo! (Pausa) Não!
> **Investigadora:** Ou a representação gráfica?
> **Diogo**: (Suspira) Não sei bem! Porque supostamente a partir do meu cálculo, isto devia ter … […] Mas não tem. (E7)

Na tentativa de compreender a situação, procurou estabelecer conexão com a representação numérica, dessa vez indo à tabela já com um objetivo definido, compreendendo, portanto, que tinha que alterar o “acréscimo” dos valores de *x*, e apesar de ter exclamado “ela concorda comigo, mas então não percebo a representação gráfica” (E7), acabou por perceber que alterando a janela de visualização poderia obter mais informação sobre essa representação:

> **Diogo**: Já sei, vou tentar uma coisa (vai à janela), menos zero ponto cinco …
> **Investigadora**: Tentar o quê?
> **Diogo**: Tentar reduzir para ver ali naquele espacinho!
> **Investigadora**: Hum!
> **Diogo**: Onde eu não vejo bem.
> **Investigadora**: Pois.
> **Diogo**: (Coloca o x entre menos zero ponto cinco e zero ponto cinco e visualiza) Pois! (Observa) Pois, sendo assim há uma intersecção com o eixo *Ox*. (E7)

Nesta questão o aluno acabou por conseguir relacionar de forma mais eficaz a informação proveniente das várias representações (Figura 93). O facto de ter determinado analiticamente os zeros contribuiu para isso, pois ficou com informação relevante para poder utilizar a representação numérica de forma mais segura e encontrar uma estratégia para compreender melhor a representação gráfica na CG.

2.3.2) $0=\sqrt{16-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow 0=16-\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 16=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{16} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4} \vee x=\frac{1}{4}$

X	Y1
0	ERROR
.25	0
.5	3.4641
.75	3.7712
1	3.873
1.25	3.9192
1.5	3.9441

X=.25

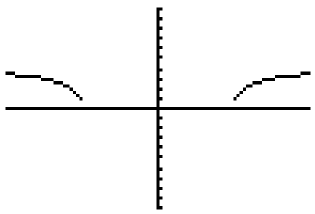


Figura 93 – Representações visualizadas pelo Diogo (E7, questão 2.3.2).

As respostas dadas pelo Diogo a algumas alíneas das questões 2 da sexta e sétima entrevistas revelaram uma certa rigidez do conceito imagem desenvolvido para determinadas classes de funções e um processo de génese instrumental relativamente baixo, com o aluno a não conseguir compreender e explicar certas representações gráficas na calculadora e mostrando pouca flexibilidade em estabelecer conexões entre representações, recorrendo quer ao artefacto, quer ao lápis e papel. Contudo, foi possível perceber alguma evolução por parte do aluno na tentativa de conjugar informação proveniente de várias representações, utilizando o artefacto de modo mais eficiente na questão 2.3.2 da sétima entrevista. Parece que o aluno começou a tomar consciência que tinha que "focar a lente" na zona da representação gráfica que pretendia analisar, através de alterações na janela de visualização, ou, estando em causa a representação numérica, que tinha de utilizar a tabela de forma dinâmica, alterando o acréscimo dos valores de x, e não de modo estático, deixando o acréscimo que "sempre lá esteve". O facto de ter determinado analiticamente os zeros também lhe forneceu informação importante para poder utilizar a calculadora gráfica de forma mais eficiente, quer ao nível da "descodificação" da representação gráfica, quer ao nível da representação numérica.

Em resumo, o Diogo mostrou em diversas situações a capacidade para efetuar uma escolha flexível da representação a utilizar, usualmente algébrica ou gráfica, para resolver determinada tarefa, tendo em conta tanto o tipo da tarefa, como o seu à-vontade com a representação escolhida. Contudo, esta escolha pressupõe familiaridade com o tipo de questão e, por vezes, com as próprias funções envolvidas. Nas funções trigonométricas foi possível perceber uma maior dificuldade por parte do aluno em termos da escolha mais adequada para resolver uma dada tarefa, o que estará, por certo, relacionado com a pouca fluência em termos tanto da representação algébrica, como da gráfica, relativamente a estas funções, pelo menos na altura em que o aluno se debruçou sobre as tarefas. Como Nistal *et al.* (2012) referem, é irrelevante falar em escolha flexível se o aluno não é fluente em nenhuma das representações disponíveis. No entanto, por vezes, perante dificuldades, a mudança de registo de representação pode ser suficiente para uma resolução com sucesso, como vimos, por exemplo, na secção 7.4.3, quando o aluno, estando em dificuldades perante a resolução algébrica da equação trigonométrica numa escolha múltipla, optou por recorrer à calculadora, conseguindo identificar o número de soluções da equação no intervalo indicado.

Existem situações em que, devido às funções envolvidas e às imagens mentais desenvolvidas para determinadas classes de funções, uma resolução com sucesso passa pela conjugação da informação proveniente de várias representações, particularmente quando o aluno integra a calculadora gráfica na atividade e não consegue compreender determinadas limitações do artefacto.

Capítulo 8

Estudo de caso Francisco

8.1. Apresentação

O Francisco é um aluno bem-disposto, mostra um grande sentido de responsabilidade, e, por norma, está atento na aula, participando frequentemente mesmo sem ser solicitado. Iniciou o 10.º ano com quinze anos e, ao longo do seu percurso escolar, tem sido um bom aluno, obtendo bons resultados em todas as disciplinas. Considera que a Matemática é uma disciplina importante para todas as áreas, mas também uma das mais difíceis, deixando transparecer uma visão um tanto mecanicista da mesma:

> **Francisco**: […] Acho que [a Matemática] é uma disciplina (pausa), é das disciplinas mais difíceis (acentuando), eu penso que sim, acho que tem que se ter muito trabalho, principalmente em casa, para se conseguir ter boas notas, porque temos que fazer muitos exercícios para que quando chegarmos ao teste não apareça lá nenhum exercício que se calhar (pausa), nunca vimos, ou assim. (E1)

O tópico das probabilidades foi para o Francisco o mais acessível do Ensino Básico, pois, segundo o aluno, não é preciso um nível de raciocínio muito elevado. Considera que o tópico das equações talvez seja dos mais complicados, no entanto, salienta que não sentiu dificuldade em nenhum dos temas nesse nível de ensino:

> **Francisco**: Hum, porque acho que [no caso das probabilidades] não é preciso assim um raciocínio tão grande para conseguir compreender e acho que os exercícios dentro da matéria eram assim (pausa), acho que não (pausa), não se consegue complicar muito, penso eu, e então (pausa), conseguia fazer os exercícios todos com facilidade.

> **Investigadora**: Quais foram as principais dificuldades que sentiste nos outros anos, em relação à Matemática?
> **Francisco**: Por acaso não tenho tido assim muitas, muitas dificuldades.
> **Investigadora**: Eu há bocadinho perguntei qual era a matéria mais fácil, qual é a mais difícil, digamos?
> **Francisco**: Hum (pausa longa), talvez as equações, mas mesmo assim não, não achei assim grande dificuldade. (E1)

O décimo ano revelou-se um pouco mais exigente. Para o aluno a primeira parte da geometria é mais complicada do que a geometria analítica, no entanto, por altura da primeira entrevista também ainda não compreendia muito bem o tópico dos vetores:

> **Francisco**: […] No 10.º ano é que estranhei um bocadinho ao início, mas (pausa), agora já consegui adequar-me. […] Este ano (pausa), acho que [a matéria mais difícil] foi a, esta matéria mesmo dos vetores, eu pessoalmente não gosto muito dessa matéria, e não entendo muito bem, mas (pausa), de resto até acho acessível. A primeira matéria é mais, é um bocadinho mais difícil mas (pausa), é preciso perdermos mais tempo com os problemas e assim, mas penso que também é acessível. […] Os vetores é assim mais ou menos, mas (pausa), também é estudar e assim, acho que se consegue. (E1)

O Francisco adquiriu a sua calculadora gráfica, da marca TEXAS, modelo TI-84 *Plus*, no segundo período do décimo ano, não tendo trabalhado com nenhuma anteriormente, além da utilização de operações básicas: “Só mesmo as funções básicas, mesmo. […] Somar, multiplicar …” (E1). Na segunda entrevista o aluno deixa transparecer que, para além do que é proposto pela professora, não tem explorado a máquina em casa: “Quer dizer, para resolver os trabalhos de casa, sim. Tenho feito o que se pede, mas tirando isso não” (E2). No entanto, considera que a calculadora gráfica ajuda a visualizar e, em caso de dificuldades, permite obter mais informação acerca do problema em questão: “Ajuda-nos a visualizar, mesmo quando nós não temos a certeza de como se faz analiticamente, ou pelo menos, quando, quando temos uma ideia geral do problema primeiro, quando não estamos a conseguir chegar à resposta, conseguimos, assim, observar” (E2). Na última entrevista o Francisco refere que usa mais métodos analíticos, porque é isso que habitualmente é pedido, mas considera que a calculadora gráfica lhe permitiu compreender melhor as funções: “Sim, eu acho que sim, acho mesmo. E mesmo ao nível das funções trigonométricas, é que, eu pelo menos não imaginava que mesmo na calculadora ia sempre aparecer os *círculos* perfeitinhos” (E8).

O balanço feito pelo aluno no final do segundo ano do ensino secundário, relativamente ao seu desempenho na disciplina de Matemática, é positivo, revelando que no décimo primeiro ano gostou mais da disciplina: “Eu este ano gostei muito mais da Matemática, tanto que comecei a ter melhores notas, subi três valores, que no ano passado, e acho que correu bem, acho mesmo que correu muito bem” (E8). O Francisco terminou o décimo ano com a classificação de dezasseis valores e o décimo primeiro com dezanove valores.

8.2. Conceito de função no final do ensino básico

A caracterização do conceito de função no final do ensino básico foi feita tendo por base as respostas dadas pelo aluno na primeira entrevista clínica (Anexo 1).

Perante a primeira representação gráfica o Francisco evoca uma proporcionalidade direta, parecendo atender apenas aos extremos dos segmentos. Na altura, apesar de se referir a uma reta, o aluno menciona tanto os “pontos pretos”, como os “pontos brancos”:

> **Francisco**: Penso que a primeira representa uma função. Porque (pausa), ao observarmos o gráfico conseguimos ver uma certa, uma certa proporcionalidade. Hamm (pausa longa).
> **Investigadora**: Proporcionalidade?
> **Francisco**: Hamm, como é que eu hei de explicar? (risos) Hamm, pronto, há proporcionalidade ou seja, há (pausa), há uma reta que passa por todos os pontos do, marcados, tendo em conta que, pronto, se fossem os pretos, os pontinhos pretos ou os (pausa) pontos brancos. (E1)

O conceito definição é recordado ao analisar a segunda representação gráfica. O Francisco justifica que não representa uma função pois, considerando a escala igual a uma unidade, por exemplo, o valor de x igual a 1 estaria associado a dois valores de y:

> **Francisco**: Hamm, no dois (pausa longa), eu penso que não há proporcionalidade direta, penso eu, porque por exemplo para dois pontos do x temos dois valores de, de y.
> **Investigadora**: Dois pontos do x como? Por exemplo?

> **Francisco**: (Assinala na representação gráfica) Haaa, por exemplo, se aqui temos 1, um valor de *x* corresponde a dois valores de *y* (aponta para a representação gráfica, assinalando um dos valores de *y* e indicando o outro gestualmente). Penso que não há, que não constitui uma função. (E1)

A representação gráfica correspondente à reta horizontal é identificada de imediato pelo Francisco como sendo de uma função, sem que lhe surjam dúvidas relativamente ao facto de a imagem ser a mesma para diferentes valores de *x*, o que indica que uma função constante faz parte do seu conceito imagem de função:

> **Francisco**: Aqui consigo ver, pronto, que há, existe.
> **Investigadora**: Que é uma função?
> **Francisco**: Exato.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque (pausa longa), porque o, porque é uma constante, penso eu, quer dizer, não é constante.
> **Investigadora**: O que é que é constante?
> **Francisco**: O valor de *y* para cada valor de *x*.
> **Investigadora**: E então?
> **Francisco**: Hamm (pausa longa), e então (pausa longa), penso que é uma função. (E1)

Em relação às restantes representações o aluno mostrou algumas dúvidas, já que estas não lhe evocam imagens familiares. Por exemplo, relativamente à representação gráfica iii) refere: "Penso que também não constitui uma função, mas não sei. […] Não estou habituado a ver assim o gráfico, mas …" (E1). Embora com algumas dúvidas, acabou por concluir que representa uma função, baseando a justificação no conceito definição:

> **Francisco**: Por exemplo, para cada valor de *x* (pausa).
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Passa um valor de y.
> **Investigadora**: E então?
> **Francisco**: Então é uma função. Hamm, depois (pausa longa), eu não sei se estou a dizer … (risos) (E1)

No entanto, foi possível perceber que o conceito definição também não se encontra claro para o aluno, uma vez que a justificação do Francisco para não considerar a última representação gráfica como sendo de uma função, baseia-se no facto de existirem valores diferentes de *x* para o mesmo valor de *y*:

Francisco: A última (pausa), hamm, (pausa longa), eu penso, não porque, por exemplo, temos aqui valores de *y* idênticos, ou iguais, se fizéssemos uma reta (gesto na horizontal)
Investigadora: Sim, sim, podes escrever, sim.
Francisco: (Faz o esboço de uma reta horizontal) Uma reta que passasse, nos dois, estes dois pontos tinham o mesmo valor de, dois pontos com o mesmo valor de *y*, enquanto que o *x* (pausa), não deixe-me pensar.
Investigadora: Sim.
Francisco: Enquanto que o *x* era diferente. (E1)

Ao ser confrontado com a reta horizontal, o Francisco exclama: "Pois, realmente (pausa), pois também acontecia o mesmo" (E1). Assim, volta a usar o conceito definição que tinha utilizado até ali: "Então se calhar é mesmo, a cada valor (pausa), para cada valor de *x* não podem é haver dois valores de *y*" (E1). No entanto, mais tarde, ao analisar as representações algébricas presentes na questão 2, o aluno menciona não ter a certeza se a definição impõe apenas essa condição: "Não sei é se esse argumento também (pausa), é suficiente para determinar, se é ou não uma função" (E1). Quando questionado sobre a ideia que possui de função, o aluno não recorre ao conceito definição, mencionando antes uma relação de proporcionalidade entre as variáveis, expressando-se através da representação algébrica:

É quando conseguimos ver alguma proporcionalidade, ou pelo menos quando conseguimos definir uma (pausa), conseguimos definir, não, não é uma semelhança, mas por exemplo conseguimos definir (pausa), o que está aqui, por exemplo *y* igual (pausa) a *2x* ou algo do género (E1)

Depois de o aluno ter analisado todas as representações gráficas, a investigadora questionou-o se continuaria a considerar a primeira representação como uma função no caso de as "bolas brancas" estarem representadas a cheio. O Francisco não identifica de imediato a diferença, contudo, após algum tempo reformula a resposta:

Francisco: Eu penso que se existe sem, também tem que existir com. […] Ou então estou …, Hamm, posso (pausa) reformular? Eu acho que, agora que eu estou a ver, para cada, por exemplo, para cada valor de *x*, consigo ver mais do que um valor de *y*. […] Ou aqui, pronto, conseguimos ver que, ham, se nos orientarmos conseguimos ver que este ponto corresponde a mais do que um valor de *y*. Por exemplo, aqui é um determinado valor e depois passa por aqui e por aqui (apontando), digo eu. (E1)

Relativamente à representação algébrica, o Francisco parece identificar algumas relações do tipo $y = kx + b$, k e b constantes e $y = \frac{k}{x}$, k constante, já que reconhece de imediato as relações $x = y$ e $xy = 3$ como sendo funções. A relação $x = y$ é identificada com uma relação de proporcionalidade direta, e, desta vez, associada a uma reta que passa na origem do referencial:

> **Francisco**: Penso que sim que é uma função.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: E até penso que é de proporcionalidade direta. Porque a um valor, a um valor de *x* corresponde a, a um valor, ao valor igual na, no eixo das ordenadas, do *y*.
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: Se convertêssemos isto num gráfico, e se déssemos valores, veríamos que era uma função com proporcionalidade direta.
> **Investigadora**: Ou seja, isso corresponde a quê no gráfico?
> **Francisco**: Hamm, a uma reta.
> **Investigadora**: E pode ser uma reta qualquer?
> **Francisco**: Não, não, uma reta que passe na origem do referencial. (E1)

A relação $xy = 3$, que o aluno escreveu como $y = \frac{3}{x}$, parece evocar-lhe uma função de proporcionalidade inversa, contudo, o aluno não tem a certeza:

> **Francisco**: […] Porque, para um valor, conseguimos, por exemplo, se tivermos o valor de (pausa), de *y* conseguimos com esta expressão determinar o *x*, porque temos uma, uma expressão, no fundo é uma expressão, que nos permite também, hamm, determinar (pausa), outros pontos de, que poderiam pertencer ao gráfico.
> **Investigadora**: Hum, hum.
> **Francisco**: Haaa, logo há uma (pausa), uma relação entre o *x* e o *y*, uma relação direta entre o *y* e o *x*.
> **Investigadora**: Direta? Nesse caso quer dizer que é uma proporcionalidade direta?
> **Francisco**: Não, não neste caso não é.
> **Investigadora**: E existiria algum tipo de proporcionalidade?
> **Francisco**: (Pausa) Haaa, eu também já não me lembro como é que era a proporcionalidade inversa mas, não me lembro qual é que era … (E1)

Perante a relação $x^2 + y^2 = 9$, o Francisco começa por salientar: "Não estou habituado a trabalhar com, com números ao quadrado nas, nas funções, mas …" (E1), optando por tentar simplificar a equação que, inicialmente, tinha deixado em ordem a *y* ao quadrado. Ao efetuar o tratamento, para além de não considerar as duas soluções, cometeu um erro grave (Figura 94), aparentemente sem ter a noção disso, mostrando dúvidas acerca da possibilidade de simplificar a expressão no caso de estar perante uma função e não propriamente à simplificação em si:

> **Francisco**: Não sei se poderia fazer isto. (Pausa longa) Mas não, poderia fazer isto ou não? (Risos) Poderia simplificar, não sei?
> **Investigadora**: O que é que achas?
> **Francisco**: (Pausa longa) Não sei é se em funções dá, se fosse numa, para resolver uma, …
> **Investigadora**: Uma equação?
> **Francisco**: Exato. (E1)

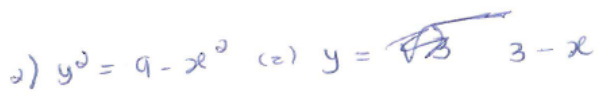


Figura 94 – Tratamento da expressão $x^2 + y^2 = 9$.

É possível perceber que nem todas as relações do tipo $y = kx + b$ são reconhecidas, de imediato, como funções pelo Francisco, pois, após tratamento das relações $x^2 + y^2 = 9$ e $2x - 3y = 4$, obtém duas expressões desse tipo: $y = 3 - x$ e $y = \frac{4 - 2x}{-3}$, respetivamente, considerando a primeira uma função, mas tendo dúvidas relativamente à segunda: "Ai, é complicado, eu acho. […] Não sei. Sim, talvez seja (pausa), mas para isso todas eram!" (E1). Como o aluno estava com dúvidas, a investigadora questionou-o relativamente ao argumento que tinha usado para analisar as representações gráficas na questão 1. Este deixa transparecer que continua confuso relativamente à definição, já que relativamente à expressão $y^2 = x$ refere: "Neste caso sim (pausa), penso, sim, porque para cada valor de *y*, também teremos apenas só um valor de *x* (pausa), penso eu" (E1).

O Francisco considera que a relação $2x+3=0$ não representa uma função, por não ter a variável *y*, expressando a ideia de que a relação tem que incluir explicitamente as duas variáveis:

> **Investigadora**: Têm que estar sempre os dois?
> **Francisco**: (pausa) Penso que sim (pausa), mas, sim todas as funções têm que ter, se é função tem que ter para cada valor de *y* um *x*, logo na função também tem que estar representado, um determinado valor de *y*, para um determinado valor de *x*. (E1)

Em resumo, relativamente à representação gráfica e algébrica, o conceito imagem de função do Francisco inclui as funções que estudou no ensino básico, nomeadamente do tipo $y=kx+b$ e $y=\frac{k}{x}$, embora, o modo como a expressão se encontra escrita possa condicionar o seu reconhecimento. O conceito definição foi evocado pelo aluno, no entanto, foi possível perceber que não estava seguro da definição, o que condicionou a sua aplicação de forma coerente.

O preenchimento da tabela na questão 4 provocou-lhe inicialmente alguma confusão, pois não estava a interpretar corretamente o significado da variável correspondente ao Lucro Total: “Aqui temos proporcionalidade inversa, mas não estou a perceber aqui o lucro total em *blu-rays*, haa, em termos de …, aqui, não estou mesmo a perceber, porque parece que a tabela está completa” (E1). Após compreender o papel das variáveis, o aluno não teve dificuldade em utilizar a representação numérica. Contudo, mesmo depois de preencher a tabela, o Francisco parece ter a convicção de que existe uma relação de proporcionalidade inversa entre as variáveis lucro por *blu-ray* e número de aparelhos vendidos, dado que, ao tentar encontrar uma expressão que relacione as duas o aluno refere: “[…] Por cada dez, também decrescem dez. […] Tem que ser uma coisa a dividir, penso” (E1), e, mais tarde, ao representar graficamente a relação entre as duas variáveis, não tendo a escala correta, representa uma curva semelhante a um ramo de hipérbole: “Provavelmente iria ser assim” (E1), ficando surpreendido quando a investigadora lhe disse que os pontos deveriam estar sobre uma linha reta (Figura 95).

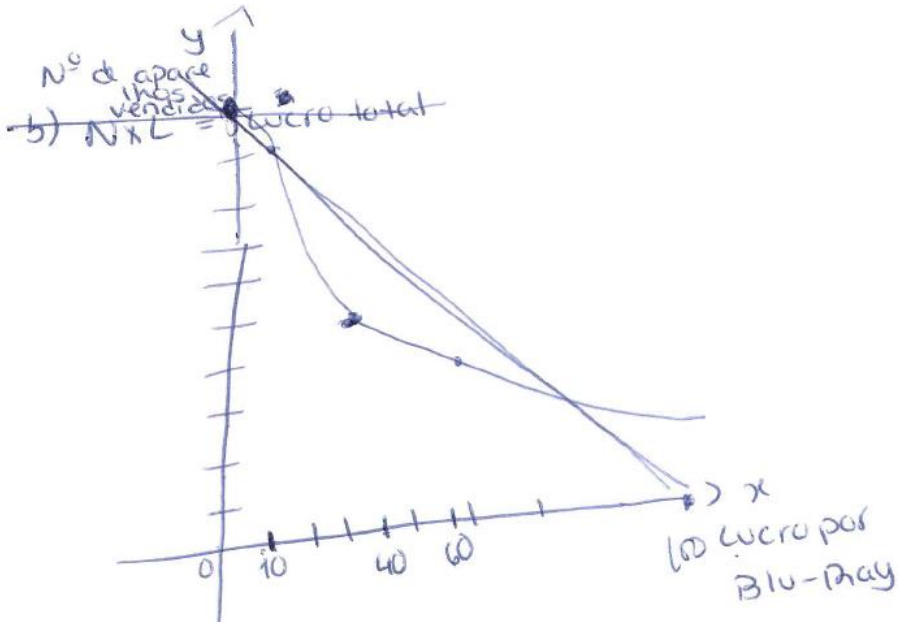


Figura 95 – Representação gráfica da relação entre as variáveis lucro por *blu-ray* e número de aparelhos vendidos.

O Francisco não parece ter desenvolvido a noção de que uma função de proporcionalidade inversa não está definida para zero, já que não estranhou o facto de a tabela incluir o objeto zero. Aliás, a noção da impossibilidade de dividir por zero não foi desenvolvida, pois ao ser questionado se era necessário impor alguma condição à variável *x*, na relação $y = \frac{3}{x}$, o aluno não compreendeu a questão, e quando a investigadora concretizou perguntando o valor de *y* para *x* igual a zero respondeu: "Dá zero" (E1).

Relativamente à interpretação do valor para o qual o lucro total seria maior, o Francisco começou por considerar apenas os valores presentes na tabela, mas logo considerou a hipótese de o lucro ser máximo num valor não apresentado:

> **Francisco**: Então são estes, é nesta (pausa), penso que é aqui, porque ele no total tem mais lucro (o aluno refere-se ao 40 e ao 60), logo vai ser …
> **Investigadora**: E achas que só com esses valores consegues?
> **Francisco**: (Pausa longa) Mas, ele tem uma possibilidade que o faz vender mais.
> **Investigadora**: Que é quanto?
> **Francisco**: Se ele meter a cinquenta, fica cinquenta, cinquenta, cinquenta.
> **Investigadora**: E achas que é aí que vai ser, que é o lucro maior?

> **Francisco**: Sim, porque cinquenta vezes cinquenta ficava com dois mil e quinhentos no final, ficava com mais.
> **Investigadora**: Hum, hum. E como é que, como é que lá chegaste?
> **Francisco**: Vi que, vi os dois, como têm o mesmo, pronto como têm o mesmo, vi que apenas se trocavam os números e entre, se estes os dois são os que têm, digamos o maior lucro, o número médio entre, compreendido entre este e este (apontando) seria o que teria mais lucro. Pelo menos que tivesse tanto como eles. (E1)

Perante a questão de conversão da representação numérica na algébrica (questão 4.3), o Francisco mostrou alguma dificuldade em identificar a variável independente e a dependente:

> **Francisco**: Não estou aqui a conseguir captar qual é a variável dependente e a independente.
> **Investigadora**: Portanto, o que é que pedem? Portanto, L é o lucro por cada.
> **Francisco**: Sim.
> **Investigadora**: Pronto. E queres uma expressão que relacione o número de aparelhos vendidos em função do L.
> **Francisco**: Uma expressão …
> **Investigadora**: O número de aparelhos vendidos em função do L. Portanto a variável independente será qual?
> **Francisco**: (Pausa) Haa, o L, a independente. (E1)

Após identificar as variáveis, o Francisco começou por analisar a relação entre elas: “Sendo *L* o lucro … (pausa longa). Uma expressão, então tem que ser *N* igual a qualquer coisa … (pausa longa). *N* vezes *L* é que dá o lucro, pois, dá o lucro total” (E1), no entanto, não conseguiu concretizar a conversão. Perante a sua dificuldade em estabelecer uma relação entre o número de aparelhos vendidos com o lucro por *blu-ray*, a investigadora sugeriu que fizesse primeiro a conversão na representação gráfica. Depois de saber que a representação gráfica era uma semirreta, o aluno identificou a expressão geral $y = mx + b$, e a ordenada na origem, sendo possível perceber que reconhece o sinal do declive: “É complicado porque eu estou habituado a trabalhar com números positivos. Mas eu vou fazer como se fossem …Posso fazer por exemplo como se fosse, como se a reta fosse com declive positivo. Se calhar para mim era mais fácil” (E1). Contudo, não o conseguiu determinar, não concluindo a conversão: “Então o declive da reta (pausa longa), pois é … […] Então o vetor da reta, pode ser o vetor (pausa), é arranjar aqui um vetor, não é? Ou não? (Pausa) Pode ser o vetor … (pausa longa). Ok, não estou a ver (ri)” (E1). A conversão de representações parece ser uma tarefa difícil para o aluno, não surgindo naturalmente no trabalho desenvolvido ao longo da entrevista, exceto no caso em que este estava a analisar a relação $x = y$, referindo-se ao facto de representar uma reta que passa na origem do referencial.

O Francisco consegue interpretar a notação própria das funções, identificar o contradomínio de uma função representada graficamente e resolver condições simples a partir da representação gráfica, como é possível perceber pelo seu desempenho relativo a algumas alíneas da questão 3. Na Figura 96 estão as respostas finais dadas pelo aluno nesta questão, embora relativamente à notação $f(f(0))$ e à condição $f(x)+1=0$ a resposta final tenha resultado de discussão com a investigadora.

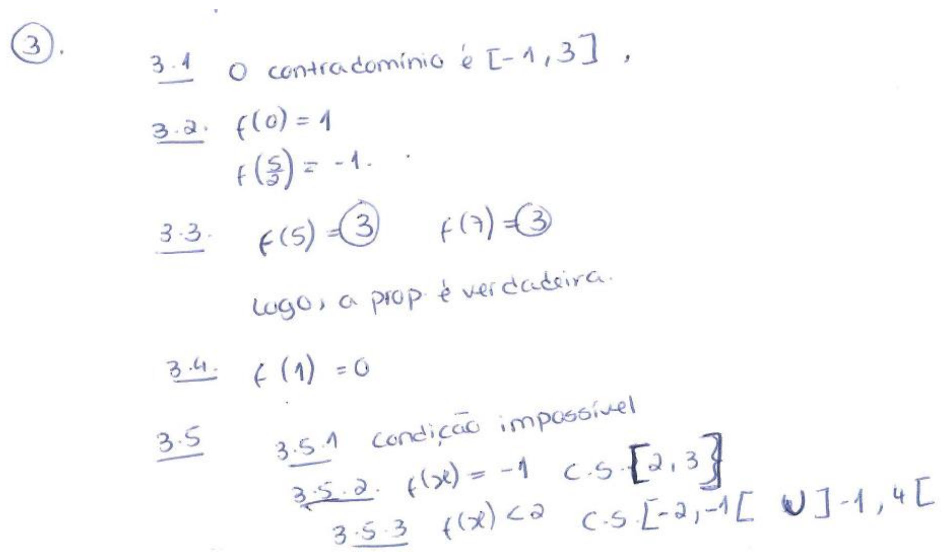


Figura 96 – Respostas dadas à questão 3 (E1).

Relativamente à notação $f(f(0))$, presente na questão 3.4, o aluno começou por considerar a hipótese de estar perante uma multiplicação: “Não (pausa), não estou a perceber, por exemplo, se é *f* vezes …” (E1), acabando por pensar em termos do inverso: “Estou a fazer como se fosse (pausa), se a imagem de *f* de zero é um, logo a imagem (pausa), de um, supostamente nesse ponto era zero, era o inverso, não sei se me estou a fazer entender” (E1). No que diz respeito à condição $f(x)+1=0$, o Francisco interpretou-a como $f(x+1)=0$: “Agora estou a ver se, se algum valor, algum valor de *x*, onde possamos somar um tenha imagem zero” (E1). O aluno identificou os zeros da função, e em seguida fixou a sua atenção no objeto zero que, somando uma unidade, teria imagem zero:

Francisco: […] No gráfico os únicos que têm *y* igual a zero é no ponto menos dois (pausa), no ponto um, e no ponto (pausa), três qualquer coisa. […] Aqui quando eu somo um, quando eu somo um o *y* é igual a zero, será? (Aponta o objeto 0).
Investigadora: Então qual é a imagem desse [objeto] que estás aí a apontar?
Francisco: A imagem de …
Investigadora: Sim, desse valor.
Francisco: É um.
Investigadora: Se somares um …
Francisco: Se somar um, se somar um a qual? A este? (Pausa) Ai, já me estou a confundir!
Investigadora: A qual é que tens que somar?
Francisco: Tenho que somar ao *x*. (E1)

Após discussão com a investigadora, o Francisco acabou por interpretar corretamente a condição, mostrando, no entanto, alguma compartimentação relativamente aos vários conteúdos: "Nas funções não dá para passar, por exemplo, o mais um? Posso?" (E1). Foi possível perceber também alguma confusão relativamente à notação a utilizar para representar o conjunto solução, surgindo a notação sob a forma de intervalo, depois de a investigadora o questionar sobre o que representava o conjunto $\{2,3\}$ escrito inicialmente.

Apesar das dificuldades de interpretação da notação envolvida nas questões anteriormente referidas, o aluno revelou uma boa interpretação da representação gráfica. Por exemplo, relativamente à condição $f(x)<2$, o Francisco tomou a iniciativa de representar na figura linhas auxiliares (Figura 97) que o ajudaram a determinar o conjunto-solução.

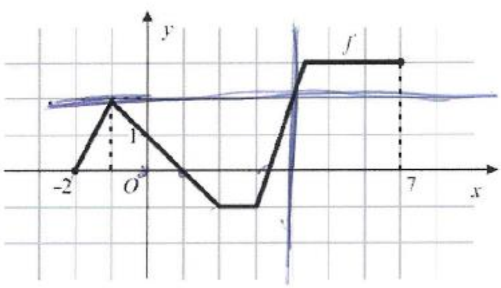


Figura 97 – Linhas auxiliares relativas à interpretação da condição $f(x) < 2$.

Em resumo, o conceito imagem de função do Francisco envolve algumas representações gráficas e expressões algébricas com que o aluno trabalhou no ensino básico, no entanto, relativamente à representação algébrica é possível perceber que, dependendo de como a expressão está apresentada, o reconhecimento pode não ser imediato. O aluno parece ter recordado o conceito definição, utilizando-o para analisar a possibilidade de algumas representações gráficas não familiares corresponderem a funções, mas, em determinadas ocasiões, mostrou alguma confusão relativamente à definição, acabando por expressar dúvidas acerca do facto de o argumento "a cada x tem que corresponder um único y" ser suficiente para decidir se está ou não perante uma função. Ao tentar transmitir o que entende por função, o aluno expõe a ideia de uma relação entre variáveis, concretizando com uma relação algébrica de proporcionalidade direta, o que mostra que este tipo de relação está muito presente no seu conceito imagem. A relação de proporcionalidade inversa não está tão presente, já que o aluno não conseguiu recordar a condição que a define, bem como algumas noções associadas, como a impossibilidade de as variáveis assumirem o valor zero, embora tenha sido possível perceber a existência de algumas imagens mentais relacionadas com a proporcionalidade inversa, como a representação de uma curva em forma de ramo de hipérbole.

O aluno consegue trabalhar com a representação numérica, interpreta corretamente a notação própria das funções, pelo menos no que diz respeito à notação que lhe é familiar, e consegue retirar informação da representação gráfica, quer para resolver condições simples, quer para indicar propriedades da função, como o contradomínio.

A conversão de representações levantou dificuldades ao aluno, não conseguindo relacionar a representação numérica e algébrica de uma função afim, mesmo depois de compreender que se encontrava perante esse tipo de função. Os dados parecem sugerir que a conversão de representações não é usual na atividade do aluno, surgindo espontaneamente apenas no caso da expressão $x = y$.

8.3. Esquemas de utilização desenvolvidos pelo aluno ao longo do 10.º e 11.º anos

Nesta seção pretende-se caracterizar os principais esquemas de utilização que vão sendo desenvolvidos pelo aluno ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário, no que diz respeito à utilização do artefacto calculadora gráfica, no âmbito do trabalho com as funções. Para cada categoria são apresentados alguns episódios que pretendem ilustrar a evolução e adaptação desses esquemas.

O Francisco adquiriu a sua calculadora gráfica, de modelo TI-84 *Plus*, já no segundo período do décimo ano.

8.3.1. Esquemas de introdução da expressão analítica no editor de funções

Os esquemas de utilização relativos à introdução da expressão analítica de uma função englobam a atribuição de significado e de funções a determinadas teclas envolvidas na edição da expressão, como por exemplo, introdução da variável independente ou introdução do sinal negativo, assim como de outras teclas correspondentes à especificidade das funções a editar, como *elevar ao quadrado*, *módulo*, *derivada*, etc., as quais vão sendo instrumentalizadas à medida que o aluno vai tomando contacto com novas funções. Além disso, os esquemas envolvem o reconhecimento das situações em que é necessário a introdução de parêntesis e do modo como tal deve ser feito tendo em conta as características do artefacto.

Fase inicial do processo de génese instrumental

O Francisco começou a tomar contacto com algumas teclas relevantes para a introdução da expressão analítica no editor de funções na primeira aula dedicada ao tema, seguindo as indicações dadas pela professora. O Diogo (seu colega de carteira) começou logo a explorar a máquina e tentou mostrar ao Francisco como era possível selecionar e desselecionar uma função no editor de funções, mas este não parece ter compreendido, já que quando a professora pediu para os alunos desselecionarem uma expressão editada, questionou o colega:

> **Francisco**: Ai, é? Como é que isso se faz?
> **Diogo**: Aquilo que eu te disse. Chegas aqui ao *enter*, pões isto a piscar assim de forma diferente, carregas no *graph* e já só te aparece a outra.
> **Francisco**: Sabes tanto (risos). [...] Isto até está a ser fácil, está a ser fixe. (A1_10)

Apesar de a professora ter salientado a diferença entre a tecla de sinal negativo e a de operação de subtração, o Francisco confunde muitas vezes as duas notações. Na segunda aula, ao tentar determinar a imagem de menos quatro por meio da função $y = x^2$, o aluno obteve mensagem de erro, que foi de imediato identificada pelo Diogo:

> **Francisco**: Queremos saber o quê? Menos quatro?
> **Professora**: A imagem de menos quatro.
> **Francisco**: *Stora*, agora é *enter*?
> **Professora**: É.
> **Francisco**: Uau! (obteve erro)
> **Professora**: Faça, vá ver qual foi o erro que cometeu.
> **Diogo**: Foi aqui, se calhar o menos não puseste sinal.
> **Professora**: O sinal! (Em voz alta para toda a turma) Ora cuidado, o Francisco acabou de cometer aqui um erro para o qual se chamou a atenção na outra aula. Ele escreveu menos quatro, sinal de menos, como sendo o sinal de operação, e máquina disse-lhe que tinha um erro. Ela fala connosco (ri). (A2_10)

Na segunda entrevista, ao alterar os valores na janela de visualização, o aluno expressa essa dificuldade: "[…] O mínimo menos, menos seis (pausa), não, não é este, eu tenho sempre, é o problema em saber quando é que é este, e quando é que é este (aponta as teclas)" (E2). Este problema pode levantar entraves quando a máquina não origina mensagem de erro, como no caso de introdução do sinal numa expressão algébrica em vez da operação de subtração, o que a TI-84 interpreta como sendo uma multiplicação. O Francisco e o Diogo tiveram oportunidade de observar os efeitos desse erro ao editarem a expressão $y = 6x^2 - 24x + 70$ usando a tecla de sinal negativo. Numa situação em que os alunos não desenvolveram esquemas que lhes permitam estabelecer conexões entre a representação algébrica e a gráfica, um erro deste tipo pode passar despercebido.

Na primeira aula em que utilizaram a calculadora a professora salientou também que podiam utilizar a tecla *INS* (*insert*) para acrescentar algo que tivessem esquecido. O Francisco na altura experimentou essa funcionalidade, apesar de ter demorado algum tempo a localizar a tecla com o colega:

> **Francisco**: Onde é que está o "inserir"?
> **Diogo**: Não sei.
> **Francisco**: Onde é que está o *insert*?
> **Diogo**: Estou à procura.
> […]
> **Francisco**: Tá aqui, tá aqui, tá aqui. Ah, está aqui (pausa), fixe. (A1_10)

Na segunda entrevista o aluno tinha ideia de que poderia incluir um espaço para acrescentar algo na expressão que estava a editar, mas já não sabia qual a tecla correspondente: "Eu, eu queria fazer mais (pausa), mais e agora? Ó *Stora*, para por exemplo não estar a apagar isto tudo, para eu acrescentar aqui um valor, posso?" (E2), o que mostra que o processo de instrumentalização das teclas relevantes vai surgindo essencialmente da necessidade, através da integração do artefacto na atividade.

A edição das expressões analíticas $h(x)=|g(x)|$ e $i(x)=g(|x|)$, sendo g uma função afim representada graficamente, questão 2, da segunda entrevista (Anexo 2), levantou dificuldades ao aluno, contudo, tal não parece ter ficado a dever-se ao processo de instrumentalização relativo ao artefacto, mas a dificuldades conceptuais relacionadas com a interpretação da notação. Por exemplo, relativamente à função h, o aluno refere: "Eu não estou, eu não estou a perceber é como é que coloco [na máquina] a (pausa), g vezes x? (Baixinho) Quer dizer, aquilo não é g vezes x, é g de x" (E2). Apesar de ter afirmado que não é "g vezes x", depois de obter a equação reduzida da reta, o Francisco voltou a manifestar a intenção de multiplicar por x:

> **Francisco**: Então no y metemos, é o módulo … (digita), desta função (pausa), menos dois x, mais três.
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: Mais três …, mais três, devia estar outra vez (pausa), vezes x? Ou? Não, mas assim não vai dar a equação toda.
> **Investigadora**: O que é que queres mais, agora?
> **Francisco**: Agora, x! (E2)

Esta confusão repetiu-se relativamente à função *i*, com o aluno a editar a expressão $y = (-2x+3)\,\mathrm{abs}\,x$ na calculadora, e, depois de interação com a investigadora, a escrever a expressão no papel também de forma incorreta (Figura 98):

> **Francisco**: Então pronto ponho (pausa), entre parêntesis menos dois *x*, mais três (vai digitando na calculadora), é vezes, haaa …
> **Investigadora**: Porquê vezes?
> **Francisco**: Acho eu (pausa). Não, não é vezes, eu é que pensei, estou habituado. […] Então fazemos o módulo de *x*.
> […]
> **Investigadora**: Repara, o que é que introduziste na calculadora. A função *g*, menos dois *x*, mais três e depois *abs* de *x*. Estás a colocar *g* vezes módulo de *x*.
> **Francisco**: (Pausa longa) Pois. (Apaga).
> **Investigadora**: Queres tentar escrever aqui, no papel mesmo, como é que fica a expressão da função *i*?
> **Francisco**: Hum (o aluno passa para o papel) Então *i* de *x* é igual a *g* do módulo, então sabemos que a função g (pausa) é a menos dois *x* mais três, módulo de *x*. (E2)

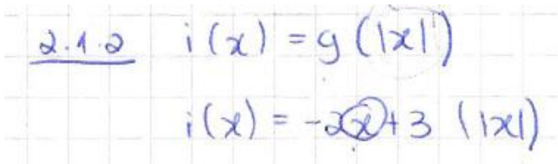


Figura 98 – Escrita da expressão analítica da função *i* (E2, questão 2.1.2).

Neste caso o aluno escreveu a expressão incorretamente, tanto na calculadora, como no papel. O problema da inserção dos parêntesis não resultou da utilização do artefacto, sendo antes conceptual.

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

A introdução da expressão analítica de uma função no editor de funções, na maioria das vezes, não levantou dificuldades ao aluno, no entanto, foi possível voltar a observar dificuldades em identificar o erro relativo à introdução incorreta do sinal numa fase relativamente avançada do processo de génese instrumental, na altura da quarta entrevista: “*Stora*, porque é que dá mal? […] Não estou a perceber *Stora*, mas porque é que me dá um erro de linguagem?” (E4, parte conjunta).

Foi também possível observar algumas situações em que o aluno introduziu incorretamente os parêntesis, ocorridas ao longo do tempo. Esses casos, contudo, parecem ficar a dever-se a uma incorreta interpretação da notação e não propriamente ao processo de génese instrumental relativo à calculadora gráfica, já que o mesmo erro pode ser reconhecido quando o aluno utiliza papel e lápis. É interessante notar que não existe uma consistência em termos do erro, havendo situações em que o aluno interpreta a notação corretamente e outras em que tal não acontece. Por exemplo, apesar de inicialmente ter tido alguma dificuldade em interpretar a notação $p(x+7)$, presente na questão 4, da quarta entrevista, parte individual (Anexo 4), o aluno acabou por concluir que a expressão analítica dessa função pode ser obtida substituindo *x* por *x+7*:

> **Francisco**: Eu já não me lembro como é que se fazia, quando se podia, selecionar (aponta para o visor da calculadora) para fazer uma equação, uma expressão, fazer, haa, por exemplo, *y1* mais sete, já não me lembro (pausa), se havia essa função, acho que havia … (pausa longa).
> **Investigadora**: Mas tu queres colocar o *p* de *x*, mais sete?
> **Francisco**: Quero.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque é essa a função que no fundo nós queremos. (Pausa) Para depois, porque essa função vai ser multiplicada, por esta (aponta para o caso notável no papel). (Pausa longa) *p* de *x* mais sete …
> **Investigadora**: Então pensa numa, numa maneira, ou tenta resolver doutra maneira.
> **Francisco**: (Pausa bastante longa) Não sei se é possível eu chegar à expressão (aponta no enunciado para *p* de *x*) e em vez de estar *x* ao cubo, em vez de meter *x*, meter *x* mais sete (pausa), mas não …
> **Investigadora**: Que é que achas? Será a mesma coisa ou não?
> **Francisco**: Se eu substituir, se eu fizer *p* de sete, não vai dar!
> **Investigadora**: Se fizeres *p* de sete vai-te dar o quê?
> **Francisco**: […] Não sei, *p* de sete é se o *x* fosse mesmo sete. […] Queria, queria introduzir a expressão na calculadora, e, se multiplicasse depois por, pela outra …
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Seria …
> **Investigadora**: Sim, mas já me disseste qualquer coisa que poderias fazer para introduzir a expressão.
> **Francisco**: Era (ri) substituir o *x* na expressão, por *x* mais sete.
> **Investigadora**: Então e isso não dará o *p* de, *x* mais sete?
> **Francisco**: Dará. Mas eu não sei é se consigo fazer! (Ri) (Pausa) mas eu vou tentar. (E4, parte individual)

O Francisco escreveu a expressão no papel, recorrendo aos parêntesis necessários, no entanto, não a tentou introduzir desse modo na calculadora, passando antes a efetuar a sua simplificação, o que devido a dificuldades de ordem algébrica fez incorretamente (Figura 99).

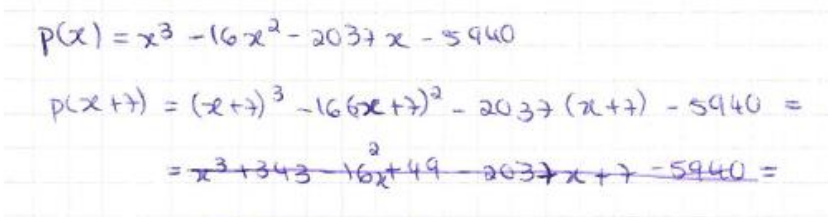


Figura 99 – Simplificação da expressão $p(x+7)$ (E4, questão 4, parte individual).

Ao ser confrontado com a simplificação obtida e os efeitos da transformação na representação gráfica da função *p*, identificados de imediato quando começou a analisar a questão, o aluno considerou então a hipótese de a introduzir na máquina sem simplificar:

Investigadora: Agora estás a fazer o quê?
Francisco: Estou a resolver a expressão, haaa, *p* de, *x* mais sete.
Investigadora: E precisas?
Francisco: Eu acho que sim. Para ficar com a expressão para introduzir na calculadora. (Pausa longa) Se calhar não …
Investigadora: Mas achas que precisas, não é? É isso?
Francisco: Hum, hum. (Pausa longa) Mas isto no fundo só vai alterar os valores da ordenada na origem (aponta para o termo independente) […] Estava a dizer que ia variar, o que fosse era no último parte (aponta para os dois termos independentes), mas, ou seja era na, na altura da *parábola*, se andava para cima ou se andava para baixo na *parábola*, por isso, porque estes valores nunca vão alterar (aponta os outros termos).
Investigadora: Mas há bocado não foi isso que me disseste, ou foi?
Francisco: Não.
Investigadora: Disseste o quê?
Francisco: Há bocado disse que supostamente deveriam alterar porque o *x* mais sete … (aponta para *x* mais sete).
Investigadora: Sim, o gráfico iria deslocar como?
Francisco: Para a direita ou para a esquerda, neste caso para a esquerda, sete unidades. […] Oh, *Stora* por acaso se calhar eu não precisava, mas eu não sei fazer de outra forma. E também não sei se isto é assim …
Investigadora: Escuta, tu escreveste a expressão do *p* de, *x* mais sete, não escreveste?
Francisco: Sim.
Investigadora: E?
Francisco: E podia introduzi-la logo na calculadora.

Investigadora: Podias ou não?
Francisco: Podia. (E4, parte individual)

O Francisco inseriu então a expressão analítica, recorrendo aos parêntesis necessários, o que lhe permitiu confirmar a sua previsão inicial de que a representação gráfica da função *p* sofreria uma translação horizontal correspondente a sete unidades para a esquerda. Posteriormente, numa situação semelhante, o aluno editou a expressão $y = \operatorname{sen} x - 1$, referente à transformação $g(x) = f(x-1)$, sendo *f* a função seno de *x*. Na altura percebeu que não o tinha feito corretamente quando confrontou a representação gráfica, na sua calculadora, com a obtida pelo Diogo, recordando então a transformação associada: "Ele tem razão, eu lembro-me de estudar isto o ano passado. E isto, e aqui só variava da esquerda para a direita, a função só se movimentava no eixo *Ox*" (E5). Neste caso o Francisco não escreveu a expressão no papel, editando-a diretamente na calculadora, contudo, parece que o erro relativo aos parêntesis acontece independentemente do recurso ao artefacto. Por exemplo, na sétima entrevista, o Francisco considerou que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ correspondia a $\frac{1}{f(x)}$, o que parece indicar que o problema não diz respeito à instrumentalização e instrumentação do artefacto, sendo antes conceptual.

A edição da expressão $y = \sqrt{1 - sen^4 x}$, obtida pelo Francisco após tratamento da alínea i) da questão 1, oitava entrevista (Anexo 8), também lhe levantou algumas dificuldades, mais uma vez devido à interpretação da notação envolvida e não propriamente ao modo de a editar na máquina: "Seno de *x* à quarta não é a mesma coisa que seno à quarta de *x*. (Pausa) Acho eu. Não é, pois não? (Risos) Não sei colocar isto!" (E8). A comparação do procedimento efetuado, com lápis e papel, no caso da fórmula fundamental da trigonometria, sugerido pela investigadora, levou o aluno a decidir corretamente, recorrendo aos parêntesis necessários para editar a expressão na calculadora.

O recurso à calculadora gráfica pode ser condicionado pela dificuldade da expressão analítica, o que parece evidente quando, depois de obter a expressão que dá a área do triângulo em função de *x*, na questão 3.3, da terceira entrevista (Anexo 3), o aluno fica sem saber o que fazer, mas, perante uma função familiar, responde de imediato que recorreria à calculadora:

Francisco: (Baixinho) Qual é o valor da área máxima?
Investigadora: Vou-te perguntar outra coisa, não tem nada a ver com a expressão que aí está. Mas, imagina que a área era uma função quadrática.
Francisco: Agora iria metê-la, introduzi-la na calculadora.
Investigadora: Para quê?
Francisco: (Pausa) Para ver quando é que ela é máxima.
[…]
Investigadora: Então e qual é a diferença agora? Porque é que …?
Francisco: Não sei (risos). Não parece, não me ocorreu logo, logo, logo.

$$A = (25 - x) \times \sqrt{50x - 625}$$

Figura 100 – Expressão obtida para a área do triângulo (E3, questão 3.3).

O estabelecimento de conexões entre representações, em particular entre a representação algébrica e a gráfica é essencial para que sejam detetados possíveis erros na edição da expressão analítica, o que nem sempre é conseguido pelo aluno. Por exemplo, na questão 5 do teste de 4 de julho de 2010 (Anexo 9), o Francisco converteu corretamente a representação gráfica da função *g* na representação algébrica, contudo, ao editá-la na calculadora esqueceu-se de introduzir a variável x, não detetando o erro. O facto de se encontrar numa situação de avaliação pode ter contribuído para isso, mas o aluno continuou sem conseguir identificar o erro na aula em que fizeram a correção, sendo a professora a fazê-lo:

Francisco: O cinco não me dá bem na calculadora.
Professora: Como?
Francisco: O cinco, eu meti as duas funções, calculei a interseção, e não, deu-me dois, deu-me uns valores, mas que não, não deviam ter saído estes valores.
[…]
Diogo: Vê lá se a reta está bem.
Francisco: Está, já vi pela Sofia.
[…]
Professora: Francisco, o que é que se passa?
Diogo: A calculadora dele está estragada.
Professora: Diz lá!
Francisco: Porque é que está mal introduzido
Professora: Hum?
Francisco: Porque é que está mal introduzido?

Professora: Porque falta *x*, menos dois terços de *x*!
Francisco: Ai, não acredito!
Professora: Meteste menos dois terços, não tens *x*!
Francisco: (Pausa longa) Ok.
Professora: O problema era esse! (A31_10)

Neste caso seria de esperar que o aluno conseguisse perceber o problema, dada a familiaridade da função envolvida, mas isso não aconteceu.

8.3.2. Esquemas de enquadramento

Os esquemas de utilização desenvolvidos pelo Francisco relativos à definição do retângulo de visualização envolvem essencialmente o *Zoom ZStandard* e a alteração direta dos valores correspondentes na janela de visualização. A alteração dos valores é feita por tentativa e erro, mas orientada por determinadas características da representação algébrica, e, por vezes, no caso de um problema, por aspetos relacionados com o contexto.

Fase inicial do processo de génese instrumental

O Francisco, tal como o Diogo, compreendeu que tinha que alterar os valores anteriormente definidos na janela de visualização, relativos a uma situação com contexto em que as variáveis tomavam valores maiores ou iguais que zero, de modo a conseguir visualizar uma representação aceitável do gráfico da função $y = x^2$ proposta pela professora na segunda aula de introdução ao tema das funções. O aluno não recorreu ao *Zoom ZStandard*, o que não é de estranhar, já que a professora ainda não tinha chamado a atenção para essa funcionalidade, considerando o seguinte retângulo de visualização $[-3,3]\times[-4,4]$. Apesar de a professora entretanto ter discutido com a turma uma janela adequada, considerando os valores do *Zoom ZStandard* (embora sem fazer ainda referência a esse *zoom*), o Francisco não alterou os valores que tinha definido inicialmente, o que lhe permitiu observar também a importância que a janela de visualização desempenha, por exemplo, no cálculo de imagens. Ao tentar determinar a imagem do objeto menos quatro, o Francisco obteve mensagem de erro devido à introdução incorreta do sinal e volta a obter mensagem de erro após a sua correção, desta vez por menos quatro não pertencer ao intervalo considerado na janela de visualização para a variável *x*:

> **Francisco**: Mas a mim dá igual! *Stora*, dá igual!
> **Diogo**: Carrega no um, carrega valor …
> **Professora**: Já todos conseguiram calcular a imagem de menos quatro?
> **Diogo**: Então? Põe lá no gráfico. Põe no gráfico! E agora pões lá no calcular, valor, menos quatro, não dá. És horrível!
> **Francisco**: *Stora*, não dá na mesma.
> **Diogo**: Estragaste a tua calculadora Francisco.
> **Professora**: Diga lá, Francisco.
> **Diogo**: Carregaste no *Shift*, quando fizeste aqui calcular?
> **Francisco**: Yah!
> **Professora**: Valor, sim. Menos quatro. (Dá erro).
> **Diogo**: Não carregaste no *Shift*!
> **Professora**: A janela estava correta?
> **Francisco**: Acho que sim.
> **Diogo**: Não, já sei tu puseste uma janela de menos três!
> **Professora**: Veja a janela que aqui tem!
> **Francisco**: É verdade, é verdade.
> **Professora**: Porque é que acha que não deu, então?
> **Francisco**: Porque não há, porque não está dentro dos valores. (A2_10)

Numa aula posterior, ao tentar definir uma janela de visualização para a função $d(t) = -5t^2 + 200$, tarefa 14 do manual (Anexo 12), o Francisco questionou a professora sobre os valores que deveria atribuir à variável *y*:

> **Francisco**: (Para a Professora) Quanto é que nós metemos no *y*?
> **Professora**: Ah, isso têm que pensar, não sou eu que vou dizer. (A5_10)

A escolha dos valores para a janela de visualização foi depois discutida entre a professora e a turma, realçando aspetos do contexto do problema, alguns dos quais o Francisco não tinha inicialmente considerado:

> **Diogo**: (Para o Francisco) Tu tens *x* negativo.
> **Professora**: E não pode ser, pois não?
> **Diogo**: Pois não.
> **Francisco**: Não vale a pena.
> **Professora**: Pois não!
> **Diogo**: Entre zero e dez.

Professora: Então que valores é que vocês têm que pôr na janela?
Francisco: Não, não há *x* …
Professora: *x* mínimo quanto?
(Os alunos respondem zero)
Professora: Máximo?
(Alguns respondem dez)
Diogo: Dez, mais ou menos?
Francisco: Dez, porquê?
Professora: Dez, chega?
Diogo: Dez, chega!
Professora: Não sabemos quanto tempo, o tempo é dado em quê? No enunciado o tempo é dado em quê? (Vários respondem segundos) Segundos, podemos experimentar agora uns valores, experimentem um valor qualquer no *x*, mas também temos que pensar o valor do *y*. Qual é o valor mínimo para o *y*?
(Vários respondem zero).
Professora: Zero! Porque é quando acontece o quê?
Francisco: Quando cai no chão.
Professora: Quando toca no chão. Exatamente. E o máximo?
(Vários respondem duzentos).
Francisco: Pelo menos duzentos. (A5_10)

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

Na terceira entrevista (Anexo 3), relativamente à representação gráfica da função $f(x)=\left|x^2+50x-104\right|$, o Francisco descreve o esquema que usualmente utiliza para definir o retângulo de visualização, revelando que procura estabelecer conexão com a representação algébrica:

Investigadora: Então e como é que fizeste para encontrar a janela?
Francisco: Primeiro fui … (pausa). Pronto, eu fiz por (pausa), vá por uma tentativa, mas com lógica (risos).Primeiro meti em *Standard* para ver mais ou menos se dava positivo, se não dava, pronto. Haaa e como reparei que o vértice da função, neste caso, do módulo era no zero, fiz, haa, meti *y* mínimo igual a zero, e depois fui ajustando, meti *y* máximo igual a cento e cinquenta, porque como tinha cento e quatro [na representação algébrica], pronto, para ajustar mais ou menos, e meti cento e cinquenta e depois fui ajustando consoante, o gráfico que via. (Pausa) E depois ficou assim (mostra o visor da calculadora).
Investigadora: Pronto surgiu-te essa representação.
Francisco: Exato. (Pausa) Agora passo para aqui, para a folha? (E3)

Apesar de o aluno tentar estabelecer conexão com a representação algébrica, neste caso acabou por não ser bem-sucedido devido à imagem mental que desenvolveu para funções cuja expressão envolve módulos: "Para mim devia ser, em princípio, em forma de V e virado para cima" (E3).

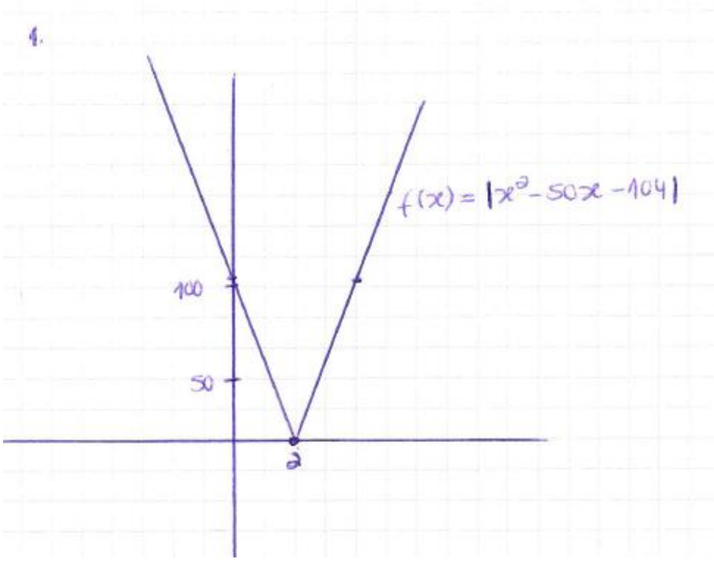


Figura 101 – Representação obtida a partir da calculadora gráfica (E3, questão 1.1).

O aluno só percebeu que algo estava errado com a sua representação gráfica quando a investigadora pediu para ele confirmar as coordenadas do ponto que, supostamente, seria o simétrico do ponto de coordenadas $(0,104)$ relativamente à reta de equação $x=2$. Perante a discrepância nos valores, o Francisco começou por considerar que o vértice não tivesse efetivamente abcissa dois, uma vez que esse valor tinha sido obtido apenas por observação da representação na calculadora. Após confirmar o zero, apelando aos esquemas de utilização desenvolvidos, o Francisco percebe que a representação gráfica não pode ser aquela que pensava:

> **Francisco**: […] Pronto, calculo o zero da função (efetua as operações na calculadora), e dá *x* igual a dois!
> **Investigadora**: Ok, então, de facto, o zero é *x* igual a dois, não é? O zero é dois …, realmente a imagem de zero é cento e quatro mas, acontece que a imagem do quatro não é cento e quatro. (Pausa) Então (risos)? Vendo isso …?
> **Francisco**: Está mal!
> **Investigadora**: Não mudes nada. Mas olha bem para a função que está dentro do módulo, portanto, o *f* de *x* é o módulo de uma função no fundo, não é? É o módulo de quê?
> **Francisco**: De uma parábola (pausa breve), não? (E3)

O aluno optou então por visualizar a representação gráfica da função quadrática, demorando dessa vez algum tempo até conseguir visualizar uma representação aceitável, apesar de os valores serem alterados com "lógica" tendo em conta a representação esperada. Antes de visualizar a representação gráfica da função *f*, o aluno mostrou compreender os efeitos da aplicação do módulo na representação gráfica da função quadrática, mas não o facto de a representação gráfica na calculadora inicialmente lhe parecer em forma de V:

> **Investigadora**: O que é que achas que vai dar?
> **Francisco**: Ia dar …, esta parte do gráfico ficava com o simétrico.
> **Investigadora**: Qual parte, qual parte?
> **Francisco**: A parte do, todos os valores negativos da função passavam ao seu simétrico. Então ficava em W, mas não deve ser.
> **Investigadora**: Mas não deve ser? Então porquê?
> **Francisco**: Porque primeiro não me deu (ri), mas pensava que … (E3)

O Francisco não consegue explicar a razão pela qual obtém diferentes representações para a mesma função na calculadora gráfica, começando por verificar se introduziu corretamente a expressão. Contudo, acaba por compreender que o problema está relacionado com a janela de visualização:

> **Investigadora**: Porque é que achas que há bocado te apareceu outra coisa (ri)? O que é que achas que, que a máquina fez, ou que …? Porque é que achas que foi?
> **Francisco**: (Pausa) Não sei. (Volta à calculadora para verificar se a função inicial tinha sido introduzida corretamente) Eu tinha metido a mesma expressão, não foi?
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: (Pausa) Porque não tinha a função inicial? Não, mas automaticamente deveria …
> **Investigadora**: Automaticamente, não precisas de ter lá a que está dentro do módulo, não é? Podes apagá-la se quiseres confirmar (risos). O que é que achas que estavas a visualizar, dessa representação gráfica?
> **Francisco**: (Pausa longa) Hum, não sei (pausa longa). Não sei (risos) (Volta a verificar o menu de introdução da expressão analítica).
> **Investigadora**: Se voltares a colocar a janela (pausa), inicial, o que é que achas que vai acontecer? Inicial, a que usaste para fazer essa representação no papel? (O aluno vai ao menu *Window*, mas não altera).

> **Francisco**: Sim. (Pausa) Se calhar o problema era mesmo da janela, (muito baixinho) só dava para ver uma parte, não sei.
> **Investigadora**: Então volta lá à representação gráfica, agora. Sim, faz novamente. (O aluno ia para alterar a janela) Não, não, como está. Que parte é que achas que estarias a visualizar?
> **Francisco**: Esta parte aqui (aponta na representação (Figura 102)). (E3)

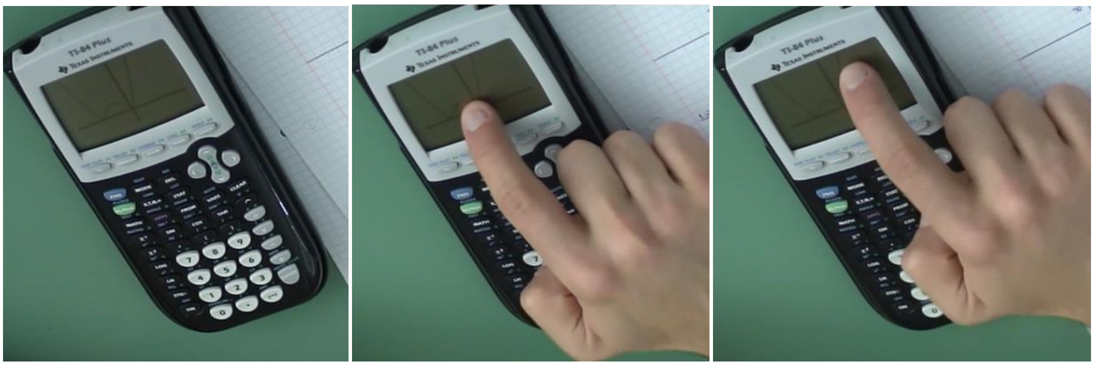


Figura 102 – Identificação da parte da representação gráfica da função $f(x) = \left| x^2 + 50x - 104 \right|$ anteriormente visualizada na calculadora gráfica.

Na quarta entrevista, parte individual (Anexo 4), ao ajustar a janela para visualizar a representação gráfica da função $p(x) = x^3 - 16x^2 - 2037x - 5940$, o Francisco volta a descrever o esquema habitual, de tentativa e erro, mas onde é possível perceber a ligação com a representação algébrica, uma vez que refere o valor de *y* correspondente à interseção com o eixo das ordenadas e o facto de uma função cúbica poder ter até três zeros:

> **Francisco**: […] Pede para representarmos a função graficamente, e vou introduzir a expressão na calculadora e depois ajusto a janela.
> **Investigadora**: Sim e que valores é que estás a colocar?
> **Francisco**: Ainda não sei, mas, como temos o [menos] cinco mil novecentos e quarenta, pelo menos vou meter esse valor, no y mínimo. […] Eu preferi agora meter menos sete mil porque …, mesmo assim não era suficiente, mas o *x* também não está, não está correto, por isso vou experimentar fazer no menos cinquenta e cinquenta, por outro lado também vou aumentar o *y* máximo. […] Sim, no *x* meti menos cinquenta, cinquenta, pelo menos já me aparecem dois zeros, e no *y* máximo vou experimentar meter talvez cinco mil, mesmo assim não dá (ri). Então vou colocar na mesma como o *y* mínimo, vou colocar sete mil nos dois. E não dá na mesma. Está difícil (ri, continua a alterar)!

> **Investigadora**: Tens ideia do tipo de gráfico que esperas obter?
> **Francisco**: Haaa, espero obter pelo menos um, uma função que tenha três (salientando) zeros. Em princípio …
> **Investigadora**: Porquê três zeros?
> **Francisco**: Porque tem o *x* elevado a três (aponta a expressão analítica).
> **Investigadora**: Hum. Sim?
> **Francisco**: Porque o grau da função é igual a três. (Altera o *y* mínimo e visualiza).
> **Investigadora**: E tem que ter obrigatoriamente três zeros?
> **Francisco**: Não. Pode não ter (ri). (Continua a alterar os valores do *y* e a visualizar). Vou só verificar … (E4, parte individual)

O Francisco considera que uma das dificuldades em trabalhar com a calculadora gráfica prende-se exatamente com a procura da janela de visualização: "Principalmente às vezes a encontrar a, bem a janela, sem que esteja por exemplo a tentar encontrar ao acaso. Às vezes depois de interpretar o problema e depois de meter na máquina, às vezes tenho alguma dificuldade a acertar logo com a janela" (E3).

O processo para encontrar uma janela de visualização adequada, noutras situações, seguiu sempre esquemas semelhantes. Por exemplo, na oitava entrevista (Anexo 8) recorreu ao *Zoom ZTrig* por sugestão da investigadora, referindo: "Não sabia que havia esse, *zoom*!" (E8). Na altura o aluno tinha tido alguma dificuldade em ajustar a janela de modo a visualizar a representação gráfica de $y=\sqrt{1-sen^4 x}$ obtida por meio da simplificação da expressão i), uma vez que a amplitude do ângulo estava definida em graus. Inicialmente a representação gráfica parecia-lhe uma reta embora o aluno não estivesse convencido dessa possibilidade.

> **Francisco**: Isto é estranho! (Vai ao editor de funções confirmar o que introduziu) Eu vou aproximar para ver se há alguma alteração (vai à janela e muda o y para valores entre zero e 1.1) Isto dá, parece dar constante.
> **Investigadora**: E achas que tem lógica?
> **Francisco**: Não. (Risos) Não, não, a mim pelo menos não iria dar, pelo menos eu pensava que não, que não ia ser assim. (E8)

É possível perceber que o Francisco tenta estabelecer conexão com a representação algébrica, e com o círculo trigonométrico, apesar de não ter conseguido compreender totalmente a forma da representação gráfica:

> **Francisco**: […] É assim, eu sabia que, muito provavelmente, à medida que, iria haa, se fosse função … […] Acho que iria tender para um, pelo menos porque é assim, se estamos com um seno ao quadrado …, o máximo que um seno de qualquer coisa pode atingir é um.
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Um ou menos um. Como é à quarta, é um número par, vai ser sempre positivo.
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: E quanto maior (pausa), for o valor de *x* …
> **Investigadora**: (Ri) Estás a visualizar o quê?
> **Francisco**: (Ri) Estou a tentar imaginar o círculo trigonométrico! […] O que eu, o que eu estava a pensar é que ia tender para zero (circunda no papel $\text{sen}^4 x$), pronto, este valor ia tender para zero, logo um menos este … (volta a circundar) (ri) (vai à janela e altera o valor de *x* máximo 50) Embora, eu tenho quase a certeza que isto está certo.
> **Investigadora**: Vais tentar fazer o quê?
> **Francisco**: Aumentar a janela (visualiza). Só para ver se varia, mas não varia. (A representação está a ser traçada no visor) Ah! Varia, varia, pronto, já vi qualquer coisa! Ainda bem! Mas porque é que …, é assim, eu sabia que não podia ser negativo. (E8)

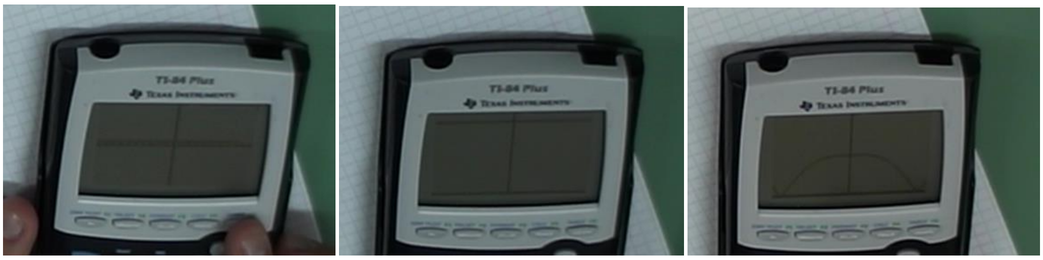


Figura 103 – Algumas das representações da função $y=\sqrt{1-sen^4x}$, visualizadas pelo Francisco (*Zoom ZStandard*, $[-10,10]\times[0;1,1]$ e $[-100,100]\times[0,2]$ respetivamente, argumento em graus).

Após o aluno ter concluído a questão, a investigadora sugeriu que visualizasse a representação gráfica alterando o argumento para radianos e recorrendo, por exemplo, ao *Zoom ZTrig*, tendo o Francisco ficado surpreendido pois não sabia da sua existência. Na realidade, pelo menos das vezes que foi possível observar o aluno a manusear a calculadora, não recorreu a nenhum *Zoom* pré-definido, para além do *ZStandard*. Os valores correspondentes à escala dos eixos também não foram alterados pelo aluno, pelo menos nas situações observadas. Aliás, na situação descrita anteriormente, quando recorreu ao *Zoom ZTrig* para visualizar a representação gráfica da função

$y = \sqrt{1 - sen^4 x}$, o aluno considerou que a escala era uma unidade sem que tivesse observado o seu valor na janela, e que os zeros da função eram números ímpares: “É um, três, …, mas porquê? (Pausa longa) Números ímpares! […] Porque é que será nos números impares que …” (E8). A escala definida pela máquina em *Zoom ZTrig* foi observada por sugestão da investigadora.

8.3.3. Esquemas de resolução de equações e inequações

A resolução analítica de equações do segundo grau é feita recorrendo à fórmula resolvente, através de um programa que o aluno instalou na sua calculadora. Nesse caso, só tem que aceder ao programa e indicar os valores dos coeficientes da equação escrita na forma canónica $ax^2 + bx + c = 0$.

Para resolver graficamente equações e inequações o Francisco segue, usualmente, o seguinte esquema: edita duas funções, uma correspondente ao primeiro membro e outra correspondente ao segundo membro, ajusta a janela de visualização, determina os pontos de interseção das duas representações gráficas recorrendo ao menu *Calc*, e indica o conjunto solução da condição, ou dá a resposta à questão. Foi também observado um outro esquema, num trabalho de pares com o Diogo, que consiste em efetuar primeiro o tratamento algébrico, através da passagem de todos os termos para um dos membros, sendo depois editada a função correspondente, ajustada a janela, e determinados os zeros a partir do menu *Calc*.

Fase inicial do processo de génese instrumental

Na primeira entrevista o Francisco conseguiu resolver condições simples a partir da representação gráfica. Na altura, como foi visto na seção anterior, para resolver a condição $f(x) < 2$, o aluno traçou um segmento de reta horizontal de ordenada dois, verificando depois qual a interseção desse segmento com a representação gráfica da função. No entanto, a primeira vez que a professora fez referência à possibilidade de resolver condições recorrendo à calculadora gráfica, o aluno não sugeriu esse procedimento, apontando antes para a utilização da opção de cálculo de valores:

> **Professora**: […] Este tipo de condições também pode ser resolvido com a calculadora.
> **Diogo**: Pois.
> **Professora**: Se desse a expressão analítica da função, o que é que nós teríamos que pensar? Na próxima aula vamos fazer isso, com uma função. O que é que nós teríamos que fazer aqui, neste caso?
> **Francisco**: Representávamos o gráfico, depois …
> **Professora**: Representávamos a função e depois?
> **Diogo**: Fazíamos a reta.
> **Francisco**: Não, íamos calcular o valor.
> **Diogo**: A reta que intersectava a função …
> **Professora**: Fazíamos a reta, é verdade. Como? Que reta?
> **Diogo**: *y* igual a dois.
> **Professora**: *y* igual a dois e depois o que é que fazíamos a seguir?
> **Diogo**: Depois a seguir, os pontos de intersecção. (A4_10)

O esquema usual foi sugerido pelo Diogo. A professora não discutiu a sugestão do Francisco, contudo, o seu modelo de calculadora não tem a opção de calcular um valor de x para um determinado valor de y, pelo que tal não seria viável.

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

O Francisco aplicou os esquemas desenvolvidos para resolução gráfica de equações e inequações em diversas situações. O esquema usual pode ser observado, por exemplo, na resolução da questão 4, da ficha *O Concerto* (Anexo 11), realizada com o Diogo, onde se perguntava o preço dos bilhetes de modo que o lucro obtido fosse superior a 2100 euros, sendo o lucro, em euros, modelado pela função $L(p) = -25p^2 + 1250p - 13125$:

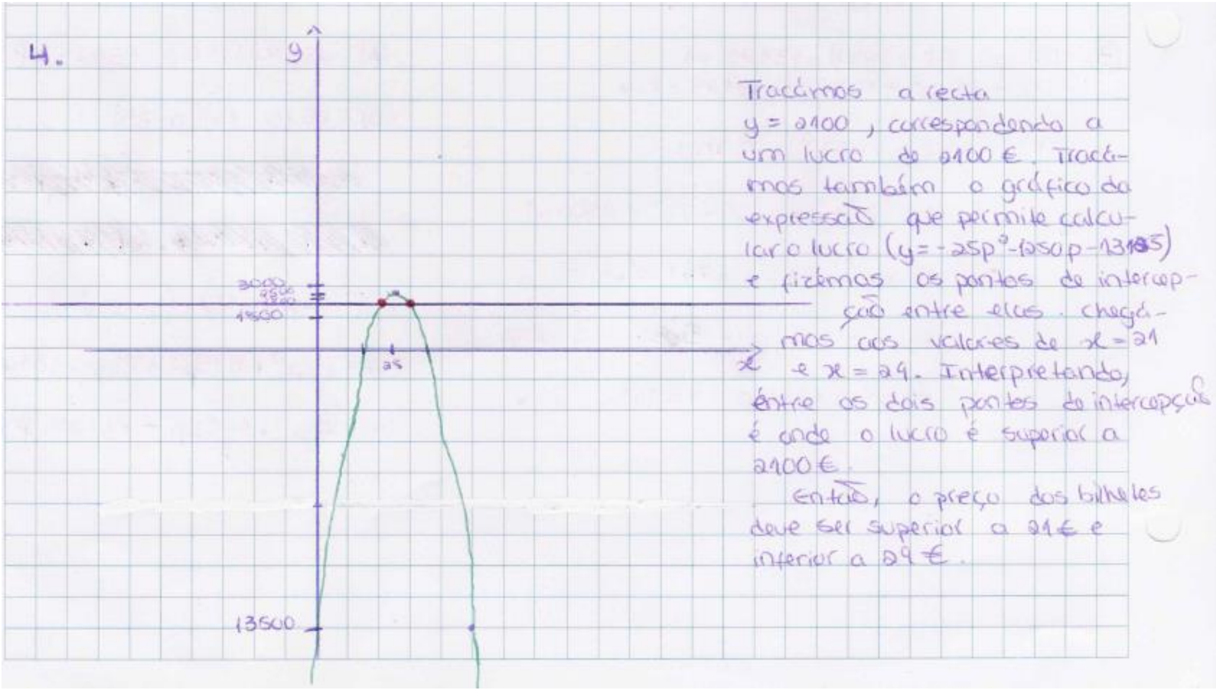


Figura 104 – Resolução da questão 4 da ficha *O Concerto*, pelo par Francisco e Diogo.

O esquema usual foi substituído por outro na questão 2 da ficha *Derivadas* (Anexo 17), resolvida em conjunto com o Diogo, o que parece ter acontecido porque os alunos pretendiam resolver a equação analiticamente, e, não o conseguindo, decidiram recorrer à calculadora gráfica, apesar de não apresentarem a representação gráfica (Figura 105).

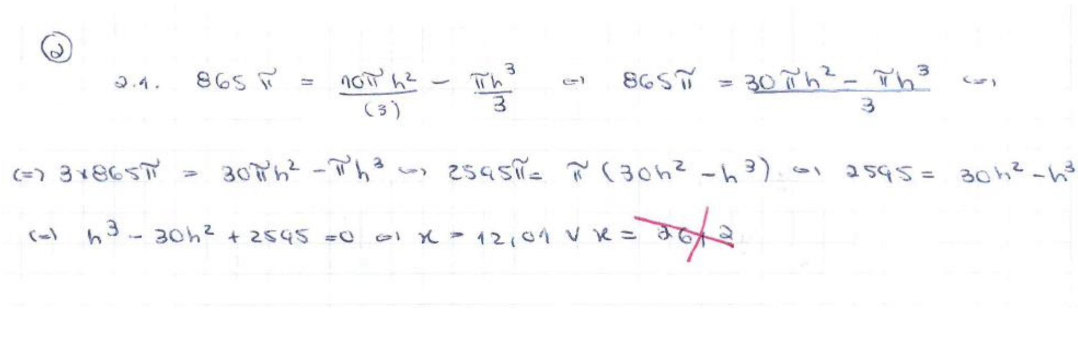


Figura 105 – Resolução da questão 2 da ficha *Derivadas*, pelo par Francisco e Diogo.

Neste caso, tendo alguns cálculos já efetuados, o Diogo optou por introduzir na calculadora a função obtida após tratamento, apesar de o Francisco, inicialmente, ter ficado um pouco confuso relativamente à equivalência dos procedimentos. Foi possível perceber algumas dificuldades em ajustar a janela, o que talvez não tivesse acontecido se considerassem a função inicial, já que poderiam atender ao valor correspondente à função constante:

> **Diogo**: Hum! Agora aparecia aqui uma coisa! Vamos pôr uma *window bué* de grande, uma de dez mil e … (Pausa muito longa) Ó *Stora*, não sei, isto é preciso pensar muito. O que é isto?
> […]
> **Sofia**: Ainda estás a tentar fazer isso analiticamente? […] A nós também nos aconteceu isso de início, mas depois mudámos de janela.
> **Diogo**: Então e a janela era qual?
> […]
> **Francisco**: […] Mas esse gráfico nem é o da função sequer.
> **Diogo**: É sim.
> **Francisco**: É essa?
> **Diogo**: Então, yah! Foi o que nós fizemos.
> **Francisco**: Não!
> **Diogo**: Está bem, eu estou a calcular desta [após tratamento], mas calcular desta ou dessa [inicial] é igual, não?
> **Francisco**: Não.
> **Diogo**: É sim! (A17_11)

A escolha de uma janela de visualização apropriada, ou a conjugação de várias, é essencial para resolver condições graficamente. Neste caso, se a equação não fosse proveniente de um problema com contexto, os alunos provavelmente obteriam apenas duas soluções, quando a equação tem efetivamente três soluções. Por outro lado, sendo esta uma situação com contexto, foi possível perceber que os alunos não tiveram em conta o domínio, já que só excluem uma das soluções depois de interação com a investigadora:

> **Diogo**: […] Não sei aqui onde é que está errado. (Não se percebe o que dizem, está muito barulho) Mas assim tem dois zeros!
> **Investigadora**: Está bem, não importa. Pode ser que um não faça parte do domínio.
> **Diogo**: Pois, está bem. (Muito tempo depois) 12,0; e o outro provavelmente vai estar fora do domínio. (Pausa) Está, está fora.
> **Francisco**: Mas ele intersecta em dois, Diogo.
> **Diogo**: Hum?
> **Francisco**: Mas ele intersecta em dois! No meu gráfico intersecta em dois.
> **Diogo**: Dois quê?
> **Francisco**: Dois pontos.
> **Diogo**: Sim, intersecta em dois pontos, agora mede lá. Calcula lá os pontos, um é 12 e o outro é fora do domínio. (A17_11)

A utilização deste esquema, recorrendo ao tratamento algébrico, só foi observada nesta situação, resolvida em conjunto com o Diogo.

A aplicação do esquema usual levantou problemas ao Francisco quando este resolvia graficamente a inequação $f(x) \leq -2$, sendo $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$. O aluno não conseguiu obter de imediato as coordenadas do ponto de interseção das duas representações gráficas, obtendo por diversas vezes mensagem de erro:

> **Francisco**: Mas não dá!
> **Diogo**: Não te dá o quê?
> **Francisco**: É tão lento! Olha aí, está parvo (obtém mensagem de erro).
> **Diogo**: Traçaste a reta?
> **Francisco**: Yah! Olha aí.
> **Diogo**: Menos 2? Sim. (Pausa Longa) Agora chega para lá.
> **Francisco**: Não dá.
> **Diogo**: Estás com uma calculadora muito boa!
> **Francisco**: Não dá! (A6_11)

O problema ficou a dever-se aos constrangimentos da sua calculadora gráfica, já que, para determinar a interseção entre duas representações gráficas, para além de ser necessário indicar as duas funções relativamente às quais se pretende determinar o ponto de interseção, é também necessário indicar um valor supostamente próximo do ponto de interseção – *Guess*. O Francisco, provavelmente, definiu o ponto *Guess* para além da assíntota vertical, o que conduz a mensagem de erro, já que a interseção entre as duas representações é obtida para valores de x menores que três. A aproximação relativa ao ponto *Guess* não é muito relevante no caso de as funções estarem definidas no intervalo estabelecido na janela de visualização, no entanto, caso isso não aconteça, essa escolha pode ser determinante para evitar mensagem de erro.

A complexidade ou o tipo das funções envolvidas pode condicionar a aplicação dos esquemas de resolução gráfica de equações ou inequações. Por exemplo, relativamente à equação $1 + x^2 = \cos x$, presente na quinta entrevista (Anexo 5), realizada em conjunto com o Diogo, o Francisco não considerou logo o recurso à calculadora gráfica, tendo alguma dificuldade em aceitar a utilização do esquema usual, provavelmente devido às funções envolvidas:

> **Francisco**: (Pega na máquina) Vamos experimentar (pausa), fazer a intersecção dos dois. Não, eu não …
> **Diogo**: Não, Francisco. Já está a sair tudo mal!
> **Francisco**: Podíamos tentar fazer a intersecção entre a *reta* y igual a cosseno de *x*, e a *reta y* igual a um, mais *x* ao quadrado (pausa), mas não, *Stora*, não vai dar, era só … (E5)

Neste caso, a dificuldade em recorrer ao esquema usual parece ter ficado a dever-se às funções envolvidas, particularmente, a função trigonométrica cosseno de *x*, que evocou outro tipo de imagens mentais.

8.3.4. Esquemas de determinação de pontos notáveis do gráfico de uma função

Os esquemas de utilização desenvolvidos pelo Francisco para determinação gráfica dos zeros de uma função, ou dos extremos relativos, envolvem, usualmente, o menu *Calc*. Devido aos constrangimentos da sua calculadora, o esquema de utilização inclui a determinação de um intervalo definido por um valor à esquerda e outro à direita do zero, ou do extremo, e pela indicação de um ponto hipoteticamente próximo do ponto notável – *Guess*.

Fase inicial do processo de génese instrumental

O esquema de utilização envolve a perceção das situações em que faz sentido que seja utilizado. Por exemplo, ao tentar responder à questão 1.5, da segunda entrevista (Anexo 2), referente à classificação que recebia um maior aumento, o Francisco começou por sugerir a determinação do máximo, contudo, compreendeu que, naquele caso, tal não faria sentido:

> **Francisco**: Qual é a classificação que recebe um aumento maior. Haaa, (pausa, suspiro), vamos à calculadora (pausa), podemos calcular o máximo, não sei.
> **Investigadora**: Haa, de quê? De que função?
> **Francisco**: O máximo da função, desta função (classificações corrigidas).
> **Investigadora**: O máximo dessa função.
> **Francisco**: Mas parece, (pausa) não, eu estava a fazer confusão com um exercício que fizemos na aula em que, mas que era

assim, para calcularmos o valor, o valor mínimo da expressão, mas não. (E2)

O Francisco optou então por fazer uma exploração com a calculadora, recorrendo à representação numérica, mas acabou por considerar que essa estratégia lhe iria dar bastante trabalho.

Investigadora: Estás a tentar encontrar o quê?
Francisco: Estou a tentar encontrar o valor (pausa), em que, por exemplo se desse, não sei, para que a distância entre este e este, entre a função, entre a função inicial, a função inicial é esta (aponta $y = x$) e a corrigida fosse maior, mas não sei se consigo.
Investigadora: Como é que irias à procura disso?
Francisco: Fui à, à tabela, ver o, o valor que seria maior. [...] Só que lá está ia ter um grande trabalho a encontrar o … [...] Não há aqui [na calculadora] nenhum valor em que, se houvesse uma função na, na calculadora, que desse para fazer, um determinado valor menos o outro! (E2)

Só quando questionado, considerou a hipótese de definir uma outra função correspondente à diferença entre as classificações corrigidas e as originais, no entanto, depois de a definir, não optou de imediato por recorrer à funcionalidade do menu *Calc* que permite calcular as coordenadas do ponto onde a função tem um máximo, começando por ponderar o recurso à funcionalidade *TRACE*:

Francisco: Então agora posso ir com o *TRACE*, não. Posso ir fazer o (pausa bastante longa).
Investigadora: Diz, diz o que estavas a pensar (risos) …
Francisco: Estava a ver que tinha que ir ver a, qual era este valor aqui, entre estes dois (aponta).
Investigadora: E esse valor é o quê?
Francisco: É o valor onde a diferença é maior.
Investigadora: É maior. Então é o quê da função? Dessa função diferença?
Francisco: É o máximo. (E2)

Ao iniciar os procedimentos para a determinação do máximo o Francisco foi confrontado com a necessidade de escolher a expressão que pretendia, já que tinha várias funções editadas na máquina:

Francisco: É aqui, não é?
Investigadora: Eu não consigo ver, vai-te aparecendo aí. Não, não é esta função.

Francisco: Sim, ela não estava inicialmente. Agora já está. (E2)

Numa fase inicial do processo de génese instrumental o aluno vai interiorizando os procedimentos necessários para poder utilizar eficazmente o artefacto.

Fase de desenvolvimento do processo de génese instrumental

Na terceira entrevista (Anexo 3), ao representar graficamente a função $f(x)=\left|x^2+50x-104\right|$ (questão 1.1), o aluno considerou que esta tinha um zero no ponto de abcissa dois apenas por observação da representação na calculadora. Este tipo de comportamento pode ser arriscado, tendo em conta o modo de representação gráfica na calculadora, e o Francisco parece ter tido essa noção, optando por efetuar os procedimentos usuais para a determinação do zero ao ser confrontado com o facto de a representação gráfica da função não ter, como supunha, um eixo de simetria vertical de equação $x=2$:

Francisco: Vou confirmar primeiro este ponto (aponta para o zero), se calhar é melhor, estou a partir dele e depois também não sei se ele é mesmo …
[…]
Francisco: Por isso vou calcular o zero. (Pausa) (Começa por tentar determinar o zero da função mas opta por alterar a janela) Para isso é melhor reformular a tabela.
Investigadora: A tabela?
Francisco: A janela (ri). Meto *y* (pausa), assim ao menos …, pronto, calculo o zero da função (efetua as operações na calculadora), e dá *x* igual a dois! (E3)

Em diversas situações foi possível observar o aluno a apelar aos esquemas de utilização usuais para determinação dos zeros ou dos extremos. Por exemplo, na questão 3.3 da terceira entrevista (Anexo 3), o Francisco recorreu ao esquema usual para determinar o valor de *x* para o qual a área do triângulo é máxima, efetuando os procedimentos, até mais do que uma vez, já que inicialmente não introduziu a expressão pretendida. O aluno teve alguma dificuldade em fazer a representação gráfica no papel, não sendo rigoroso relativamente à interseção com o eixo das abcissas, nem à representação do ponto extremante, mas efetuou os procedimentos na calculadora corretamente.

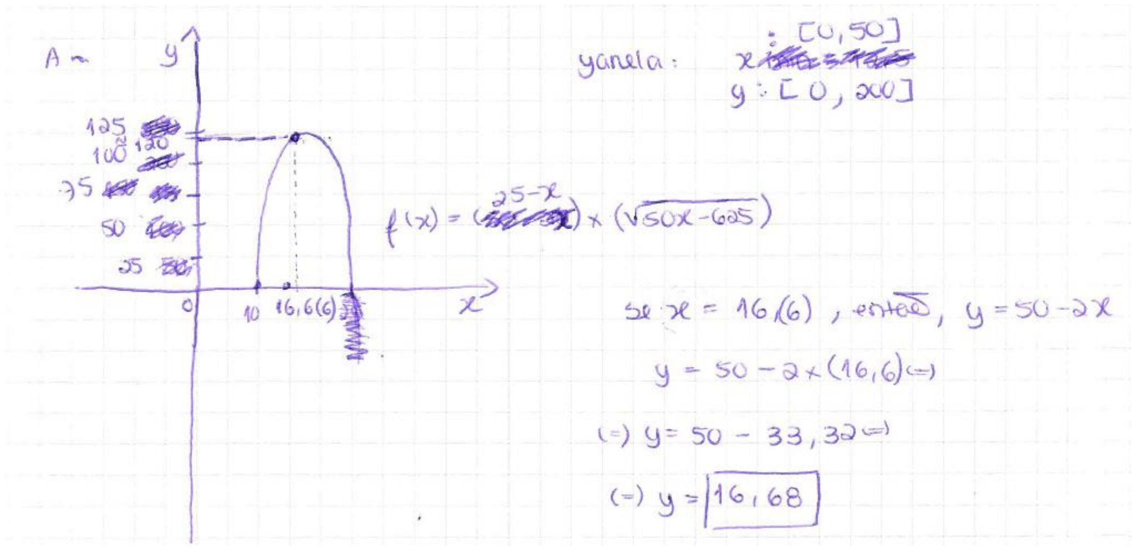


Figura 106 – Resolução da questão 3.3 (E3).

No entanto, a determinação dos extremos, devido aos constrangimentos da sua calculadora, fica dependente do intervalo definido, e as coordenadas devolvidas podem não corresponder efetivamente a um ponto onde a função tenha um extremo relativo, já que calculadora indica o máximo ou o mínimo no intervalo considerado sem que a função nesse intervalo mude obrigatoriamente de sentido de variação. Por exemplo, apesar de o Francisco ter referido, na aula em que fizeram a correção, que a questão 4.2, do teste intermédio de cinco de maio de 2010 (Anexo 9), "Era a mais fácil do teste" (A30_10), não conseguiu obter o mínimo da função, provavelmente por não ter definido corretamente o intervalo. A função era dada por $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ e era pedido para, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determinar um valor aproximado às décimas para *a*, sendo o intervalo $\left[a, +\infty\right[$ o contradomínio da função *f*. O valor obtido pelo Francisco, na janela indicada, sugere que definiu um intervalo que não continha o mínimo relativo da função (Figura 107).

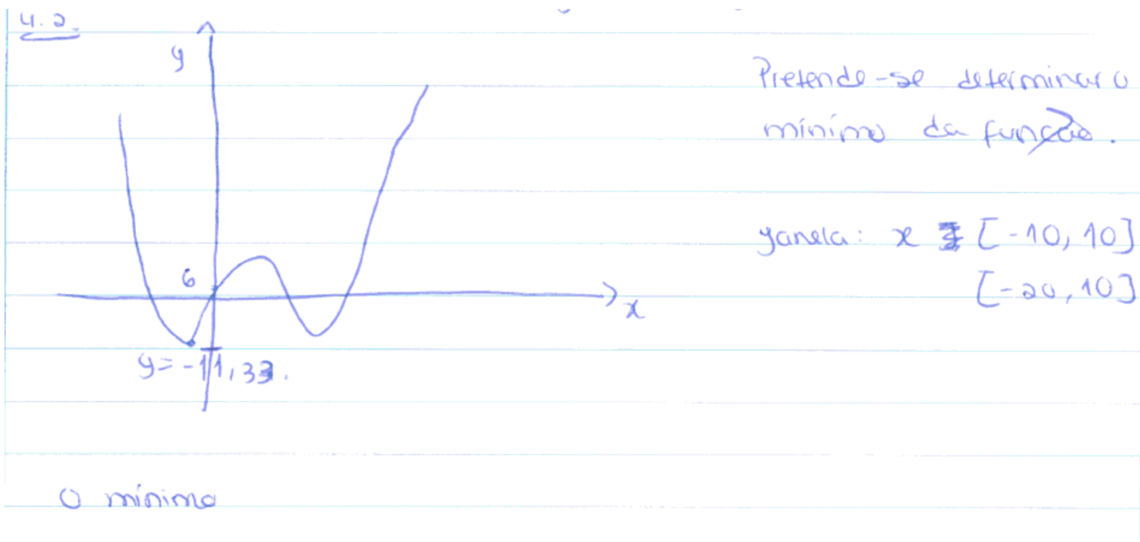


Figura 107 – Resolução da questão 4.2 do teste intermédio de 5 maio de 2010.

Na aula da correção o Francisco questionou a professora acerca da cotação que iria ter na questão por ter apenas indicado na representação gráfica a ordenada do ponto extremante, estando convencido que tinha feito os procedimentos corretamente:

> **Professora**: Eles só pediam o valor de a. (A professora vai buscar os critérios) Assinalou no gráfico o ponto de ordenada mínima, não é? Depois está *a* aproximadamente igual …
> **Francisco**: Pois, eu meti aqui. Não …
> **Professora**: Igual a *a*?
> **Francisco**: Ah, isso não, não devo ter metido, mas é assim, se eu meti assim é porque fui à calculadora fazer o mínimo.
> **Professora**: Mas, o menos doze, vírgula nove aparece lá, é?
> **Francisco**: Aonde?
> **Professora**: No teste?
> **Francisco**: Aparece, no teste. É assim, não aparece menos doze, vírgula nove, porque o meu era a outra versão.
> **Professora**: Ah! (A30_10)

Este exemplo mostra que, mesmo numa fase relativamente avançada do processo de génese instrumental, por vezes surgem problemas relacionados com o processo de instrumentação do artefacto.

Os esquemas desenvolvidos vão sendo adaptados às novas classes de funções que o aluno vai estudando. Por exemplo, na questão 4.2 do teste de 25 de outubro de 2010 (Anexo 15), o Francisco interpretou a situação e compreendeu que deveria determinar o primeiro valor de t para o qual a função $p(t) = 80 + 0,4t + 5\,\mathrm{sen}(0,25t)$

tem um máximo, e, em seguida, o próximo valor de *t* para o qual a função tem um mínimo, apesar de a função não lhe ser familiar:

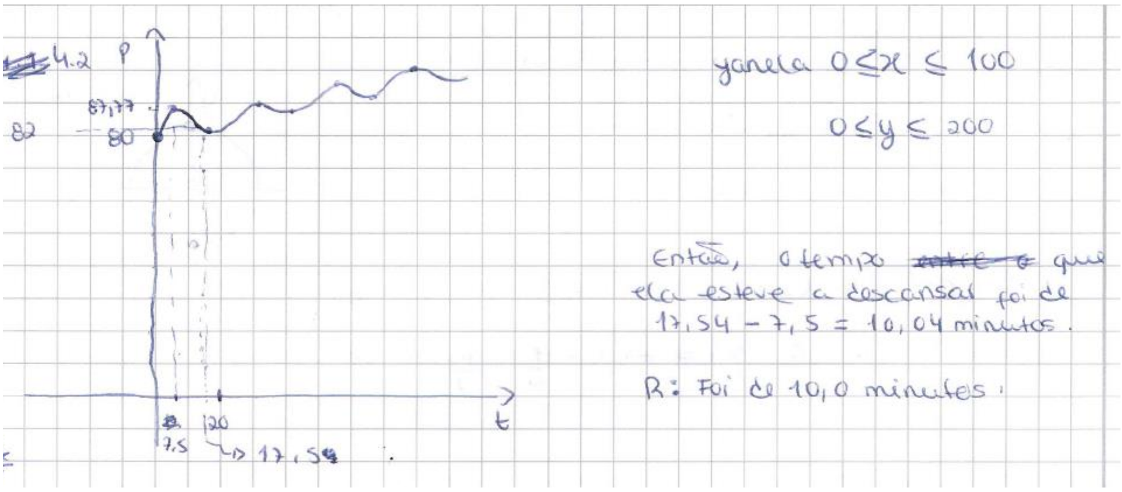


Figura 108 – Resolução da questão 4.2 do teste de 25 de outubro de 2010.

Por vezes, a adaptação dos esquemas a novas classes de funções pode não ser tão imediata como à partida se poderia pensar. Por exemplo, na questão 2.3 da sexta entrevista (Anexo 6), em que eram pedidos os valores inteiros de *k* de modo que a equação $h(x)=k$, sendo $h(x)=\dfrac{20-9x-2x^2}{x-3}$, fosse impossível, o Francisco ficou um pouco indeciso relativamente à possibilidade de determinar os extremos relativos daquela função:

> **Francisco**: […] Seria, os valores de *k*, para ser impossível, seria daqui (aponta o mínimo relativo) aqui (aponta o máximo relativo) (Vai passando de um para o outro com a esferográfica).
> **Investigadora**: Sim? (Pausa longa) Como é que podes determinar esses valores?
> **Francisco**: (Pausa muito longa) Se eu pudesse determinar este valor, aqui (aponta o máximo relativo).
> **Investigadora**: (Pausa longa) Sim. E podes, ou não?
> **Francisco**: Estou a pensar. Isto (aponta o máximo) podia ser um mínimo, mas não, um máximo! Mas (pausa), não pode ser.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Não sei! Mas eu acho que sim. […] É assim, de qualquer das formas, ia tentar o máximo! (E6)

Este episódio sugere que o facto de a representação gráfica não ser familiar pode ser um fator condicionante na adaptação dos esquemas de utilização a novas classes de funções.

8.3.5. Esquemas de utilização relativos à derivada de uma função

O Francisco praticamente não recorreu à calculadora gráfica para obter a derivada de uma função. A única ocasião em que foi possível observar o aluno a utilizar a funcionalidade da derivada, surgiu na aula em que resolveu, em conjunto com o Diogo, a ficha *Derivadas* (Anexo 17). Para obter a representação gráfica da derivada de uma dada função, o Francisco utilizou o seguinte esquema: editou a função original e a função derivada da função original recorrendo à funcionalidade *nDeriv* (ordem a *x*, no ponto variável *x*). Para obter a derivada num ponto x_0, usou o seguinte esquema: editou a função original, editou uma função constante definida pela derivada da função original, em ordem a *x*, no ponto x_0, e com o cursor tentou perceber qual o valor correspondente por meio dessa função, acabando depois por concluir que seria melhor utilizar a funcionalidade *TRACE*.

Fase inicial do processo de génese instrumental

No momento em que o Francisco e o Diogo resolveram a ficha *Derivadas* (Anexo 17) foi possível perceber que ainda não tinham desenvolvido esquemas para tirarem partido das funcionalidades da calculadora gráfica, respeitantes à derivada de uma função. Os alunos determinaram analiticamente a derivada da função definida por $A(x)=\dfrac{228x+4x^2}{x-3}$, mas pretendiam confirmar a correção dos cálculos, comparando a representação gráfica obtida na calculadora com a representação gráfica da função por eles determinada. O Francisco questionou a professora acerca da possibilidade de recorrer à calculadora gráfica:

> **Francisco**: *Stora* (espera que a professora se aproxime), não dá para pedir à máquina para fazer a derivada?
> **Diogo**: Pedir à máquina! (Ri)
> **Professora**: Dá para saber.
> **Francisco**: Dá?

> **Professora**: Dá!
> **Francisco**: É assim, nós fizemos, só que temos dúvidas se é assim que fica, então mais vale fazer a derivada mesmo …
> **Professora**: Ah, mas é assim, não te dá, na calculadora não te dá a derivada, dá-te naquele ponto.
> **Diogo**: Mas vemos se a expressão que nós temos e o que deu, se é igual, o gráfico.
> **Professora**: Mas não tem lá a expressão que vocês obtiveram.
> **Diogo**: Foi esta aqui.
> **Professora**: (Pausa longa) *nDerive.*
> **Francisco**: Ah! Derive.
> **Professora**: Depois põe-se a expressão analítica, da função.
> **Francisco**: Hum, hum. Mas podemos meter, por exemplo, *y2*?
> **Professora**: Pode. Pode pôr.
> **Diogo**: Como?
> **Francisco**: Na *vars*.
> **Professora**: Podes ir à variável e pôr, agora já não me lembro é se, se põe vírgula *x*, eu acho que se põe só, queremos a derivada toda em função a *x*, vamos lá ver, *y1*, não é?
> **Francisco**: É a 2.
> **Professora**: *y2*, não é? *y2*, vírgula …
> **Francisco**: *x*.
> **Professora**: *x*.
> **Diogo**: Onde é que era o *nDerive*? (Pausa) Stora! Ah! Derive.
> **Francisco**: (Pausa) Será que dá, Stora?
> **Professora**: Vê lá, manda fazer. (Obtêm erro) Mas o erro não é daí. Qual é? (Ficam algum tempo calados) […] Pode não estar a dar o gráfico, temos que alterar de maneira a ver.
> **Francisco**: Ah!
> **Professora**: Mas já fez, tem que pôr num ponto, tem que fazer *x*, e agora o número. (A17_11)

Os procedimentos para efetuar a representação gráfica da função derivada foram indicados pela professora, dando início ao desenvolvimento do processo de génese instrumental respeitante a esta funcionalidade. Relativamente à determinação da derivada de uma função num ponto, o Francisco definiu uma função constante idêntica à derivada da função no ponto de abcissa pretendido, contudo, para obter o valor recorreu ao cursor, o que não lhe permitiu uma boa aproximação, acabando por perceber que deveria ter apelado a outra funcionalidade, como o *TRACE*, por exemplo. Este esquema foi aplicado na questão 2.2.1, relativamente à derivada da função $V(h)=10\pi h^2-\frac{\pi h^3}{3}$, no ponto de abcissa um:

Francisco: *Stora*? É vírgula *x*, não é? Vírgula *x*, calculadora? (Não se percebe) Vírgula *x*, vírgula, isto é a derivada no ponto 1 … (não se percebe)
Diogo: Ai, tão linda.
Francisco: Nem viste!
Diogo: Vi, vi, vi, está a passar os pontos todos, eu vi. (Não se percebe).
Francisco: Já estou a vê-la! Isto parece-me um bocado constante. Ó *Stora*, tão horrível, isto parece-me constante!
Professora: O quê?
Francisco: Isto parece-me constante.
Investigadora: Estão a ver a representação gráfica de quê?
Francisco: Da derivada. Ah! No ponto, ok!
Professora: (Pausa longa) O que é que isso deu?
Francisco: Cinquenta e nove, vírgula um, nove, três, cinco, quatro, oito. Não sei se é o caso.
[…]
Professora: Pois, e quando se faz no ponto um, dá sempre uma reta, não é? Desenha sempre a reta constante, eu não sei é se o valor está certo, aquele.
Francisco: Pois, eu fui com o cursor.
Professora: Porque (pausa), porque é que foste com o cursor? […] De qualquer das maneiras, mais valia fazerem num ponto qualquer uma vez que era uma reta constante.
Francisco: Pois. No *trace*.
Professora: Podem ver diretamente no ponto ou ir ao Cálculo. (A17_11)

Recorrendo a este esquema, os alunos obtiveram valores aproximados para a derivada da função nos pontos de abcissas 1 e 2, não conseguindo, contudo, justificar porque é que a derivada no ponto de abcissa 2 é superior à derivada no ponto de abcissa 1 (Figura 109).

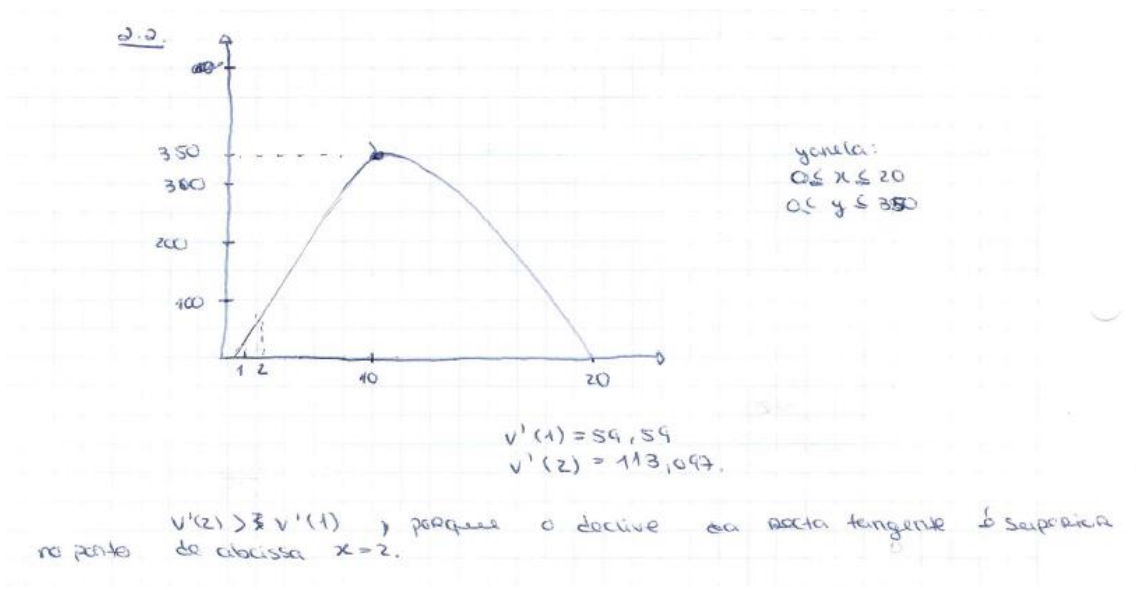


Figura 109 – Resolução da questão 2.2.1, da ficha *Derivadas*, pelo par Francisco e Diogo.

Os dados recolhidos mostram que a utilização da calculadora no que diz respeito à derivada não é usual na atividade do aluno. Noutras situações em que necessitou de recorrer à função derivada, o Francisco fê-lo analiticamente. O aluno não desenvolveu esquemas de utilização para obter a equação da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto, como é possível perceber pela resposta dada quando a investigadora o questionou relativamente a essa possibilidade:

> **Investigadora**: Conseguias confirmar, haa, essa equação com a calculadora? Obter essa equação com a calculadora?
> **Francisco**: Podia tentar. (Pausa longa) Não sei bem como, mas podia fazer a função derivada com a calculadora.
> **Investigadora**: Hum, hum.
> **Francisco**: (Pausa longa) Podia fazer assim. Depois saber o *f* de …
> **Investigadora**: Sim. Eu digo obter mesmo a expressão.
> **Francisco**: Da reta tangente? (Pausa longa) Acho que não.
> **Investigadora**: Não?
> **Francisco**: Não sei, não. (E7, questão 1.3)

O processo de génese instrumental relativamente à funcionalidade derivada iniciou-se no décimo primeiro ano, mantendo-se numa fase inicial.

8.3.6. Síntese

Os esquemas instrumentados desenvolvidos pelo Francisco, no âmbito do trabalho com as funções ao longo dos dois primeiros anos do secundário, envolveram quase exclusivamente a representação gráfica e a utilização do menu *Calc* – cálculo de imagens, determinação de pontos de intersecção dos gráficos de duas funções, determinação de zeros e extremos, e do menu *MATH* – módulo e derivada, juntamente com outras teclas utilizadas na edição da expressão analítica das funções estudadas. O recurso à representação numérica na tabela foi muito reduzido, ocorrendo praticamente numa única situação, numa fase inicial do processo de génese instrumental, quando o aluno pretendia analisar a variação de duas funções de modo a perceber para que valor de *x* a diferença entre elas era máxima. Na altura, o Francisco considerou que, recorrendo a essa representação, "Ia ter muito trabalho" (E2), o que sugere uma preferência por outras representações e funcionalidades da calculadora gráfica.

Os esquemas permaneceram mais ou menos invariantes, sendo adaptados às novas classes de funções com que o aluno foi tomando contacto. Por vezes, surgem dificuldades até o esquema ser adaptado. Por exemplo, até conseguir obter as coordenadas do ponto de interseção de duas representações gráficas em que uma delas não estava definida para determinado valor de *x*, o Francisco obteve por diversas vezes mensagem de erro, já que, nesse caso, a seleção do ponto *Guess*, parte integrante do esquema de utilização da sua calculadora gráfica, era determinante para uma utilização eficiente da calculadora. Foi também possível perceber que, perante a representação gráfica de uma função não familiar, o Francisco ficou indeciso sobre a possibilidade de determinar os extremos relativos, o que revela que a adaptação dos esquemas de utilização a novas funções pode não ser tão imediata como à partida se poderia pensar. Os dados recolhidos não envolveram situações em que o aluno na sua atividade tivesse que substituir o esquema de utilização usual por outro, o que poderia ter acontecido caso surgisse algum tipo de dificuldade devido, por exemplo, às funções envolvidas. No entanto, mesmo no caso referido acima, após algumas tentativas em que obteve mensagem de erro, o aluno conseguiu aplicar o esquema usual.

Os dados sugerem que a complexidade da expressão algébrica pode levar o aluno a não considerar de imediato a hipótese de recorrer à calculadora gráfica.

Também o tipo de função envolvida pode condicionar o apelo a esquemas que, noutras situações, são evocados sem problemas.

A edição de algumas expressões algébricas não foi feita corretamente, o que aconteceu ao longo do tempo, e não apenas numa fase inicial do processo de génese instrumental. No entanto, os dados parecem indicar que os erros envolvendo os parêntesis ficaram a dever-se a dificuldades de ordem conceptual e não propriamente ao processo de génese instrumental referente ao artefacto.

A maioria dos esquemas de utilização engloba os esquemas de enquadramento, uma vez que o menu *Calc* está associado à representação gráfica na calculadora. Os esquemas de enquadramento desenvolvidos pelo Francisco envolvem essencialmente a alteração direta dos valores do retângulo de visualização na janela, através do estabelecimento de conexões entre a representação visualizada na calculadora e a representação algébrica, e, por vezes, com o contexto no caso de um problema. Usualmente o aluno começa por recorrer ao *Zoom ZStandard*, e, caso não consiga uma visualização adequada, vai ajustando os valores mínimos e máximos do retângulo de visualização, através de tentativa e erro, tendo em conta a representação esperada.

8.4. Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada

Nesta secção são identificadas as situações e o objetivo com que o Francisco recorre à calculadora gráfica, no âmbito do trabalho com as funções.

8.4.1. Representação gráfica de uma função

Sempre que foi pedido ao aluno para representar graficamente uma função, este recorreu à calculadora gráfica, mesmo nas questões 2.1.1e 2.1.2 da segunda entrevista (Anexo 2), em que não lhe era dada a expressão algébrica da função *g*. O Francisco optou por efetuar a conversão da representação gráfica de g na representação algébrica, de modo a poder recorrer à calculadora para representar graficamente as funções h e i, dependentes de g: “É assim, podíamos fazer a equação reduzida da reta, desta reta” (E2). Contudo, após efetuar a conversão, a interpretação da notação levantou dificuldades ao aluno, como foi visto na seção 8.3.1, sendo as expressões corretamente introduzidas depois de interação com a investigadora. A representação das funções no referencial dado no enunciado foi feita corretamente, tendo o Francisco decidido alterar o retângulo de visualização inicialmente utilizado (*Zoom ZStandard*), de modo a facilitar a representação gráfica no papel, embora não tenha utilizado exatamente os mesmos valores, nem a mesma escala:

> Então vou alterar a janela, para me enquadrar aqui com este, com esta situação do problema. [...] x mínimo menos seis, o x máximo ficou seis, o y mínimo ficou menos seis e o y máximo ficou seis. (Pausa) Para me enquadrar melhor com o problema. (E2)

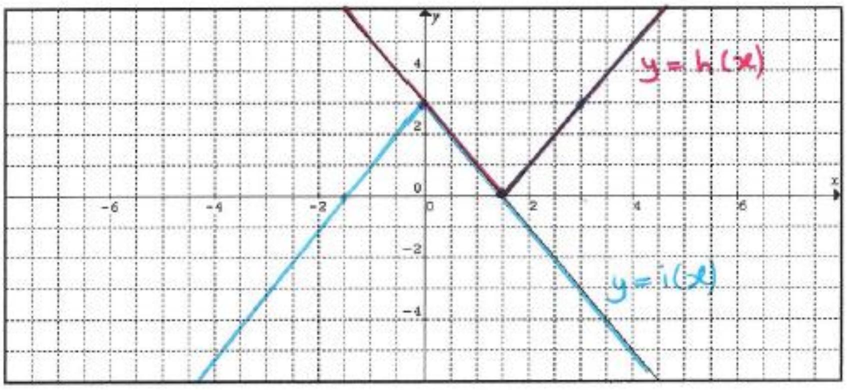


Figura 110 – Representação gráfica das funções *h* e *i* (E2).

De um modo geral, a passagem da representação gráfica na calculadora para a representação no papel, é feita, pelo aluno, considerando uma escala e a determinação de alguns pontos que considera serem relevantes para representar a função. Na Figura 111 encontra-se, por exemplo, a representação da função $p(x) = x^3 - 16x^2 - 2037x - 5940$ proposta na questão 1.1 da parte individual, na quarta entrevista (Anexo 4). O aluno apelou aos esquemas de utilização para determinar os zeros e os extremos relativos da função.

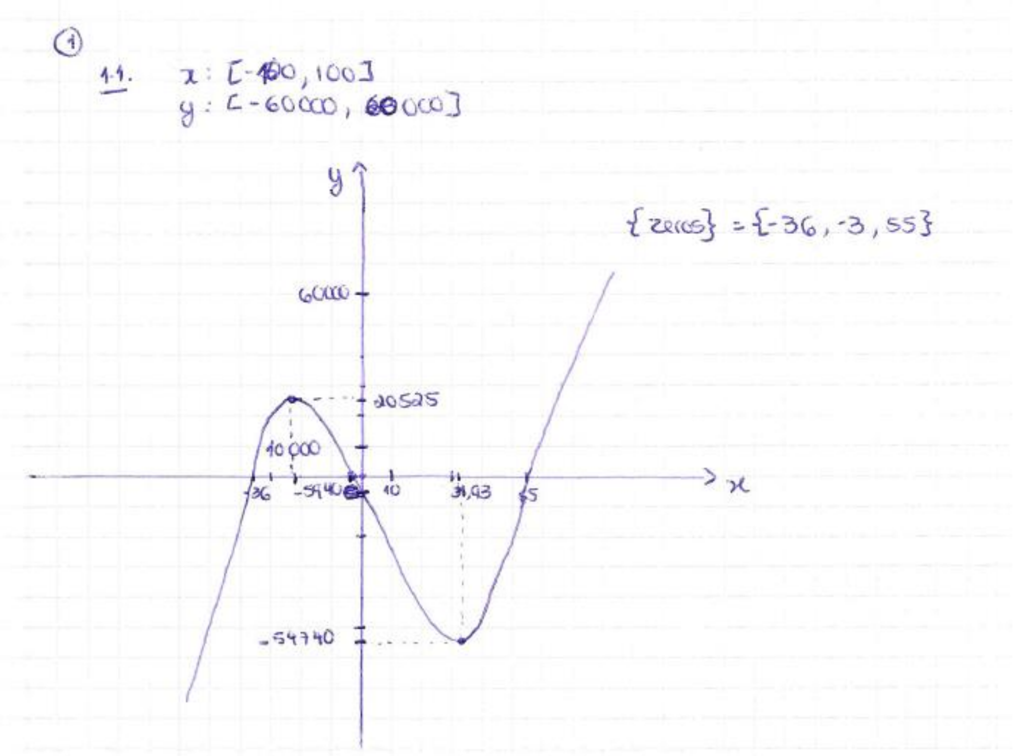


Figura 111 – Representação gráfica da função *p* (E4, parte individual, questão 1.1).

Para além das situações em que era expressamente pedido uma representação gráfica, o Francisco recorreu à calculadora gráfica, em diversas ocasiões, como um instrumento para converter a representação algébrica na representação gráfica.

8.4.2. Confirmação gráfica de resultados obtidos analiticamente

Por vezes o Francisco recorre à calculadora gráfica para confirmar resultados obtidos analiticamente. A confirmação depende, muitas vezes, do tempo que tem disponível para a realização das tarefas, como refere o aluno ao ser questionado relativamente à confirmação da expressão obtida na questão 2.2 da terceira entrevista (Anexo 3):

> **Investigadora**: Confirmavas depois, ou não?
> **Francisco**: Sim, na calculadora (pega na máquina).
> **Investigadora**: Confirmavas mesmo, ou, ou vais confirmar porque eu perguntei?
> **Francisco**: Se tivesse tempo, se tivesse tempo, iria confirmar. (E3)

A confirmação fica também dependente da familiaridade com os procedimentos analíticos. O Francisco refere que, em geral, resolve as tarefas analiticamente, mas quando lhe surgem dúvidas, e tem as expressões analíticas, recorre à calculadora para confirmar os resultados:

> **Francisco**: Normalmente costumo trabalhar mais analiticamente, mesmo porque os exercícios normalmente, que se pedem, é sempre, mas sempre que eu tenho dúvidas, vou sempre, pronto, gosto sempre de ir à calculadora, principalmente, pronto, nestes aqui [questão 1.5], quando não tenho a certeza, os exercícios são mais complexos, faço analiticamente, e depois confirmo sempre com a calculadora, quando tenho as expressões analíticas. (E6)

O Francisco refere que, em particular no décimo primeiro ano, tem recorrido à calculadora para confirmar a resposta nas questões de escolha múltipla: "[…] costumo principalmente utilizar a máquina de calcular, como às vezes até …, este ano, pelo menos, tenho feito as coisas mais rapidamente, portanto claro que eu vou sempre verificar as escolhas múltiplas" (E8).

Familiaridade com os procedimentos analíticos

Nas situações em que os procedimentos analíticos já são familiares, o aluno não mostra preocupação em confirmar os resultados. Por exemplo, resolveu as questões 1.3 e 1.4 da sexta entrevista (Anexo 6) analiticamente, não mostrando intenção de confirmar os resultados, o que sugere confiança relativamente aos procedimentos utilizados:

1.3.

$P = 2\pi R$

$6,8\pi = 2\pi \times R \Leftrightarrow \frac{6,8\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = R \Leftrightarrow 3,4 \text{ cm} = R.$

$3,4 = \frac{4t+5}{t+2} \Leftrightarrow \frac{4t+5}{t+2} - \frac{3,4}{(t+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{4t+5}{t+2} - \frac{3,4t - 6,8}{t+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4t - 3,4t - 6,8 + 5}{t+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{0,6t - 1,8}{t+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,6t - 1,8 = 0 \wedge t+2 \neq 0 \Leftrightarrow 0,6t = 1,8 \wedge t \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 3 \wedge t \neq -2 \Leftrightarrow t = 3 \text{ s}.$

1.4. $\frac{4t+5}{t+2} = \frac{5t+1}{t+3} \Leftrightarrow \frac{4t+5}{t+2}_{(t+3)} - \frac{5t+1}{t+3}_{(t+2)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4t^2+5t+12t+15-5t^2-t-10t-2}{(t+2)(t+3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-t^2+6t+13}{(t+2)(t+3)} = 0 \Leftrightarrow t = 7,69 \wedge (t+2)(t+3) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 7,69 \wedge t+2 \neq 0 \wedge t+3 \neq 0 \Leftrightarrow$

Caux: $-t^2+6t+13 = 0 \Leftrightarrow$ $\qquad \Leftrightarrow t = 7,69 \wedge t \neq -2 \wedge t \neq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \approx -1,69 \vee t \approx 7,69.$ $\qquad \Leftrightarrow t = 7,69$ s.

R: As manchas atingiram a mesma dimensão aos 7,7 segundos.

Figura 112 – Resolução das questões 1.3 e 1.4 (E6).

Ainda assim foi possível observar o aluno a recorrer à calculadora para confirmar resultados obtidos por procedimentos analíticos que, aparentemente, já deviam ser bastante familiares, como é o caso dos zeros da expressão $-2x^2 + 2x$ (Figura 113), presente na questão 1.2 da sétima entrevista (Anexo 7):

> **Francisco**: […] Haaa, posso começar pela última (denominador) porque é, a que eu no fundo sei, logo à partida. (Iguala a zero o denominador) E não sei se sei!
> **Investigadora**: Então, porquê esse comentário?
> **Francisco**: (Ri) Porque é verdade. (Resolve a equação analiticamente) Porque eu já, eu acho que se pode fazer assim. (Acaba de resolver e pega na máquina) Eu normalmente vou sempre ver à calculadora. (Introduz a expressão e visualiza a representação gráfica) Eu introduzi a expressão menos *x* ao quadrado mais dois *x*, e, através da representação gráfica ia ver os zeros, mas consigo ver facilmente pelo gráfico, não preciso de ir calcular na calculadora, e, pelos vistos até acertei. (E7)

1.2.

$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x+2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x = -2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Figura 113 – Determinação dos zeros do denominador (E7, questão 1.2).

Pouca familiaridade com os procedimentos analíticos

Enquanto as questões 1.3 e 1.4 da sexta entrevista foram resolvidas pelo Francisco sem que este tenha mostrado intenção de confirmar os resultados que obteve, o mesmo não se verificou relativamente à questão 1.5 (Figura 114).

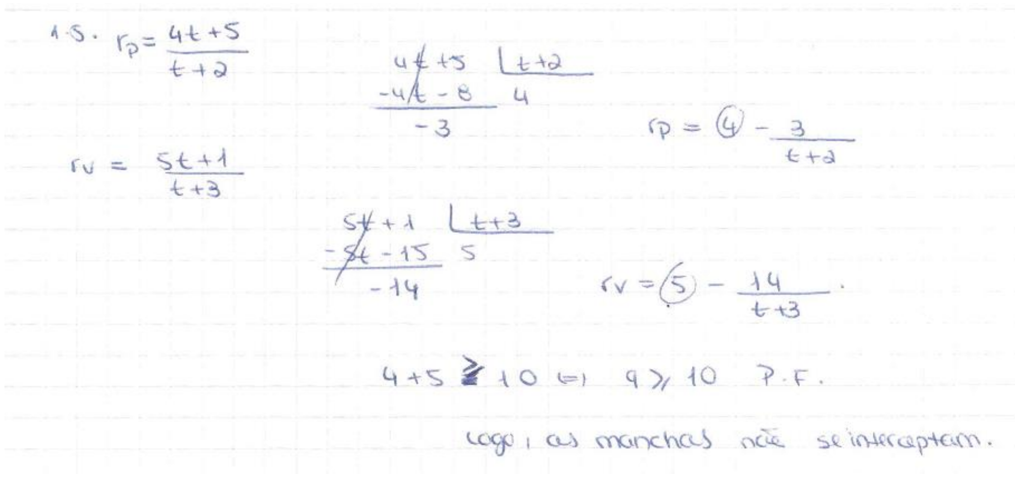


Figura 114 – Resolução da questão 1.5 (E6).

Neste caso, depois de ter efetuado o tratamento algébrico das duas expressões, o Francisco concluiu que as duas manchas não se iriam intersetar, mas preferiu confirmar graficamente os resultados que as expressões analíticas lhe sugeriam:

> **Francisco**: Pronto, agora já sei as assíntotas horizontais, que são o cinco e o quatro, agora, tecnicamente imagino na representação gráfica, que o raio só poderá alcançar, em princípio, o cinco ou o quatro. Mas é melhor eu verificar sempre na calculadora, porque pronto … (pausa), posso?
> **Investigadora**: Sim, sim. (O aluno pega na máquina) Tu vais confirmar no fundo o quê?
> **Francisco**: Vou confirmar as minhas suspeitas (ri). Pronto, vou confirmar se o limite mesmo para o raio, poderá ser quatro, no caso da preta, e cinco no caso … porque a hipérbole pode estar construída de maneira diferente (faz um gesto com os dedos) do que eu estou a pensar. (E6)

O Francisco conseguiu converter a calculadora gráfica num instrumento que lhe permitiu confirmar graficamente as conclusões obtidas por via analítica, mostrando compreender a noção de assíntota horizontal e o modo de a conseguir percecionar na calculadora. Embora não tenha atendido ao domínio das funções na escolha dos valores para o retângulo de visualização, conseguiu interpretar corretamente a situação tendo em conta o contexto:

> **Francisco**: (Edita a expressão, visualiza em *Zoom ZStandard*, faz um gesto com a mão como que percorrendo a representação) Eu acho que sim! (Edita a outra e seleciona apenas essa, visualiza) Vou ajustar a janela um bocadinho mais para cima (coloca o *y* máximo 15, visualiza) Ainda não me permite tirar muitas conclusões! Mas vou fazer para valores (vai à janela e coloca *x* mínimo menos mil e máximo mil), muito baixos, e muito elevados e vou colocar a reta de equação *y* igual a cinco (visualiza), para ver se realmente ela, tende, e tende, pronto! Haaa, assim já sei que cinco, que se confirma que o máximo que o raio pode atingir é quatro e cinco, porque também, isto é em função do tempo, e embora a hipérbole tenha, ou possa possuir valores (volta a visualizar a representação, coloca *Zoom Zstandard*) para cima, ou seja, positivos, mas é, pressupõe-se que seja com tempo negativo (aponta no visor), e tempo negativo não existe, por isso só posso considerar a parte positiva do gráfico (faz um gesto pela representação no visor com *x* positivo). (E6)

A preocupação em confirmar graficamente os resultados quando ainda não está familiarizado com os procedimentos analíticos é evidente no caso da questão 1.2 da ficha Derivadas (Anexo 17), realizada em conjunto com o Diogo. Nessa questão, para além da confirmação gráfica do mínimo da função correspondente à área total da página, os alunos confirmaram também se a representação gráfica da função derivada obtida através das regras de derivação, recentemente abordadas, coincidia com a representação gráfica obtida através da calculadora. Nesse caso tiveram que pedir ajuda à professora pois ainda não tinham desenvolvido esquemas para essa funcionalidade do artefacto, como foi visto na secção 8.3.5.

Por vezes, a confirmação pode ficar dependente do aluno se encontrar ou não consciente da sua familiaridade com os procedimentos analíticos. Por exemplo, observando a resposta do aluno na questão 4 do teste de 25 outubro de 2010 (Anexo 15), é evidente que não compreendeu a relação entre o intervalo de números reais e os respetivos quadrantes no círculo trigonométrico, o que sugere que, na altura, não estava familiarizado com os procedimentos necessários para resolver uma equação trigonométrica num dado intervalo (Figura 115). No entanto, o aluno não terá feito a confirmação gráfica, apesar de, como referiu, ser hábito confirmar as escolhas múltiplas. Claro que podem ter sido outros fatores a condicionar a confirmação, como o tempo ou até o facto de ser uma questão envolvendo trigonometria.

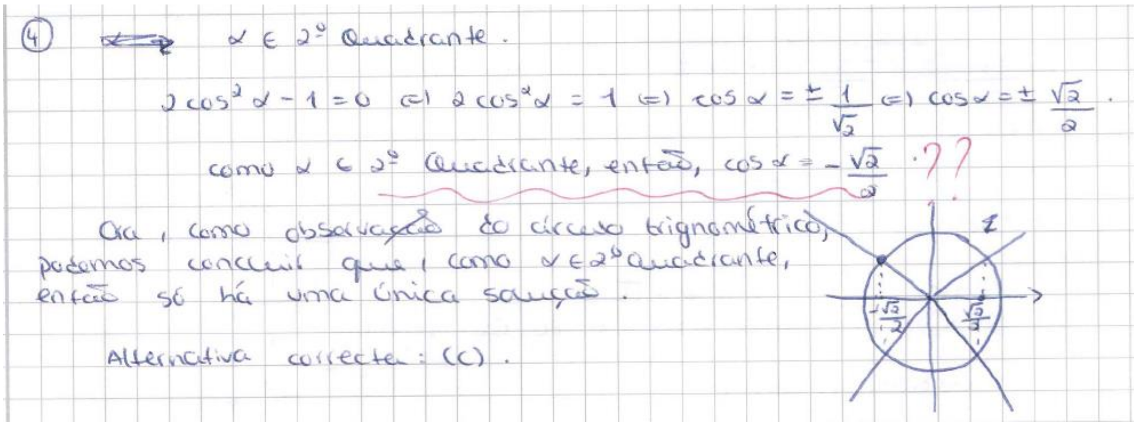


Figura 115 – Resolução da questão 4 do teste de 25 de outubro de 2010.

8.4.3. Situações matemáticas que o aluno não consegue resolver analiticamente

Esta categoria abrange as situações que o aluno não consegue resolver por não ter ainda conhecimentos analíticos para o fazer, e as situações em que a calculadora gráfica surge como um recurso por não conseguir resolver algebricamente, apesar de conhecer os procedimentos analíticos.

Situações para as quais não tem conhecimentos para resolver analiticamente

O Francisco utilizou a calculadora gráfica para resolver diversas situações em que não conhecia os procedimentos para uma resolução analítica, por exemplo, para a determinação de extremos de funções, como foi possível constatar na questão 3.3 da terceira entrevista (Anexo 3). O aluno determinou o máximo da função apelando aos esquemas de utilização, como foi visto na secção 8.3.4, obtendo as dimensões do triângulo de área máxima, e concluindo que deveria ser equilátero, apesar de ter trabalhado com valores aproximados (Figura 116).

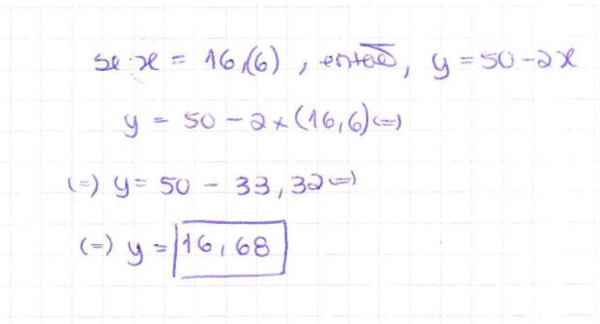


Figura 116 – Determinação das dimensões do triângulo isósceles de área máxima (E3, questão 3.3).

No final da entrevista o aluno refere que a calculadora gráfica foi indispensável para a resolução da questão: “Pelo menos a, principalmente aqui a três, da, depois de determinar a área” (E3).

Situações que não consegue resolver analiticamente

Os dados recolhidos revelam duas situações, no trabalho de pares com o Diogo em que, após tentativa de resolução analítica, os alunos optaram por recorrer à calculadora gráfica. Uma delas ocorreu na questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas* (Anexo 17) e a outra na questão 2.1 da ficha *Derivadas* (Anexo 17), relativamente a uma equação trigonométrica e uma equação cúbica, respetivamente. Em qualquer das situações era necessário recorrer a informação proveniente da calculadora para prosseguir a resolução analítica, o que pode ter contribuído para que os alunos não tenham conseguido avançar por essa via, optando antes por mudar de registo de representação, embora só numa das questões tenham apresentado a representação gráfica no papel (Figura 117 e Figura 118).

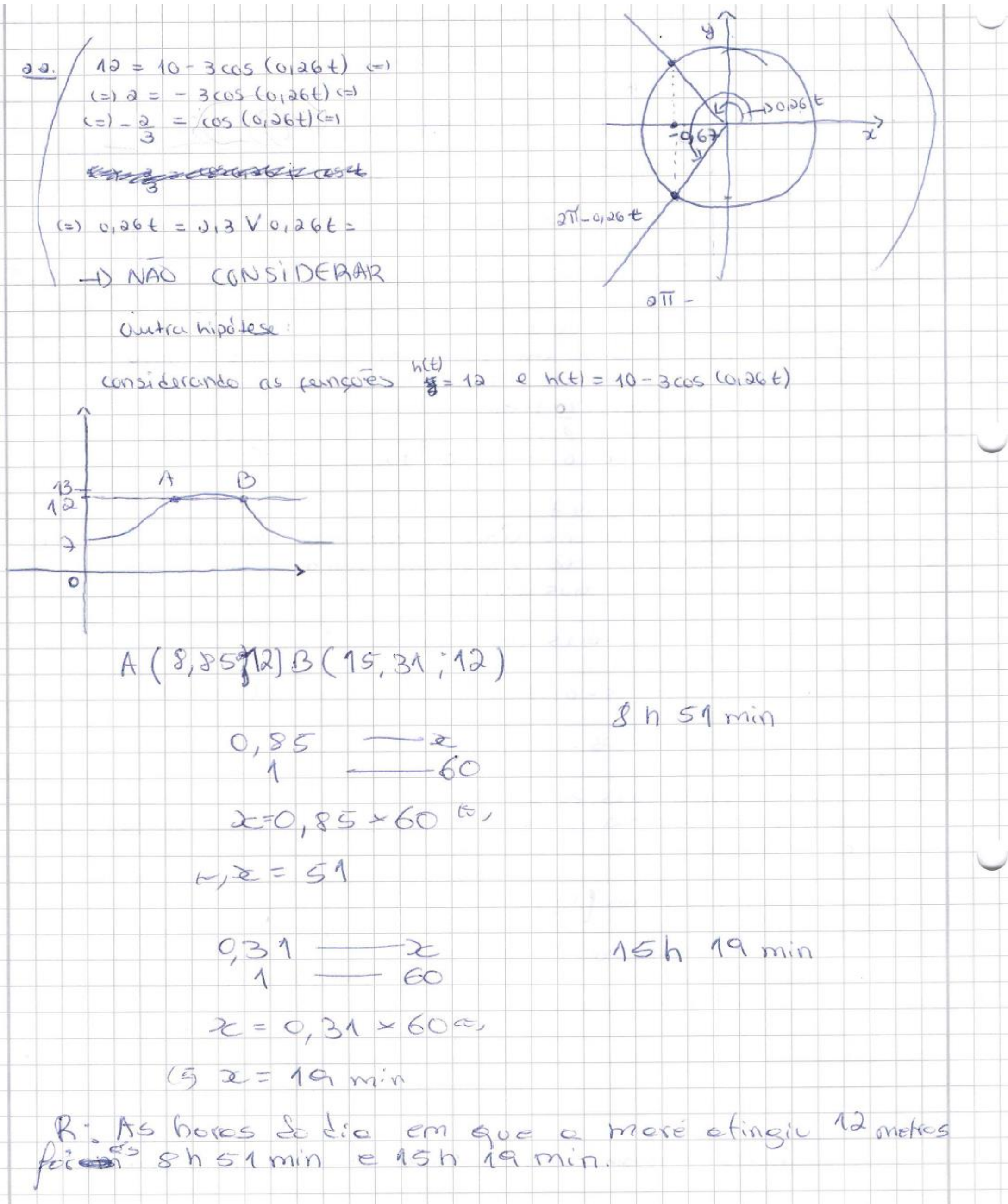


Figura 117 – Resolução da questão 2.2 da ficha *Funções Trigonométricas*, pelo par Diogo e Francisco.

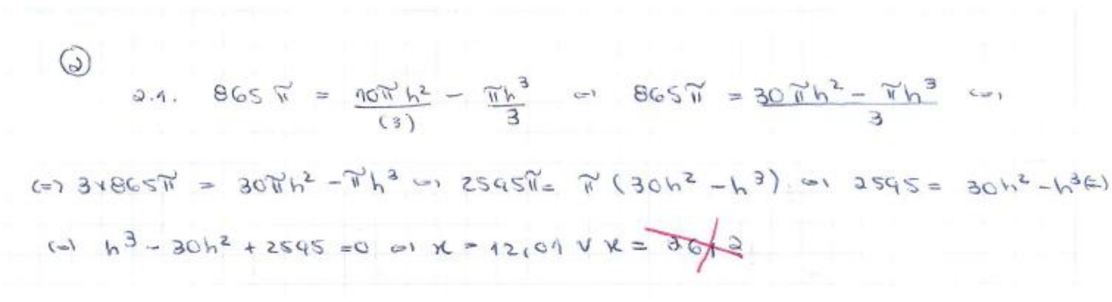


Figura 118 – Resolução da questão 2.1 da ficha *Derivadas*, pelo par Diogo e Francisco.

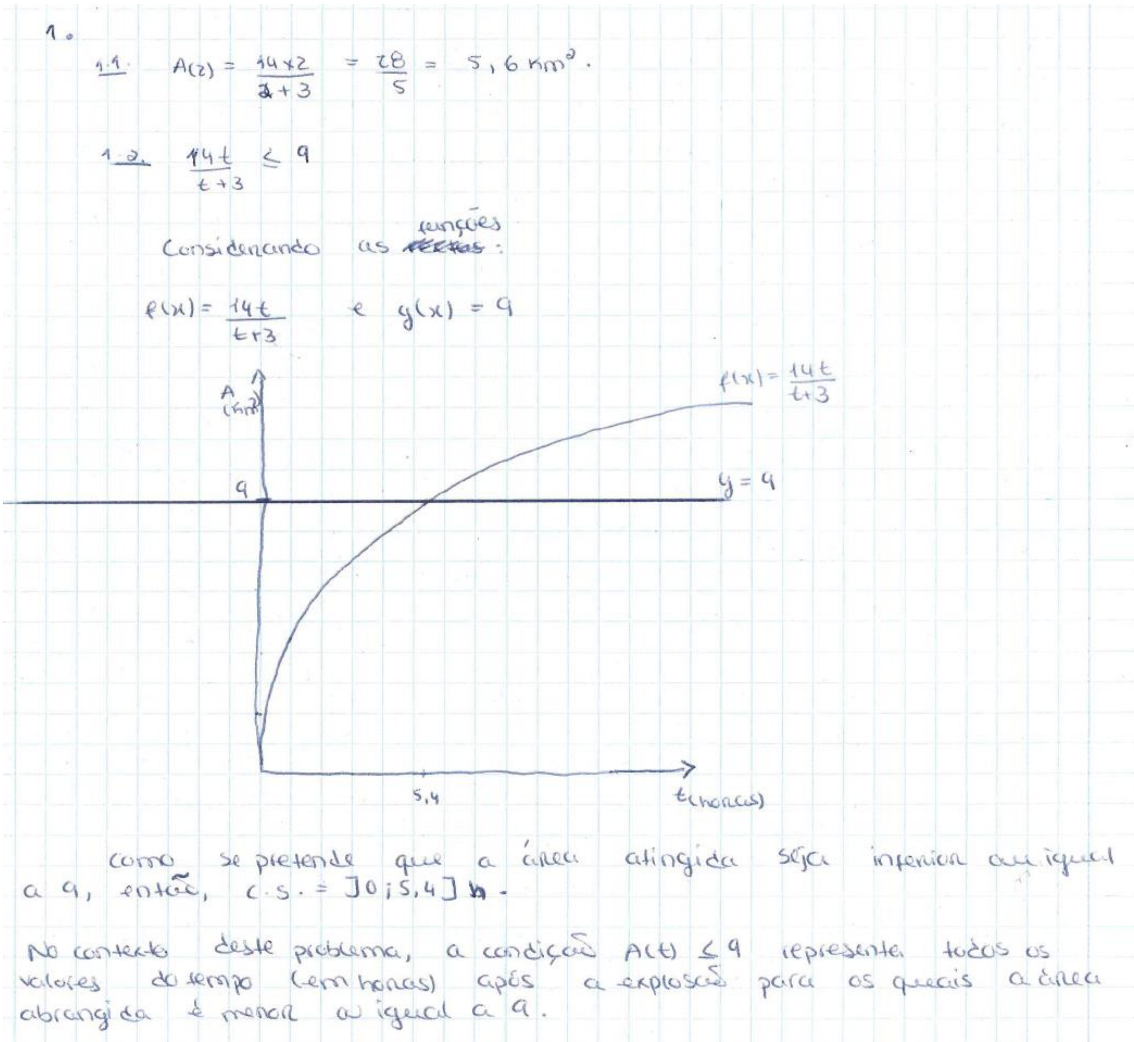
Na equação cúbica os alunos cometeram um pequeno erro ao equacionar o problema, escrevendo o valor 625π e não 624π dado no enunciado. O número de soluções obtido pelo par ficou dependente da janela de visualização, o que mostra que os alunos não tiveram em conta o domínio da função, no contexto, já que a segunda solução só foi riscada depois de interação com a investigadora.

Na ficha *Funções Racionais* (Anexo 17), resolvida em conjunto com o Diogo, cada um dos alunos começou por abordar a inequação fracionária, presente na questão 1.2, de modo diferente. O Diogo optou logo por recorrer à calculadora gráfica, enquanto o Francisco procurava perceber, consultando o caderno, como é que podia resolver a inequação analiticamente:

> **Diogo**: Área contaminada, desde o segundo zero até …
> **Francisco**: Não. Desde o início da explosão até (pausa), até t horas.
> **Diogo**: Até ter alastrado a 9 m, 9 km quadrados. (Pausa) espera aí, está um bocado mau. (pausa longa, lê outra vez o enunciado, pausa longa) Mas isto vai ter aqui muitos valores, no conjunto solução.
> **Francisco**: Pois vai! (Pausa) Ou não!
> **Diogo**: Espera aí, deixa-me fazer com a calculadora. (Começa a trabalhar com a máquina durante algum tempo)
> **Investigadora**: Então, que fazem?
> **Diogo**: Agora estava, eu, estava a introduzir a expressão na calculadora.
> **Investigadora**: Para ver o quê?
> **Diogo**: Para ver o gráfico, e ver, quando é que o *A*, é igual a nove, para ver os valores que estão situados abaixo.
> **Investigadora**: Hum.
> **Diogo**: Agora tenho que ajustar a janela.
> **Investigadora**: E tu Francisco, o que é que estás a fazer?
> **Francisco**: Estou a fazer analiticamente.
> **Investigadora**: Já não te recordas bem, estás aí de volta do caderno (ri), é isso?
> **Francisco**: É isso mesmo! Porque eu para mim fazia como fazia dantes, que era (não se percebe o diz), trocava de membro, mas pronto, não posso fazer isso. (A7_11)

O Francisco continuou durante algum tempo a folhear o caderno, mas entretanto optou por recorrer também à calculadora gráfica, sendo esse o método de resolução que os alunos apresentam (Figura 119). O excerto seguinte mostra o par a tentar interpretar o problema de modo a obter o conjunto solução da inequação. A sugestão do Diogo de incluir o zero não foi depois considerada como é possível ver no conjunto solução apresentado pelos alunos.

> **Diogo**: Aqui o *x* pode variar entre o quê? Entre zero, e, infinito, não é? Mais infinito.
> **Francisco**: Era isso que eu estava a pensar, se me deu isto, para valor nove, para valores maior ou igual a nove, o tempo vai dar …
> **Diogo**: Maior?
> **Francisco**: Hum.
> **Diogo**: Não, menor ou igual a nove.
> **Francisco**: Menor ou igual a nove, o tempo só pode variar entre …
> **Diogo**: Zero e cinco ponto quatro.
> **Francisco**: E cinco ponto quatro horas.
> **Diogo**: Sim.
> (Ficam algum tempo calados)
> **Diogo**: Eu não sei é indicar isto muito bem! (Pausa longa) O zero inclui? Está incluído? (Pausa) Está! No momento zero, ainda não se espalhou nada.
> **Francisco**: (Não se percebe) …Não pode estar incluído.
> **Diogo**: Pode!
> **Francisco**: Não, acho que (não se percebe), acho que o cinco vírgula quatro é que é, fechado.



1.

1.1. $A(2) = \frac{14\times 2}{2+3} = \frac{28}{5} = 5,6\ km^2$.

1.2. $\frac{14t}{t+3} \leq 9$

Considerando as ~~rectas~~ funções:

$f(x) = \frac{14t}{t+3}$ e $g(x) = 9$

Como se pretende que a área atingida seja inferior ou igual a 9, então, C.S. =]0;5,4].

No contexto deste problema, a condição $A(t) \leq 9$ representa todos os valores do tempo (em horas) após a explosão para os quais a área abrangida é menor ou igual a 9.

Figura 119 – Resolução da questão 1.2 da ficha *Funções racionais*, pelo par Diogo e Francisco.

8.4.4. Instrumento facilitador de certos procedimentos

Os dados recolhidos indicam que o Francisco habitualmente opta por uma resolução analítica, sendo essa tendência mais evidente no décimo primeiro ano, pelo menos quando já tem alguma familiaridade com os procedimentos analíticos. No entanto, nalgumas ocasiões o aluno recorreu à calculadora gráfica na atividade com funções para realizar, mais fácil ou rapidamente, determinados procedimentos, tais como resolução de equações ou inequações, estudo do domínio e do contradomínio de funções, estudo do sinal, entre outros. Por exemplo, sempre que é necessário aplicar a fórmula resolvente, o Francisco recorre à calculadora. Relativamente à equação proposta na questão 1.3 da quarta entrevista, parte individual (Anexo 4), o aluno questiona se poderá resolver graficamente por ser mais rápido: "Este poderia, posso fazer na calculadora? É mais rápido!" (E4). Efetivamente, tendo já a representação gráfica da função *p*, o aluno conseguiu rapidamente indicar o número de soluções da equação:

> **Francisco**: Haa, vou introduzir na calculadora a função *y* igual a menos quinhentos, haa, cinquenta e nove mil, não, menos cinco mil novecentos e quarenta … (edita a função).
> **Investigadora**: Porque é que vais fazer isso?
> **Francisco**: Para calcular a intersecção entre estas duas funções. Sendo assim já tenho os valores em que, haa (pausa), o número de soluções para a equação. Portanto, o número de soluções são três.
> **Investigadora**: São três soluções, porquê?
> **Francisco**: Porque intersecta três vezes a função, *p* de *x*. (E4)

As soluções aproximadas da equação foram também obtidas rapidamente, apesar de o Francisco ter tido algumas dificuldades em lidar com a aproximação devolvida pela máquina, em particular relativamente à aproximação devolvida em notação científica pela calculadora para o valor zero:

> **Francisco**: E agora é calcular a intersecção (pega na calculadora), entre as duas funções. (Efetua os procedimentos) Isto não dá um valor certo, vou fazer outra vez para ver se é mais aproximado. (Volta a calcular)
> **Investigadora**: E teria que dar um valor exato?
> **Francisco**: Não. (Risos) Mas era mais fácil. Portanto, a primeira intersecção (pausa), "com erro inferior a uma milésima" (pausa), fica, o primeiro, a primeira intersecção fica *x* igual a menos trinta e sete, vírgula oito, três (pausa), sete. (Efetua os procedimentos para a segunda interseção mas fica surpreendido) Isto está-me a dar um número … […] Dá-me, dá um valor (pausa), estranho. O melhor é ir à janela para aproximar. Vou pôr menos cinquenta e cinquenta.
> **Investigadora**: Em quê? Em que variável?
> **Francisco**: No *x*. (Observa o visor) É mais fácil calcular aqui (aponta para a intersecção, efetua os procedimentos)
> **Investigadora**: E agora?
> **Francisco**: Agora calculei a intersecção. (Anda com o cursor) Agora já dá diferente.
> **Investigadora**: Quanto é que deu?
> **Francisco**: Deu-me menos trinta e sete, expoente menos catorze. É um número … […] É um número muito estranho. (E4)

A calculadora gráfica foi convertida num instrumento eficaz para determinar, de forma relativamente rápida, as soluções da equação (Figura 120), embora a aproximação devolvida ainda tenha provocado algum conflito ao aluno.

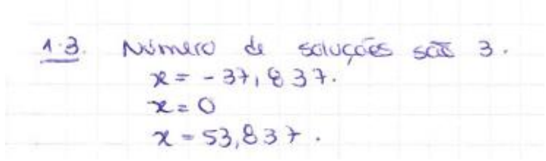


Figura 120 – Soluções da equação $p(x) = -5940$ (E4, parte individual, questão 1.3).

Na sexta entrevista, questão 2.1, relativa à função *g* (Anexo 6), o Francisco optou por recorrer ao algoritmo da divisão inteira de polinómios, contudo, após efetuar o tratamento da expressão analítica da função, contrariamente à sua tendência habitual, optou por determinar o contradomínio recorrendo à representação gráfica, o que pode ter acontecido por já não se recordar dos procedimentos para determinar o vértice de uma parábola ou por considerar mais fácil recorrer à calculadora:

> **Francisco**: […] O contradomínio (pausa longa), seria algo (pega na máquina, pausa longa), que eu preferia ver na calculadora se pudesse ser.
> **Investigadora**: Sim, sim, podes ver.
> **Francisco**: Então vou usar a primeira (edita a expressão), “menos x ao cubo, mais dois x ao quadrado, mais x, menos dois a dividir por x mais um” (visualiza, pausa longa), agora, ia (pausa longa) calcular o máximo, da função:
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: (Efetua os procedimentos para determinar o máximo) E ia-me dar um, vírgula cinco, não, não ia nada, o máximo ia-me dar vinte e cinco.
> **Investigadora**: Vinte e cinco?
> **Francisco**: (Observa) Zero, vírgula vinte e cinco (risos).
> **Investigadora**: Ok, então o contradomínio?
> **Francisco**: O contradomínio seria de (pausa), menos infinito até zero, vírgula vinte e cinco. (E6)

É possível perceber, contudo, várias situações onde o aluno apesar de considerar que uma resolução gráfica seria mais fácil, opta por uma resolução analítica. Por exemplo, na sétima entrevista, questão 1.4 (Anexo 7), o aluno optou por resolver analiticamente, e, ao ser questionado se poderia resolver por outro processo, refere que poderia resolver graficamente e que até seria mais fácil.

8.4.5. Exploração de situações problemáticas

A calculadora gráfica foi utilizada pelo Francisco para explorar algumas situações problemáticas. Estão nesta categoria as situações de investigação sobre os efeitos de um parâmetro na representação gráfica dos elementos de uma família de funções; as situações em que o aluno não tem uma estratégia de resolução delineando-a após a visualização da representação gráfica na calculadora e as situações em que a calculadora gráfica é usada para estabelecer, confirmar ou refutar conjeturas, nomeadamente a partir da exploração da situação problemática a partir de casos mais simples.

Investigações sobre os efeitos de um parâmetro na representação gráfica de uma família de funções

A calculadora gráfica foi usada pelo Francisco para testar os efeitos de um parâmetro na representação gráfica dos elementos de famílias de funções. Na quarta entrevista, parte conjunta, o Francisco seguiu a sugestão dada pelo Diogo de experimentar várias expressões para estudar os efeitos do parâmetro *b* na família de funções $y = x^2 + bx + 1$, questão 1.1 (Anexo 4). Inicialmente o Francisco não atende ao facto de o coeficiente diretor na família de funções ser 1, acabando por concordar com o colega quando este o assinala. As conclusões retiradas pelo par basearam-se, no entanto, apenas em dois casos particulares ($b = -2$ e $b = 2$), o que revela pouco familiaridade com este tipo de questões:

> **Francisco**: Então consideremos a expressão, diz aí uma expressão (pausa), como exemplo. […] Experimenta a expressão três *x* ao quadrado, mais dois *x*, mais um.
> **Diogo**: Três *x*? Não, porque o *x* já não altera, vais é variar o b.
> **Francisco**: Pronto! (Pausa longa) a dois *x* (pausa, vai digitando na calculadora), mais dois *x*, mais um, e agora metemos …
> […]
> **Diogo**: É na, no deslocamento da, da parábola. (Pausa) No eixo dos *yy*, certo?
> **Francisco**: Não!
> **Diogo**: Sim.
> **Francisco**: No eixo do *x*.
> **Diogo**: Do *x*. É isso. *Stora*, já chegámos a uma conclusão (riem). (E4, parte conjunta)

Quando a investigadora os questionou sobre os valores que tinham atribuído ao parâmetro *b*, o Diogo decidiu atribuir mais valores, o que lhes permitiu, por um lado, verificar que a conclusão tirada com base nos dois casos particulares não é válida, e, por outro lado, compreender melhor os efeitos do parâmetro:

> **Diogo**: Estás a ouvir? Não concordas? Que o módulo do número que é o *b*, faz com que ele ande mais para baixo. Porque é assim, eu meti cinco *x* (pausa) menos, e meti mais, e depois no gráfico são estas duas aqui equivalentes (aponta para o visor), estão as duas para baixo do eixo dos *yy*, para baixo do eixo do *x*. E depois meti o sete, que é maior, é um valor absoluto, e também foi ainda mais para baixo, o vértice.
> **Francisco**: Logo quanto maior for o valor, maior for o módulo do valor …
> **Diogo**: Mais se desloca para baixo. (E4, parte conjunta)

Apesar de terem atribuído mais valores ao parâmetro b, todos eles foram números inteiros. O Francisco ainda conseguiu relacionar a abcissa do vértice com o valor de *b* mas não a ordenada:

> **Francisco**: Que quando o *b* é negativo (pausa), a parábola desloca-se, quando o *b* é negativo a parábola desloca-se para a esquerda, porque é menos, menos, vai dar mais.
> **Investigadora**: Não sei, vê (ri).
> **Diogo**: É só para dizer o que é que influencia, influencia os deslocamentos da parábola.
> **Investigadora**: De que maneira?
> **Diogo**: No eixo do *y*, e do *x* também.
> **Francisco**: Quando o, o *b* é negativo, a parábola, ou a função desloca-se para a direita, quando é positivo desloca-se para a esquerda, ou não? (Volta à calculadora) Só preciso de ver uma coisa, (volta à calculadora durante um longo tempo) então? Calcular o zero, calcular o mínimo, hum! Dá (pausa) menos dois. […] Estava a tentar ver, em relação aos, ao mínimo da função, portanto, aqui dava *x* igual a menos dois quando a expressão, quando o *b* é igual a quatro. Quando o *b* é igual a quatro. E neste caso, quando o (pausa), *x* é igual, quando o *b* é igual a um ou a menos um, (manuseia a calculadora) a parábola sobe, mas para onde? E o *x* do vértice fica zero, vírgula cinco. (Pausa longa) Eu estou a chegar lá! Ou não! (Pausa) Quando o *b* igual a um, então? Um a dividir por dois, estou a chegar lá. […] Pois! (Pausa) Mas só me faltava ver porque é que aquilo descia. (E4, parte conjunta)

Numa situação semelhante, questão 1.3 da quinta entrevista (Anexo 5), realizada também em conjunto com o Diogo, a estratégia inicialmente adotada mostrou alguma evolução relativamente à situação anterior, com o Francisco a considerar atribuir dois valores positivos e um valor negativo aos parâmetros, e o Diogo a pretender atribuir o valor zero, embora neste caso tal não fizesse sentido:

> **Francisco**: (Pausa longa) Eu acho que o melhor é … (Pausa) Acho que a melhor maneira de resolvermos aqui é …
> **Diogo**: (Risos) É?
> **Francisco**: É dar valores. Primeiro, considerar esta função (aponta no enunciado para a primeira expressão), e darmos diferentes valores, para vermos quais são as alterações, as alterações que vão dar em cada gráfico. E depois fazemos aqui (aponta para a segunda expressão) também, e depois podemos tirar algumas conclusões. […] Eu estava a pensar fazer primeiro dois positivos e depois fazer um negativo, para ver a alteração que pode causar na função.
> **Diogo**: Já agora o zero, que vai ser zero!
> **Francisco**: Não, mas no meu …
> **Diogo**: No meu vai ser zero.
> **Francisco**: Mas no meu tem que ser diferente de zero, o *c*.
> **Diogo**: Ah! Ok, o meu também. (Risos) Boa, Diogo! (E5, questão 1.3)

Apesar dessa ligeira evolução, os alunos continuaram a evidenciar uma predisposição para efetuar generalizações a partir de uma quantidade reduzida de casos particulares, continuando também a considerar apenas valores inteiros para os parâmetros.

Situações para as quais não tem uma estratégia de resolução delineando-a a partir da representação gráfica visualizada na calculadora

Perante a questão 2.3 da sexta entrevista (Anexo 6), o Francisco começou por delinear uma estratégia de resolução analítica, convencido que a função teria uma assíntota horizontal:

> **Francisco**: “*h* de *x* igual a *k*” (pausa longa), então (pausa), quer saber qual é, a assíntota vertical, a assíntota ou as assíntotas verticais do gráfico.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: (Pausa longa) Porque são os valores (pausa longa), tenho que calcular os valores de *x* para as quais a equação é impossível, valores inteiros de *k* (pausa longa), a equação não

> sei o quê é impossível. (Lê novamente o enunciado) Então será ao contrário, é ao contrário, é a assimptota horizontal do gráfico. Se fosse a assimptota vertical, seria o valor, ou os valores (gesto na vertical com o dedo), os valores do *x*, para o qual a equação era impossível porque não haveria, não estava definida para aquele tal *x*, no caso da, da assimptota horizontal, será o valor de *k*, para o qual um determinado *x* (pausa), não está definido, ou não existe, por isso é que será impossível essa equação. No fundo iria calcular a assimptota horizontal do gráfico. […] A minha proposta era fazer a divisão. (Pausa longa) Mas, pronto (pausa), fazer a divisão e ver qual era, a assimptota horizontal, caso houvesse. Mas, se eu fizer a divisão, automaticamente tem que haver uma assimptota horizontal (pausa), não é? Tem de ir algum valor, para … […] (E6)

Após efetuar a divisão e o tratamento da expressão analítica de *h* (Figura 121), o Francisco apercebe-se então que o gráfico da função não tem uma assíntota horizontal, o que o leva a optar por uma mudança no registo de representação:

> **Francisco**: […] Assimptota horizontal do gráfico! (Risos) (Pausa longa) Seria a reta de equação menos dois *x* menos quinze, mas isso não me ajuda …
> **Investigadora**: Essa reta, já não é uma reta horizontal.
> **Francisco**: Pois. […] Pois, eu estou a ver que sim, porque é mesmo uma reta. Ai! Não posso ir à calculadora? (E6)

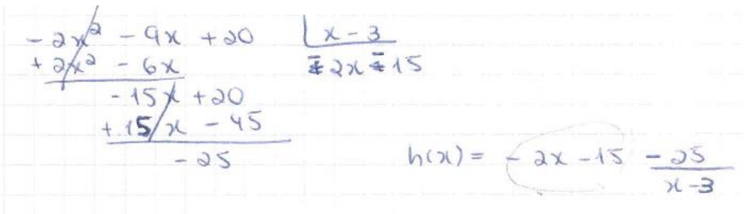


Figura 121 – Tratamento da expressão analítica da função *h* (E6, questão 2.3).

A função envolvida não possuía as características esperadas pelo aluno, tendo em conta o tipo de funções racionais com que tinha trabalhado até então, pelo que a calculadora lhe permitiu explorar a questão e delinear uma estratégia de resolução com base na visualização da representação gráfica, apesar de ter tido alguma dificuldade em identificar o recurso a utilizar, como foi visto na secção 8.3.4:

> **Francisco**: (Volta a ler) "Determine para que valores inteiros de *k*, a equação *h* de *x* igual a k, é impossível". (Observa durante muito, muito tempo) "Valores de *k*", eu, iria fazer, calcular um

> valor muito próximo do três, porque é a parte em que não tem domínio, o *h* de *x* igual a *k* seria …, não! (Continua a observar a representação, levanta a máquina) Estou confuso!
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: (Continua a observar durante algum tempo) Não! Seria, os valores de *k*, para ser impossível, seria daqui (aponta o mínimo relativo) aqui (aponta o máximo relativo) (Vai passando de um para o outro com a esferográfica). (E6)

Outra situação em que o aluno acabou por delinear uma estratégia de resolução após visualização da representação gráfica ocorreu na oitava entrevista, perante a questão 3.2 (Anexo 8), onde eram pedidos os valores de *a*, de modo que $x^2 + a$ fosse maior que *x*, para qualquer *x* real, embora neste caso tenha sido a investigadora a sugerir ao aluno que recorresse a essa abordagem. Perante a questão, o Francisco começou por observar que não poderia introduzir na calculadora, provavelmente como fizera na alínea anterior:

> **Francisco**: "Determine os valores que a pode tomar de modo que …" (Pausa muito longa) São malandros! (Pausa muito, muito longa) Isto é trabalhar no abstrato! (Pausa) Ok …
> **Investigadora**: Porquê no abstrato?
> **Francisco**: Porque o *a* não é um valor concreto, e não podemos introduzir na calculadora. […] No fundo o que nós queremos é que isto (escreve $x^2 + a$), seja sempre maior que *x*, acho eu! (Ri) (Fica a observar) É que não há valores! (E8)

Figura 122 – Tradução matemática do problema (E8, questão 3.2).

Depois de escrever a relação matemática (Figura 122), começou por pensar operacionalmente, substituindo mentalmente alguns valores de *x*, mudando de abordagem a partir de uma sugestão da investigadora. Ao ser questionado evocou o tipo de transformação geométrica relativa ao parâmetro *a*:

> **Investigadora**: (Risos) Então e não queres comparar com uma, uma função de base, para tentares perceber depois …
> **Francisco**: Vou experimentar uma função do tipo, só que um caso particular, em que consiga ter a noção.
> **Investigadora**: Que caso particular?

> **Francisco**: Não sei! O problema é mesmo no valor do *a*, é que eu não sei mesmo o valor do *a*. Mas o que eu posso é tentar ver o que é que o *a* influencia …
> **Investigadora**: Ok. E esse *a* influencia alguma coisa em relação a alguma coisa que ai tens, ou não? Sabes qual é a influência, ou não sabes? Pronto, se calhar por aí depois também podes ver!
> **Francisco**: Pois, é isso. Como eu não tenho a certeza da influência, posso ver, pelo menos em casos particulares, para ver se depois consigo chegar a alguma conclusão.
> **Investigadora**: Não sabes qual é a influência do *a*, em relação por exemplo ao *x* ao quadrado menos *x*?
> **Francisco**: Sei, é zero. Ah, não, o *a*! A influência do *a*, o *a* vai fazer com que (pausa), o número seja positivo ou negativo, depende, do valor, não sei se …
> **Investigadora**: E em termos da representação gráfica?
> **Francisco**: Vai fazer com que desça ou suba, acho eu. Se for uma função (pausa), vai fazer com que desça ou suba. (E8)

No entanto, optou por confirmar graficamente, editando na calculadora as funções $y = x^2 - x + 1$ e $y = x^2 - x$. O aluno conseguiu então encontrar uma estratégia para resolver o problema, apesar de ter sido a investigadora a procurar que este fizesse uma sistematização das suas conclusões:

> **Francisco**: […] Pronto, deu-me aquilo que eu estava à espera, ou seja, o valor de *a* vai fazer com que, não sei se é uma parábola (pausa), não. Espere (vai à janela)
> **Investigadora**: Então *x* ao quadrado menos *x*? *y* igual a *x* quadrado menos *x* será o quê?
> **Francisco**: Eu acho que era, eu acho que era uma parábola (volta a visualizar), haaa, mas, é assim, o valor de *a* vai fazer com que, a parábola se desloque, no entanto … (Pausa muito longa) Ai, *Stora*, isto é complicado! (pausa muito longa)
> […]
> **Investigadora**: Deste ao *a* o valor?
> **Francisco**: Positivo, dei ao *a* o valor um.
> **Investigadora**: Positivo, e um, e o que é que aconteceu à representação gráfica? Subiu uma unidade, e, e para todo o *x* ficou maior que zero? Ou não?
> **Francisco**: Sim.
> **Investigadora**: Sim? Então esse *a* serve.
> **Francisco**: Sim, é isso.
> **Investigadora**: Mas agora temos que ver é quais são outros valores possíveis. Será que outros valores também servem?
> **Francisco**: Sim, em princípio sim.
> **Investigadora**: Maiores que um, servem ou não?
> **Francisco**: Esses servem de certeza.
> **Investigadora**: Esses servem de certeza.

> **Francisco**: O problema é, é mesmo entre o zero e o um, que eu não …
> **Investigadora**: Negativos? Podes dar?
> **Francisco**: Não.
> **Investigadora**: Zero? Podes dar?
> **Francisco**: Não, também não. […] No entanto, eu podia ir ver o vértice …
> **Investigadora**: Não consegues arranjar uma estratégia …
> **Francisco**: A minha opção era ir ver o vértice.
> **Investigadora**: Era isso que eu ia perguntar, se não consegues arranjar uma estratégia?
> **Francisco**: Se depois conseguisse fazer um número equivalente, depois já dava zero, se fosse um número maior que esse valor … (E8)

A visualização da representação gráfica da função $y = x^2 - x$, parece ter sido essencial para que o aluno conseguisse delinear uma estratégia para resolver o problema (Figura 123). Porém, é interessante notar que, no final da resolução, exclama, apontado a representação algébrica: "Mas por aqui não conseguia ver!" (E8).

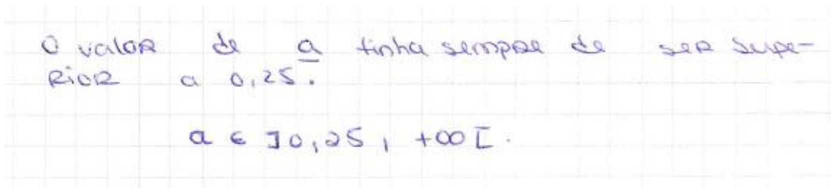


Figura 123 – Indicação do conjunto de valores possíveis para *a* (E8, questão 3.2).

Estabelecimento, confirmação ou refutação de conjeturas

O recurso à calculadora gráfica para visualizar a representação gráfica de vários elementos da família de funções $y = x^2 + bx + 1$, questão 1 da quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), permitiu aos alunos estabelecer a conjetura de que a curva representada pelos vértices das parábolas era, ela própria, também uma parábola:

> **Diogo**: Agora fazes vários e tentas unir todos os vértices, para veres qual é que daria.
> **Francisco**: (Pausa muito longa) Se unisse os vértices …
> **Diogo**: Faz várias, depois tens que ver os vértices de cada uma, se os ligasses como é que fazia.
> **Francisco**: (Não se percebe, pausa longa) Isto dá quase uma parábola (ri). (E4, parte conjunta)

Relativamente à equação da curva, o Francisco começou por colocar a hipótese de o coeficiente do termo do segundo grau ser igual a -1, mas o Diogo mostrou dúvidas:

> **Diogo**: Eu sei que, nós sabemos que, o vértice de zero, da parábola quando o *b* é zero …
> **Francisco**: Espera, repete.
> **Diogo**: Nós sabemos que o vértice da parábola, quando o *b* é zero, é zero, um.
> **Francisco**: Hum, hum.
> **Diogo**: Logo, esse há de ser o vértice deste, porque se unires todos, onde vai começar a curvar vai ser nesse. Logo esse é o vértice, agora tens que determinar o *a*. (Pausa) Certo?
> **Francisco**: (Pausa) Hum, hum. Mas o *a* é um.
> **Diogo**: O *a* é um?
> **Francisco**: Hum, hum.
> **Diogo**: Quem é que te disse isso?
> **Francisco**: Este aqui?
> **Diogo**: Pois. (Pausa) Ah, tu já sabes? Sem fazer contas.
> **Francisco**: Pois, aqui é um, aí nesse caso é menos um.
> **Diogo**: Não, não é, não é nem uma nem outra. (Pausa) Vais ver que não é um. (E4, parte conjunta)

O Francisco acabou por aceitar a sugestão do Diogo de efetuar a conversão da representação gráfica na algébrica, partindo de um ponto correspondente às coordenadas do vértice de uma das parábolas, e supondo que a representação gráfica era uma parábola com vértice no ponto de coordenadas $(0,1)$:

> **Investigadora**: Francisco qual é que era a tua conjetura?
> **Francisco**: Não tinha, ainda (ri).
> **Investigadora**: Não? Já tinhas, tinhas dito que o *a* ia ser quanto?
> **Francisco**: Devia ser menos um, mas isso era por razões …, (baixinho) era estupidez.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque temos o *x* ao quadrado e o *x* ao quadrado para mim era no *a*, era menos um.
> **Investigadora**: Então e se tentasses representar, não? Para veres, ao menos.
> **Francisco**: Ele tem razão, no que vai fazer.
> **Investigadora**: Tem razão, então porquê (ri)?
> **Francisco**: Parece-me bem, porque conseguiu encontrar dois pontos, também, da parábola, e faz sentido. (E4, parte conjunta)

Neste caso, a calculadora foi usada, não para testar a possibilidade de determinada expressão algébrica poder corresponder à curva que contém os vértices, mas para obter informação necessária para efetuar a conversão (Figura 124).

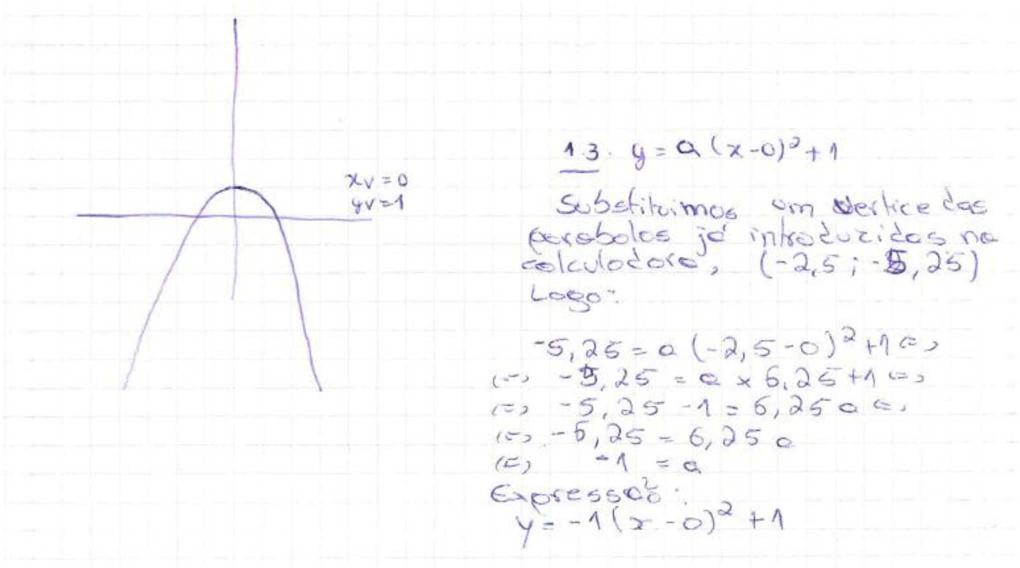


Figura 124 – Conversão da representação gráfica na algébrica, assumindo que se trata de uma parábola (E4, parte conjunta, questão 1.3).

Ao serem questionados sobre uma maneira de provarem que a curva que contém os vértices é de facto uma parábola, tendo por equação a obtida, os alunos resolvem confirmar graficamente, considerando que a visualização gráfica, ou a determinação de alguns pontos, como sugeriu o Francisco, serve de prova.

> **Francisco**: Eu tenho impressão que pode ser perfeitamente esta! Deu-me uma parábola jeitosa.
> **Diogo**: Pois foi o que me deu a mim, e passa no meio das outras!
> **Francisco**: Agora vou tentar ver numa outra, se é. Diz-me o *x* do vértice de uma.
> **Diogo**: Hã?
> **Francisco**: Diz-me o *x* do …
> **Diogo**: Mas para quê? Já está!
> **Francisco**: Mas diz-me o *x* do vértice de uma!
> **Diogo**: Esta é a parábola, que eu introduzi, e fica essa que passa nos vértices todos!
> […]
> **Investigadora**: […] Acham que está provado?
> **Francisco**: Hum, hum. (E4, parte conjunta)

Na questão 2, quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), devido às características da própria questão, a calculadora gráfica foi usada para confirmar a previsão acerca da forma da representação gráfica das expressões algébricas.

Nalgumas situações o Francisco recorreu à calculadora gráfica com o objetivo de testar alguns casos mais simples que lhe pudessem fornecer informação importante para lidar com determinada situação problemática. Por exemplo, na questão 2.2 da sexta entrevista (Anexo 6), em que era pedida uma previsão acerca da forma da representação gráfica da função $1/g$, a partir da representação gráfica de *g*, sendo $g(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1}$, o Francisco começou por abordar a questão considerando funções mais simples:

> **Francisco**: Estou a tentar formular uma, função, mais simples, para ver como é que seria a representação gráfica. Por exemplo, se fosse em vez de *g*, *y* igual a dois *x*. Sim, e depois ver se já tinha visto alguma que seja um sobre dois *x*.
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: Mas, não vai ser a mesma coisa, porque …, esta é quadrática, foi logo uma quadrática! (Ri) Tenho que pensar bem. (Pausa longa) Mas não posso usar a calculadora!
> **Investigadora**: Podes usar a calculadora, desde que não seja para fazer diretamente o um sobre *g* na, na representação gráfica, mas …
> **Francisco**: Ah!
> **Investigadora**: Se quiseres usar outras coisas da máquina … (o aluno pega na máquina, vai ao editor de funções e desseleciona a função *g*)
> **Investigadora**: (Pausa) Ias fazer o quê?
> **Francisco**: Ia colocar a expressão que há bocado eu tinha dito.
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: Que era *y* igual a *x*, e *y* igual a um sobre *x*. (E6)

O aluno tentou relacionar os dois casos mas não conseguiu ser bem-sucedido, uma vez que não focou o que era relevante, ou seja, o zero da função $y=x$. Pela sua exposição parece que desenvolveu a conjetura de que a representação gráfica de $1/g$, teria uma assíntota de equação $y=-6$, valor entretanto intuído pelo aluno através do cálculo da imagem do objeto $-1{,}0001$, por meio da função *g*:

> **Francisco**: Mas, estou a tentar … (pausa longa) No caso de *y* igual a *x*, que será uma reta, e no caso de *y* igual a um sobre *x*,

haaa, (pausa, gesto com a mão em forma de hipérbole) que será outra reta …
Investigadora: Que será outra reta?
Francisco: Que será uma hipérbole, mas, o que eu estava agora a ver, era que, por exemplo, quando a reta, intersectava, haaa, a origem, era no ponto de coordenadas zero, zero.
Investigadora: Sim?
Francisco: E a assín…, e no outro as assíntotas iam ser exatamente, não deve ter nada a ver, mas, iam ser exatamente as assíntotas, as assíntotas iam ser exatamente *y* igual a zero e *x* igual a zero. E isso podia ter alguma relação. Com que … Bem! (Vai ao *graph* mas entretanto tinha desativado a função) Ah! Espera (ri), hum, desativei! (Ativa e visualiza) Então, não tinha imagem no ponto menos um (aponta), e ali ia intersectar, ela não vai intersectar a origem do referencial, mas vai intersectar o eixo das ordenadas, no valor, correspondente ao menos um, que eu não sei qual é, mas posso encontrar. […] Mas a minha ideia era, caso isso fosse, a inversa, por exemplo, uma reta passava, exatamente pelo eixo dos *y*, pelo *y* igual a menos seis. Mas aquilo pode ter sido só uma casualidade. E isto também não é o caso de uma função que seja (pausa), uma hipérbole. (Suspira) Ai! (E6)

Perante a dificuldade do aluno, a investigadora sugere-lhe que recorra a outro caso particular, porém, apesar de o Francisco ter referido que deveria testar uma função cuja representação gráfica fosse uma parábola e de ter visualizado a representação gráfica da função $y=-x^2$, optou antes por recorrer às funções $y=-x^3$ e $y=-1/x^3$, formulando uma nova conjetura relativa à representação gráfica de $1/g$. Aparentemente o aluno coloca a hipótese de a representação gráfica ser uma hipérbole, embora não se perceba bem qual a relação que estabelece, relativamente às equações das assíntotas:

Investigadora: (Pausa muito, muito longa) Há bocadinho tu, tu usaste um caso muito, muito especial, pronto, não é?
Francisco: Sim.
Investigadora: O *x* e um sobre *x*, hum, mas podias usar outro …
Francisco: Pois podia. Sim, e de preferência que fosse relacionado com uma, com uma parábola, talvez fosse assim, pelo menos, que eu estava a pensar. (vai ao editor de funções e coloca menos *x* ao quadrado, visualiza) E esta, menos *x* ao cubo (edita), para ver o que é que daria. (Visualiza) Ai!
Investigadora: O que é que fizeste?
Francisco: Introduzi a expressão menos *x* ao cubo. (Pausa) para ver, porque a inicial, também tem *x* ao cubo. […] E agora ia ver,

> um sobre menos x ao cubo (edita), mas … (visualiza). (Observa) Ia-se transformar numa hipérbole (pausa longa), já percebi.
> **Investigadora**: Então?
> **Francisco**: Não, é que, nós quando temos uma proporcionalidade inversa, nós temos sempre um sobre qualquer coisa, será a inversa, se calhar não é bem para dizer isto, mas pronto, pronto, as funções que são, um sobre, algo que contenha x, a representação gráfica, à partida poderá ser sempre, ou é sempre, uma hipérbole, não sei se é verdade, se não é, a partir daí eu sabia a assíntota do gráfico, devido ao domínio da função g, as assimptotas devido aos domínio e contradomínio.
> **Investigadora**: Como é que vias isso?
> **Francisco**: Não sei. (Pausa longa) O domínio seria $\mathbb{R}$, não pode ser $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ exceto menos um, dessa, dessa hipérbole, e o (pausa), e o, e essa, essa assíntota vertical seria (pausa), seria o zero, vírgula vinte e cinco, provavelmente. (baixinho) mas não sei porquê! Não deve ser. Provavelmente não é (risos), mas eu, pronto! (E6)

Este episódio mostra que, apesar de o Francisco ter tentado explorar a situação a partir de casos mais simples, as suas conclusões não são suficientemente estruturadas, notando-se também dificuldade em recorrer a outros exemplos e em confirmar as suas conjeturas.

A exploração dos efeitos da transformação $f\left(\frac{x}{2}\right)$ na representação gráfica de f, presente na questão 1.2 da sétima entrevista (Anexo 7), foi também feita a partir de casos mais simples, já que o aluno não estava familiarizado com esse tipo de transformação e não podia utilizar a calculadora gráfica diretamente por não ter a expressão analítica da função f. Não conseguindo recordar os procedimentos para obter a expressão analítica, o Francisco decidiu recorrer à calculadora para testar os efeitos da transformação a partir de outras funções cúbicas. Contudo, revela, por vezes, dificuldade em interpretar a notação, estabelecendo uma espécie de relação entre o argumento da função e o modo de calcular as imagens. Embora tenha referido: "Não estamos a falar de f de x, sobre dois, vai alterar também as imagens mas …, estamos a falar diretamente dos objetos" (E7), ao testar a transformação para a função $y = x^3$, editou essa expressão e $y = \frac{x^3}{2}$:

> **Francisco**: Hum! Estou a tentar, eu estou a tentar arranjar aqui uma maneira de, pelo menos graficamente, o que é que poderá

> acontecer! (pega na máquina) Por exemplo, se eu colocar o *x* ao cubo (edita), e se eu colocar o *x* ao cubo, sobre dois (edita), vou ver qual é a diferença (visualiza), hum? Não me ajuda lá muito! Mas vou ver se altera pelo menos os zeros (desselecciona a segunda e determina o zero da primeira, obtém zero), pois isto assim, tem sempre o mesmo zero, esta é muito feia! Não havia problema! (Pausa longa) *Stora*, coisas exigentes!
> **Investigadora**: Então diz-me o que é que introduziste na calculadora?
> **Francisco**: Introduzi a função (pausa), *x* ao cubo, mas esta função não … […] E depois coloquei a, a *x* ao cubo sobre dois. (E7)

Ao ser questionado, o aluno parece compreender que não interpretou corretamente, reformulando a expressão editada na calculadora.

> **Investigadora**: E, o *x* ao cubo sobre dois, corresponde ao *f* de, *x* sobre dois?
> **Francisco**: (Pausa longa) Hum, não! Provavelmente era *x* sobre dois, ao cubo!
> **Investigadora**: Não sei (risos). Tenta só pensar e explicar porquê, se achas que é essa …
> **Francisco**: Vou tentar (edita a nova expressão e visualiza, volta ao editor de funções). Também eu acho que fazia sentido, porque se estamos a (pausa), a mexer com os objetos (aponta na expressão), se um é *x* ao cubo, o outro seria *x* sobre dois, ao cubo. (E7)

A visualização das representações gráficas permitiu-lhe observar a dilatação, no entanto, o efeito relativamente aos zeros não é evidente. O aluno compreende que a função escolhida não lhe permite afirmar o efeito sobre os zeros, mas não tenta explorar visualmente outro caso, voltando a colocar a hipótese de as imagens passarem para metade:

> **Francisco**: Mas aí parece que vai alterar os zeros. Porque está diferente a, quer dizer, não vai alterar os zeros, pelo menos nesta não vai! Mas lá está esta também não me permite ter uma observação correta da (pausa), de como seria aquela, função.
> **Investigadora**: (Pausa longa) Então e qual é a próxima estratégia?
> **Francisco**: É assim, eu quase que diria que se nós fizéssemos o *f* de *x* sobre dois as imagens, neste caso são os zeros, seriam a metade dessas imagens, mas eu acho que isso não é muito coerente. (Pausa longa) Não é pois não?
> **Investigadora**: (Ri) Não sei, tu é que tens que ver se achas que é ou não.

> **Francisco**: (Pausa longa) É que não sei mesmo *Stora*, está complicado. (Pausa, lê em voz alta) *x* sobre dois. (Pausa longa) É assim o domínio de *f* não altera de certeza.
> **Investigadora**: Hum. Qual é o domínio da *f*?
> **Francisco**: Penso que é $\mathbb{R}$. […] *f* de *x* sobre dois (pausa longa), estou a ver se as imagens passariam para metade … (E7)

O aluno testou a hipótese de as imagens passarem para metade tentando perceber mentalmente se a imagem de 2 seria o dobro da imagem de 1 na função $y = x^3 + 2x^2$. Após concluir que essa hipótese não se verificava o aluno ficou algum tempo sem saber o que fazer, sendo evidente a sua dificuldade em conseguir utilizar a calculadora gráfica de modo eficiente:

> **Francisco**: Porque se fosse uma função, por exemplo, x ao cubo mais, dois, x ao quadrado, ou assim (pausa), se nós fizermos, por exemplo, se o x for dois, e nós colarmos aí na parcela do dois x ao quadrado, ficava dois vezes, dois ao quadrado, que é quatro, ia dar, ia dar oito, e aqui ia nos dar por exemplo, se fosse, como era x sobre dois, em vez de ser o dois era, era um, portanto era metade e então, o quadrado é um, dois vezes um seria dois, para oito, não é, não é o dobro. Portanto não (pausa), acho que não podia ser. (Pausa longa) Ó *Stora*, não sei mesmo, não sei mesmo como é que podia fazer.
> **Investigadora**: Hum. Aquela não te ajudou? Aquela, não te ajudou nada?
> **Francisco**: Hum, é assim consegui ver que pelo menos o zero era igual, os zeros mantinham-se.
> **Investigadora**: E será que se mantêm sempre? Não se mantêm sempre?
> **Francisco**: Pois! Lá está, é que eu não sei se este zero se vai manter […] Eu tentava na calculadora, só que eu não, não conheço uma função, que pudesse ser igual a esta. (E7)

Após esta interação, o Francisco decide então utilizar a calculadora para tentar encontrar uma função cúbica com uma representação gráfica semelhante à da função dada no enunciado, de modo a estabelecer uma relação entre os zeros da função e os da transformação. No entanto, a conceção errónea relativa à equivalência $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ voltou mais uma vez a manifestar-se, apesar de anteriormente já ter decido que tal não se verificava:

> **Francisco**: Ia tentar arranjar uma expressão, mais completa, da do terceiro grau.

> **Investigadora**: Então, pode ser que …
> **Francisco**: (Edita a função $y = x^3 + 2x^2 + x$, visualiza) (Baixinho) Não! (Vai ao editor de funções e anda com o cursor sobre a expressão) Pronto não dá! (Pausa longa enquanto desloca o cursor) É que não, não consigo mesmo pensar, no que poderá … (pausa longa), é que mesmo que eu meta mais três ou assim (soma três à expressão anterior), só vai alterar (visualiza), ali. Para ser igual esta parte tinha que vir para baixo (assinala no visor)
> **Investigadora**: (Pausa longa) Como é que podes fazer essa parte ir para baixo? (Pausa) Se é que podes! (Ri).
> **Francisco**: É assim (ri), poder posso! Não sei é como! (Pausa) É que mesmo fazendo esta (pausa, edita y1 a dividir por dois), a dividir por dois (visualiza), agora a outra! (Observa a representação a ser traçada pela máquina), pois, quer dizer! (Pausa longa) Ela pelo menos vai para baixo. O que pode significar que os zeros, se ia para metade que ela baixava, mas este zero, pelo, mas estes zeros pelo menos, iam-se manter (pausa longa), porque no fundo não estou a alterar …os zeros.
> **Investigadora**: Tu fizeste o quê? Agora aí? Dividiste por dois? As imagens?
> **Francisco**: Hum, hum.
> **Investigadora**: E porquê? Porque é que escolheste isso?
> **Francisco**: (Pausa longa) Porque acho que é no fundo o que, pronto *f* de *x* sobre dois, se a função *f* fosse, esta aqui que eu tenho (mostra o editor de funções), seria esta (aponta para a linha de baixo) a *f* de *x* sobre dois (pausa), acho eu.
> **Investigadora**: Achas?
> **Francisco**: Acho. (Pausa Longa) Não, não acho, não acho nada!
> **Investigadora**: Não, é que há bocadinho disseste-me ao contrário, quando eu te perguntei do *x* ao cubo sobre dois. Não sei!
> **Francisco**: Eu é que não sei mesmo! (Edita a expressão, substituindo *x* por *x* sobre dois). Mas é, é verdade, pelo menos eu acho que sim, acho que faz sentido. (Visualiza) Hum, pois! Aqui neste caso os zeros vão-se alterar! (Pausa) Eu vou ver é se consigo estabelecer uma relação. Aqui ficou para, era menos dois (aponta) e aqui passou para menos quatro (pausa longa), o que é curioso! (E7)

A calculadora gráfica possibilitou-lhe assim compreender os efeitos da transformação na representação gráfica da função original, o que lhe permitiu resolver a questão (Figura 125), mesmo sem conhecer a expressão analítica da função *f*:

> **Francisco**: Haaa, eu não estou a perceber é se, por exemplo, se aqui passar para menos quatro (aponta a representação no enunciado), aqui teria necessariamente que passar para dois, e

aqui para seis. Era o que eu pensava que seria o que ia acontecer!
Investigadora: Porque é que pensavas isso?
Francisco: Pelo menos pela observação gráfica, consigo … (aponta o visor na calculadora).
Investigadora: Por comparação com esse exemplo?
Francisco: Sim. Mesmo que não seja um bom exemplo, e até por outro que eu tinha feito há bocado (vai ao editor), este aqui (desseleciona as outras).
Investigadora: Qual é que é esse? É o do *x* ao cubo?
Francisco: É o do *x* ao cubo, e depois fiz o *x* sobre dois, ao cubo, parece que ela alarga claramente. (E7)

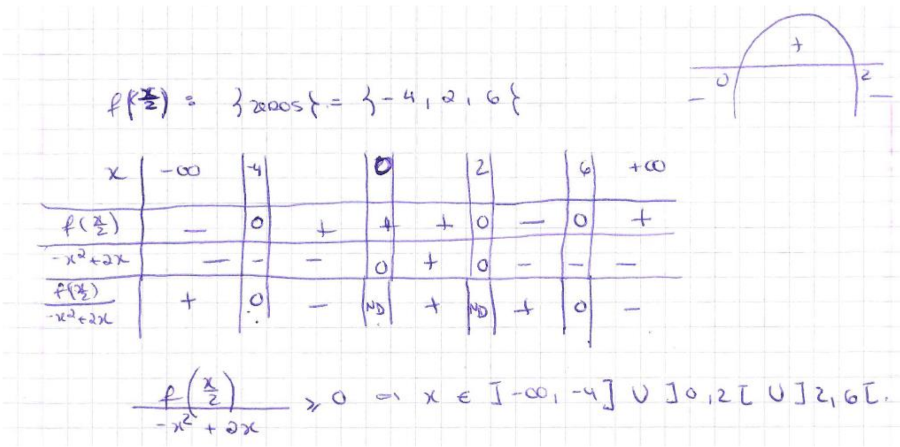


Figura 125 – Resolução da questão 1.2, depois da exploração na calculadora (E7).

Provavelmente o Francisco não teria conseguido concluir o efeito correto da transformação sem a interação com a investigadora, essencialmente devido à conceção errónea que parece ter desenvolvido relativa à relação entre argumento de uma função e modo de calcular as imagens. Além disso, foi também evidente uma certa dificuldade em definir e reformular as estratégias de modo a conseguir uma exploração mais eficiente. É, no entanto de realçar que, em termos do trabalho desenvolvido na sala de aula este tipo de exploração não é habitual. Ainda assim o aluno refere que, por vezes, utiliza a calculadora para testar casos particulares, nomeadamente nas questões de escolha múltipla, em testes de avaliação: “[…] Eu vou sempre verificar as escolhas múltiplas. Mesmo com representações particulares que eu faço, e com testes, casos particulares que eu meto na calculadora, das funções, que me permitem ver sempre melhor as coisas” (E8).

8.4.6. Síntese

O Francisco recorreu à calculadora gráfica em diversas situações e com diferentes objetivos, embora se note uma tendência para o uso de procedimentos analíticos, tendência essa que parece mais evidente no décimo primeiro ano. O recurso à calculadora gráfica surge essencialmente em situações em que o aluno não tem conhecimentos ou não consegue resolver analiticamente, ou quando não tem ainda familiaridade com os procedimentos analíticos ou estes lhe suscitam dúvidas. No entanto, também houve ocasiões em que foi possível observar o aluno a utilizar a calculadora com o objetivo de tornar a resolução mais rápida ou mais fácil, nomeadamente em equações ou inequações. A confirmação de resultados obtidos analiticamente depende essencialmente do tempo que tem disponível e também da familiaridade com os procedimentos analíticos. A calculadora gráfica foi também usada pelo Francisco em todas as situações em que foi pedida a representação gráfica de uma função, mesmo quando o aluno necessitou de efetuar a conversão da representação gráfica de uma função na representação algébrica, com o objetivo de visualizar, na calculadora, a representação gráfica de funções que dependiam dessa.

A calculadora surgiu também como uma ferramenta de exploração, quer para investigar os efeitos de parâmetros na representação gráfica de elementos de uma família de funções, quer para delinear uma estratégia de resolução a partir da visualização gráfica, quer para estabelecer, confirmar ou refutar conjeturas, nomeadamente a partir de casos mais simples ou semelhantes. Relativamente a este último ponto foi possível perceber alguma dificuldade por parte do aluno em definir e reformular estratégias, relacionando conhecimentos, de modo a tornar a exploração mais eficaz, bem como dificuldade em justificar e provar as suas conjeturas, a que se aliaram dificuldades em termos da interpretação da notação associada ao conceito de função.

8.5. Aprendizagem do conceito de função e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno

Nesta secção pretende-se analisar tanto a aprendizagem relativa ao conceito de função, no seu sentido mais amplo, como a integração que o aluno faz da calculadora gráfica na sua atividade com funções ao longo do 10.º e 11.º anos de escolaridade. No final de cada subsecção é feito um pequeno resumo síntese.

O conceito imagem de função do Francisco, no final do ensino básico, envolvia essencialmente funções afins e de proporcionalidade inversa, embora, no caso da proporcionalidade inversa, o aluno não tenha conseguido estabelecer expressamente a relação entre as variáveis e não tenha retido a ideia de que as variáveis não podem assumir o valor zero. O reconhecimento de uma função afim a partir da representação algébrica parece também depender do modo como a expressão está apresentada. O conceito definição formal foi evocado na primeira entrevista, contudo, foi possível perceber que a definição não estava clara para o aluno.

8.5.1. Reconhecimento e identificação de funções

O Francisco revelou alguma facilidade em reconhecer e identificar funções, mesmo numa fase inicial da aprendizagem do tema. Por exemplo, na questão 1.2 da segunda entrevista (Anexo 2), o Francisco identificou a função que relaciona a classificação corrigida e a classificação original, notando-se inicialmente uma tendência para pensar em termos processuais, mas passando para uma abordagem mais estrutural facilitada pela calculadora gráfica:

> **Francisco**: Sim. Todas aumentam.
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Porque, penso que sim, sim aumentam (pausa longa).
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque (pausa), por exemplo, neste caso vimos que … É assim todos os números são positivos, todos os valores, uma classificação não pode ser negativa.
> **Investigadora**: Sim.

> **Francisco**: E então, supõe-se que para qualquer valor positivo, tal como o exemplo mostra, haa, a classificação aumenta.
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: Logo, haa, sabendo que aqui aumenta, posso experimentar com outro valor para ver se, se daria, se daria superior ou, um valor superior.
> **Investigadora**: Hum, hum.
> **Francisco**: Pronto, eu faria assim.
> **Investigadora**: Sim. E, pronto, com dois ou três valores terias a certeza que aquela aumentava sempre?
> **Francisco**: Não, teria que fazer uma fórmula algébrica. Penso eu, uma expressão algébrica da expressão. […] Na calculadora, por exemplo.
> **Investigadora**: Por exemplo? Como?
> **Francisco**: Haa, colocando a expressão da …
> **Investigadora**: Como? (Risos) (O aluno pega na calculadora) Vais fazer o quê?
> **Francisco**: Eu ia arranjar a expressão que traduz, o problema, colocaria e … (digita a expressão). (E2)

Ainda nessa questão o aluno acabou por reconhecer que necessitava de comparar a representação gráfica da função que relaciona as duas classificações com a representação gráfica de uma outra função (função identidade) editando-a também na calculadora:

> **Francisco**: […] Pronto observando o, a função graficamente vemos que, o fator de correção, com este fator de correção a classificação vai sempre aumentando.
> **Investigadora**: E como é que tens a certeza que a correção aumenta em relação à original? Aí o que estás a ver é que as [classificações] corrigidas, porque foi a expressão que colocaste não foi?
> **Francisco**: Foi.
> **Investigadora**: As classificações corrigidas estão a aumentar.
> **Francisco**: Porque as classificações corrigidas são, são a variável dependente porque dependem da, da classificação original, ou seja, do x. Então se a reta está a aumentar em altura, pronto se a função está a aumentar consoante o, a, a variável y, logo do, da classificação corrigida, permite-nos concluir que a classificação vai aumentando. (Pausa) Penso eu.
> […]
> **Investigadora**: Pronto, então como é que nós poderíamos ter a certeza se, nesse exemplo, as corrigidas aumentam em relação às iniciais?
> **Francisco**: Haa, colocando também uma expressão para as corrigidas. Para a, a inicial. […] É x, x. y igual a x. (Coloca a expressão e visualiza as representações). Sim, penso que aqui é mesmo no, no extremo, não é? (E2)

No âmbito da atividade matemática relativa ao tema, o Francisco, de modo geral, consegue identificar e trabalhar com funções, embora a noção de função não seja usualmente explicitada. As situações em que o aluno teve que decidir se estava perante uma função surgiram em contexto de sala de aula, no início do tema, relativamente à representação gráfica, e na última entrevista, relativamente à representação algébrica e gráfica. Na aula, quando a professora questionou o Diogo sobre o conceito de função, o Francisco disse-lhe baixinho: "Quando uma correspondência, quando uma correspondência, quando a um x corresponde uma só coordenada de y." (A2_10), evocando o conceito definição com maior segurança do que na primeira entrevista, apesar de alguma incorreção na linguagem. Nessa aula, foi também possível perceber que a confusão evidenciada na primeira entrevista, relativamente à impossibilidade de existirem objetos com a mesma imagem, parece ter sido desfeita, já que perante a justificação da sua colega Sofia para não considerar a representação gráfica presente na questão 5 da ficha *Funções e gráficos: Generalidades* (Anexo 10), o Francisco argumenta que "é ao contrário":

> **Professora**: Trata-se de uma função ou não?
> (Alguns alunos respondem que não)
> […]
> **Professora**: Então esperem lá, agora vamos … o João diz que sim. Vamos ouvir. Porque é que acha que é função?
> **João**: (Pausa) Ao valor do x equivale um do y.
> **Professora**: Equivale, corresponde! A cada valor, a cada valor de x corresponde um e um só valor para y? É isso? Então Sofia, porque é que não é?
> **Sofia**: Acho que não é porque para um valor de y existe mais do que um valor de x.
> **Francisco**: Mas é ao contrário. (A2_10)

É interessante notar que, após um período considerável de tempo, na oitava entrevista (Anexo 8), ao ser confrontado com as representações algébricas presentes na questão 1, o conceito definição não é evocado pelo aluno, sendo a seleção das representações feita essencialmente a partir de outras imagens mentais presentes no seu conceito imagem de função. A representação $y=\begin{cases}4, & x\le 1\\ -2x+5, & x>4\end{cases}$ é, inicialmente, rejeitada pelo aluno pelo facto de não ser contínua:

> **Francisco**: Estou a tentar encontrar alguma que não seja função. Elas parecem-me todas ser funções, pelo menos as duas primeiras, parecem-me ser funções. (Pausa muito longa) Eu não entendo aqui esta [iii)], quatro, (pausa), não estou a perceber bem. […] Acho que é o *y* igual a quatro quando *x*, menor ou igual a um, não é? (Pausa muito longa) Eu inclinava-me talvez para esta não ser função.
> **Investigadora**: Hum. (Pausa longa) Então e em que é que te baseias para …?
> **Francisco**: Eu estava a tentar imaginar, como é que seria a função se (pausa), se fosse assim, e dava-me que, pelo menos a primeira parte ia ser uma (parece ir fazer um gesto na horizontal com a mão), tínhamos …, não, quando o *x* é maior que quatro tínhamos uma reta (gesto com a mão a indicar a representação de uma reta com declive negativo), tínhamos uma parte que parecia ser uma reta, uma função afim, pronto. E a partir do, quando o *x* (pausa), isto é estranho! (pausa) Não, é que a função parece não ser contínua. Terá um intervalo da função (gesto com as mãos) em que ela não está definida. (E8)

O aluno entretanto optou por efetuar um esboço da representação gráfica, recorrendo à calculadora para representar o segundo ramo, passando a representação para o papel sem preocupação em considerar corretamente a origem da semirreta nem o declive (Figura 126). Tendo continuado em dúvida relativamente ao facto de a expressão representar ou não uma função a investigadora questionou-o acerca do que entende por função, e o aluno revelou possuir a definição do conceito, apesar de ter alguma dificuldade em enunciá-la:

> **Francisco**: Para mim é uma função (pausa), que, quando nós tivéssemos (pausa), um objeto (baixinho), objetos, é quando uma, por exemplo, não sei explicar bem. Eu vou tentar! […] Eu penso que é quando, por exemplo, a objetos, não pode ser função, quando a um objeto, quando uma representação tem, que tem objetos iguais, tem imagens iguais (fica a observar a representação gráfica). Não sei se me estou a fazer entender, por exemplo, se houvesse …, sei lá, agora uma parte que começasse aqui, por exemplo (desenha abaixo da representação gráfica constante, tracejado laranja na Figura 126), tinha talvez o mesmo objeto e tinha (passa com a caneta de um ponto para o outro assinalando os dois valores de *y*). (Pausa) Não sei.
> **Investigadora**: Hum. Sim.
> **Francisco**: Por função, por definição não consigo explicar.
> **Investigadora**: Bom, então, rejeitavas essa? Não rejeitavas?
> **Francisco**: Pois! Por aí, acabava por não rejeitar, mas, no entanto, sei lá, não estou habituado a ver uma representação,

assim (passa com a mão de um ramo para o outro da representação gráfica no papel), de uma função. (E8)

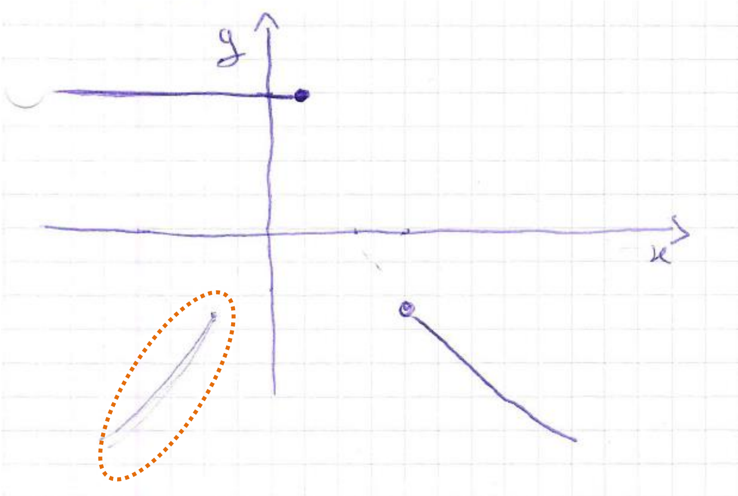


Figura 126 – Representação gráfica de $y = \begin{cases} 4, & x \leq 1 \\ -2x+5, & x > 4 \end{cases}$ (E8, questão 1, iii)).

Apesar de o conceito imagem do aluno não englobar funções daquele tipo, a recordação do conceito definição levou-o a concluir que a expressão representava uma função.

As expressões $xy = -3$; $x^3 - 2x + xy = 0$; e $x^2 = \dfrac{y}{\pi}$ foram identificadas pelo Francisco como funções a partir de imagens mentais presentes no seu conceito imagem, depois de o aluno ter efetuado o tratamento em ordem à variável *y*, como mostram, respetivamente, os extratos seguintes:

Francisco: Pronto, pelo menos é assim, é um caso habitual nós …, vimos, é uma função, função afim, acho eu, não, não é. […] Acabou por não ser (risos). Mas pronto é uma função. […] Então parece que, a representação gráfica pode ser uma hipérbole, provavelmente, não sei! (Vai à máquina e visualiza) Parece que sim. E, a representação gráfica é uma hipérbole, pronto, é uma função. Por aí consegui detetar que é uma função. (E8, questão 1, alínea (ii))

Francisco: Se, estiver bem resolvido, penso que é uma função. […] Para mim é uma função, uma parábola. (E8, questão 1, alínea (iv))

> **Francisco**: Esta bem que podia não ser, porque me parece difícil!
> **Investigadora**: Porquê? Porque é que te parece difícil?
> **Francisco**: Porque sim.
> **Investigadora**: Mas porque sim, tem que ter alguma razão! (Risos)
> **Francisco**: Não, mas eu acho que, eu acho que é função. Não, é só mesmo pelo pi (pausa), ser um número que … Mas acho que é função, é assim, porque, porque é um valor sempre constante, se fosse *y* igual a dois *x* ao quadrado, ia ser uma função na mesma, e eu não iria achar estranho!
> **Investigadora**: (Ri) Portanto aí o estranho foi o pi?
> **Francisco**: Exato, portanto eu acho que é função. […] É assim, o domínio ia ser $\mathbb{R}$, porque é uma parábola! Em princípio o gráfico seria uma parábola, mas eu vou ver outra vez. Não confio em mim! (E8, questão 1, alínea (vi))

A calculadora gráfica serviu como uma ferramenta para confirmar a representação gráfica esperada, em cada uma das funções, e para determinar o domínio e o contradomínio. O não atender ao domínio onde a simplificação de uma fração racional é válida, é recorrente no comportamento do aluno e voltou a manifestar-se relativamente à expressão $x^3 - 2x + xy = 0$, tendo este introduzido na calculadora a expressão simplificada, o que não lhe permitiu compreender que a função não estava definida para *x* igual a zero. A introdução da fração racional não simplificada na calculadora gráfica conduziria a mensagem de erro quando o aluno tentasse determinar o máximo da função com o objetivo de identificar o contradomínio, o que no seu caso não se verificou. Ao ser questionado se encontrava alguma diferença entre as funções representadas pelas expressões $x^3 - 2x + xy = 0$ e $x^2 = \frac{y}{\pi}$, o aluno continuou sem identificar o domínio onde a simplificação da primeira expressão é válida:

> **Investigadora**: Ok, podes simplificar sempre? Sem restrição nenhuma?
> **Francisco**: (Pausa longa) Acho que posso, sim. (Pausa longa) Quando temos deno…, não, quando temos denominador, não, mas mesmo assim podemos simplificar. (E8)

Relativamente à expressão $\text{sen}^4 x + y^2 = 1$, o Francisco começou também por efetuar o tratamento, resolvendo-a em ordem a *y*, no entanto, não considerou as duas soluções (Figura 127), tendo concluído que se encontrava perante uma função depois de conseguir visualizar a representação gráfica na calculadora.

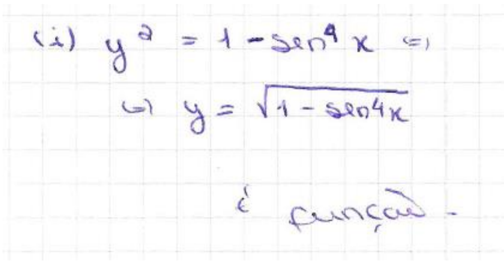


Figura 127 – Tratamento da expressão $\text{sen}^4 x + y^2 = 1$ (E8, questão 1, alínea (i)).

Mesmo sendo diretamente questionado acerca do tratamento da expressão algébrica, o Francisco não identificou o erro, o que parece indicar uma compartimentação no conhecimento:

> **Investigadora**: E em termos da tua resolução? Achas que fizeste tudo correto? Ou será que te esqueceste de alguma coisa?
> **Francisco**: (O aluno analisa a resolução no papel) (Ri) Incrível, não sei, acho que não! (Pausa, observa) Não. (E8)

No que diz respeito à expressão $\frac{x}{x-3} = 6,\ x \neq 3$, o Francisco, tal como na primeira entrevista, começou por considerar que a expressão algébrica de uma função deveria ter sempre explicitamente as duas variáveis, contudo, percebeu que tal não acontece na função constante, acabando por concluir que a expressão é representada no plano por uma reta vertical, utilizando neste caso o conceito definição para concluir que não pode representar uma função:

> **Francisco**: Lá está uma difícil! (Pausa muito longa)
> **Investigadora**: O que é que estás a pensar?
> **Francisco**: Estou a pensar é que aqui não há *y*!
> **Investigadora**: Hum, hum. (Pausa longa) E então?
> **Francisco**: Não sei é se podemos, concluir que não iria haver, objetos, não, não iria, haver, imagens. Não sei, estou confuso! (Pausa longa) Poderia desenvolver, mas isso não me ajudaria em nada! Pelo menos é assim, pelo meu ponto de visto, eu acho que tem sempre, temos sempre que ter a variável independente e a variável dependente (pausa), numa função. Pelo menos é assim, quando …, quer dizer, mas nem sempre.
> **Investigadora**: Qual é que é o caso em que nem sempre …?
> **Francisco**: Quando é uma constante, *y* igual a cinco, por exemplo. Não temos a variável, quer dizer, não sei se, mas pronto, não tem o *x*, não tem variável. […] No entanto (pausa),

> há retas de equação *x* igual a qualquer coisa (pausa), mas não são funções!
> **Investigadora**: Hum. Porquê?
> **Francisco**: Porque, para o mesmo objeto, há muitas imagens …, há mais que uma imagem. (E8)

Relativamente às representações gráficas, o Francisco não teve dificuldade em aplicar o conceito definição para identificar as que representam funções. O aluno ficou apenas um pouco confuso com o ponto isolado presente na representação (i), talvez por não lhe ser familiar esse tipo de representação:

> **Francisco**: Eu penso que é assim, para mim, a primeira, é uma função, porque a objetos (pausa), porque o mesmo objeto não tem (pausa), imagens iguais. (Pausa) Tem uma e uma só imagem, é isso que eu quero dizer.
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: Mas este ponto preto, eu não sei o que significa!
> **Investigadora**: Ah, não? Hum.
> **Francisco**: É assim, eu pensava que era (pausa), hum, ok, não pensava não, pensava que era quando a função se fechava, haaa, havia, fazia parte do domínio, pronto.
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: Mas aqui não há nenhum ponto.
> **Investigadora**: Não?
> **Francisco**: Quer dizer, há o ponto, há este, mas …
> **Investigadora**: Ok, então para ti seria função, certo?
> **Francisco**: Seria.
> **Investigadora**: E, e se esta bolinha ali (primeiro ramo) estivesse …
> **Francisco**: Fechada. […] Se, no caso de este ponto (pertencer ao gráfico …
> **Investigadora**: Sim, e pertence. Faz parte do gráfico sim.
> **Francisco**: Ah, ok, então, não seria função.
> **Investigadora**: Hum. Porquê?
> **Francisco**: Porque aí já teríamos um, objeto, com mais que uma imagem. (E8)

Em termos de identificação de funções a calculadora foi utilizada pelo aluno essencialmente para confirmar, através da representação gráfica, se a expressão em causa poderia de facto corresponder a uma função, não sendo eficaz no caso de expressão $\text{sen}^4 x + y^2 = 1$ devido a dificuldades de ordem algébrica no tratamento da expressão, apesar de, como foi visto na secção 8.3.1, o aluno também ter tido dificuldades na interpretação da notação envolvida ao tentar editar a expressão.

8.5.2. Transformações de funções

Translações verticais e horizontais

Os invariantes operatórios relativos às translações vertical e horizontal parecem ter sido facilmente instituídos. Com efeito, a resolução da questão 5.1, do teste de 5 março e 2010 (Anexo 9), sugere que o Francisco conseguiu identificar corretamente as transformações geométricas a efetuar ao gráfico de $a(x)=|x|$, de modo a obter o gráfico da função definida por $p(x)=|x+3|-4$, apesar de alguma imprecisão em termos da escrita.

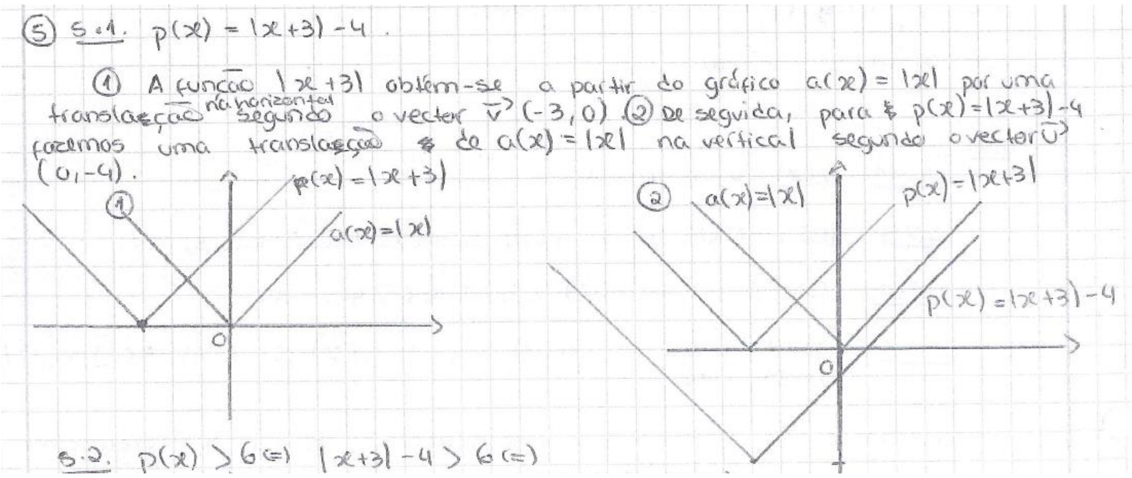


Figura 128 – Resolução da questão 5.1 do teste de 5 de março de 2010.

É certo que, tendo as expressões analíticas, o aluno poderia ter recorrido à calculadora, no entanto, na parte individual da quarta entrevista, (Anexo 4), identificou ambas as translações sem recorrer ao artefacto mediador, revelando ter os invariantes operatórios estabelecidos. Nessa entrevista, relativamente à translação vertical, a investigadora tentou que o aluno justificasse a relação entre a expressão $p(x)+k$ e os efeitos no gráfico da função *p*, mas este estava já envolvido na resolução da questão em particular, ficando, no entanto, a justificação implícita na resposta:

> **Francisco**: Já, já estou. Já estou a pensar. Estou a pensar numa maneira, em que a função, vou subir a função …
> **Investigadora**: Vais subir? Porquê? Porquê subir?
> **Francisco**: Também posso descer, posso fazer os dois, haaa …
> **Investigadora**: Sim, mas porque é que …

> **Francisco**: Primeiro disse subir mas era mais fácil até descer, porque é um valor inferior. Se eu descer a função consigo fazer com que ela só passe uma vez no eixo *Ox*.
> **Investigadora**: Pronto, agora já mudaste para descer, há bocadinho estavas a dizer subir, mas mudaste porquê, porque eu perguntei, ou …?
> **Francisco**: Não, não. É indiferente, eu sei, é indiferente subir ou descer.
> **Investigadora**: Sim, mas explica-me só porquê o subir ou porquê o descer? (Pausa) Tem a ver com o quê? Como é que pensaste?
> **Francisco**: Com o mínimo e o máximo. (E4, parte individual)

A translação horizontal foi também identificada pelo aluno, embora a justificação se baseie essencialmente numa memorização do teorema-em-ação – *a transformação* $p(x-h)$ *corresponde a uma translação do gráfico de p associada ao vetor* $(h,0)$:

> **Francisco**: A função *p* de, *x* mais sete, vai-se deslocar três casas para a esquerda, haaa, sete casas para a esquerda, relativamente ao *p* de *x*.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque temos *x* mais sete, logo, como o, haaa, como o *h* da função, é o *h*? Como o *h* da função é positivo, logo desloca-se para a, não, como o *h* da função é negativo, haa, portanto, ficava *x* menos, menos *h*.
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: *x* mais *h* vai dar para o lado esquerdo. (E4, parte individual)

Na quinta entrevista, as transformações de funções não foram de imediato identificadas pelo aluno, mas este acabou por recordar a transformação $f(x-1)$, presente na questão 1.2.1 (Anexo 5), depois de confrontar a representação gráfica na sua calculadora, obtida a partir de uma introdução incorreta da expressão, com a obtida pelo Diogo:

> **Diogo**: […] Fica assim?
> **Francisco**: Não. A função simplesmente desce uma unidade para baixo. […] A tua função deu assim?
> **Diogo**: Deu mais ou menos igual. Só que o meu está aqui (aponta no visor da sua calculadora).
> **Francisco**: Só que não deu, o meu não passa do eixo *Ox*.
> **Diogo**: A tua não passa do eixo?

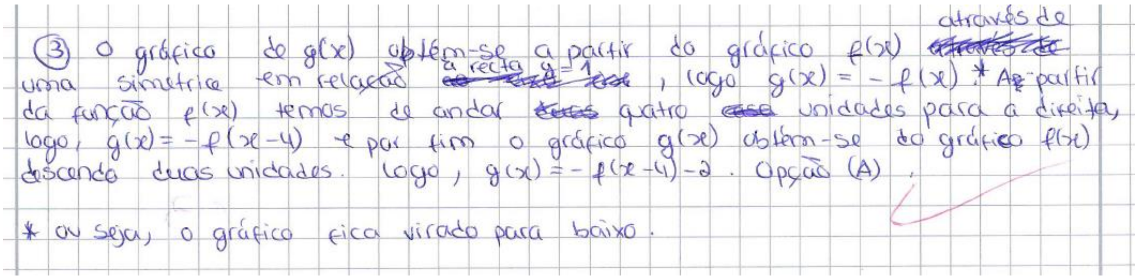
> **Francisco**: Do eixo *Ox*. O que é que tu fizeste? (Mostra o editor de funções ao colega) Não fizeste assim?
> **Diogo**: Não.
> **Francisco**: Pois! Porque também não é assim!
> **Diogo**: Eu fiz assim (mostra a expressão no editor de funções). Não sei se é assim.
> **Francisco**: Não! Se calhar tu até tens bem.
> **Investigadora**: Então? Têm coisas diferentes, não é? […] Qual é que acham que está certa?
> **Francisco**: A dele.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Ele tem razão. Eu lembro-me de estudar isto o ano passado e aqui só se movimentava para a esquerda e para a direita, a função só se movimentava no eixo *Ox*. Eu tinha feito como se fosse *f* de *x*, o *x* entre parêntesis, e depois menos um, aí é que baixava, descia uma unidade. (E5)

A quinta entrevista foi realizada no final do primeiro período do décimo primeiro ano, não tendo os alunos entretanto voltado a trabalhar as transformações de funções, o que pode ter contribuído para o facto de estas não terem sido de imediato identificadas pelo Francisco. No entanto, ao longo do décimo primeiro ano foi possível constatar que, de facto, o aluno desenvolveu invariantes operatórios para as transformações correspondentes a translações. Por exemplo, perante a questão 1.1 da sétima entrevista (Anexo 7), identificou de imediato os zeros da função $f(x+2)$, a partir dos zeros de *f*, representada graficamente:

> **Francisco**: Bem, então sei que pelo menos os zeros da função *f* de, *x* mais dois, que será, ok, ainda não será a *g*, mas pelo menos que os zeros serão o menos quatro, o menos um e o um. É melhor eu meter aqui (na folha).
> **Investigadora**: Hum, e porque é que dizes isso?
> **Francisco**: Ah, mas isto é uma raiz! Ah! Pois! Hum, porque acho que, então se temos *f* de, *x* mais dois, este mais significa que há uma, translação, associada ao vetor menos dois, zero. (E7)

Simetria relativamente aos eixos

A exploração feita na sala de aula envolveu essencialmente a simetria relativamente ao eixo das abcissas, sendo a simetria relativamente ao eixo das ordenadas abordada numa questão em que era dada a representação gráfica de uma função e era pedida a representação gráfica de funções envolvendo várias transformações da primeira. Apesar de a simetria relativamente ao eixo das abcissas ter sido mais explorada, os dados mostram que os invariantes operatórios demoraram algum tempo a ser instituídos. Por exemplo, no teste de 4 de junho de 2010, questão 3 da primeira parte (Anexo 9), em que por engano não havia uma opção correta, o Francisco começou por considerar uma simetria relativamente ao eixo das abcissas, no entanto, acabou por argumentar com uma simetria em relação à reta de equação $y=1$, não questionando a professora sobre o assunto:


③ O gráfico de $g(x)$ obtém-se a partir do gráfico $f(x)$ através de
uma simetria em relação à recta $y=1$, logo $g(x) = -f(x)$ * A partir
da função $f(x)$ temos de andar quatro unidades para a direita,
logo, $g(x) = -f(x-4)$ e por fim o gráfico $g(x)$ obtém-se do gráfico $f(x)$
descendo duas unidades. Logo, $g(x) = -f(x-4)-2$. Opção (A)

* ou seja, o gráfico fica virado para baixo.

Figura 129 – Resolução da questão 3, primeira parte, teste de 4 de junho de 2010.

Nesta questão a calculadora gráfica poderia ter sido utilizada para confirmar a escolha da alternativa, no entanto, isso não parece ter acontecido pois nesse caso o aluno teria, em princípio, detetado o erro.

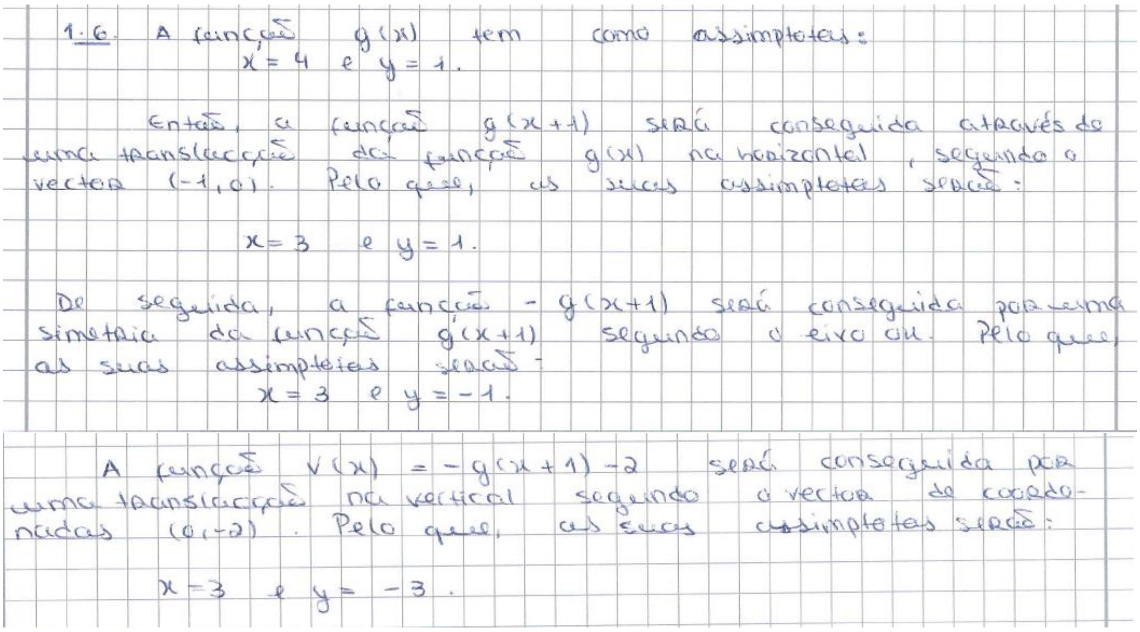
Na quinta entrevista (Anexo 5), a simetria relativamente ao eixo das abcissas não foi identificada pelo Francisco que, mesmo depois de visualizar a representação gráfica da função $h(x) = -f(x)+3$, revelou alguma dificuldade em compreender os efeitos da transformação:

> **Diogo**: Subiu.
> **Francisco**: Pois subiu. Subiu três unidades, para cima, em relação à primeira.
> **Diogo**: Eu não percebo é aqui a influência do menos.
> **Francisco**: A influência … Pois! É isso também que eu não estou a perceber. (E5)

Perante a dúvida, os alunos decidiram editar também a função $y = f(x)+3$ e comparar as duas representações gráficas, conseguindo identificar as duas transformações geométricas que, aplicadas ao gráfico de *f*, originam o gráfico de *h*, tendo o Francisco a perceção da ordem pela qual as transformações devem ser executadas:

Francisco: (Pausa longa, o aluno aponta as representações gráficas) As imagens da função seno de *x*, mais três, haa, são simétricas às imagens da função menos seno de *x*, mais três, em relação ao, à reta *y* igual a três.
Investigadora: Hum. Sim, então e se quisessem comparar só com a função seno de *x*?
Diogo: Só com seno de *x*?
Investigadora: Sim. O que vocês concluíram está correto, mas …
Diogo: Ah! Ok. (Visualizam a representação gráfica de seno de x) Ah! Pois!
Francisco: Vemos que (pausa), em relação à função seno de *x*, a função …
Diogo: Sobe três unidades.
Francisco: Sobe três unidades.
Diogo: Sobe três unidades e depois (pausa longa), fica o simétrico do seno, de *x*.
Francisco: Mas … Exato!
Investigadora: (Pausa longa) Ok. Sobe três unidades e depois é o simétrico, isso não importa, a ordem importa? No fundo têm aí duas transformações geométricas, certo?
Francisco: Certo.
Investigadora: E a ordem por que elas aparecem não importa?
Francisco: (Pausa longa) Importa!
Diogo: A ordem?
[…]
Francisco: Eu acho que temos que fazer primeiro a simetria.
Diogo: Sim.
Francisco: E depois fazemos a subida. (E5)

A resolução da questão 1.6 da ficha de avaliação de 28 de fevereiro de 2011 (Anexo 15), onde se pediam as equações das assíntotas do gráfico da função $v(x) = -g\left(x+1\right) - 2$ mostra que a simetria relativamente ao eixo das abcissas, a partir de dada altura, também se tornou instrumental na atividade do aluno, apesar de algumas imprecisões na linguagem:


1.6. A função g(x) tem como assimptotas:
x = 4 e y = 1.

Então, a função g(x+1) será conseguida através de uma translacção da função g(x) na horizontal, segundo o vector (−1, 0). Pelo que, as suas assimptotas serão:

x = 3 e y = 1.

De seguida, a função −g(x+1) será conseguida por uma simetria da função g(x+1) segundo o eixo Ox. Pelo que, as suas assimptotas serão:
x = 3 e y = −1.

A função v(x) = −g(x+1) −2 será conseguida por uma translacção na vertical segundo o vector de coordenadas (0, −2). Pelo que, as suas assimptotas serão:

x = 3 e y = −3.

Figura 130 – Resolução da questão 1.6, ficha de avaliação de 28 de fevereiro de 2011.

A simetria em relação ao eixo das ordenadas não foi praticamente abordada na sala de aula, e a questão 1.3 da quinta entrevista (Anexo 5), devido ao caso particular da função envolvida, não permitiu aos alunos distinguir a simetria em relação ao eixo *Oy* da simetria em relação ao eixo *Ox* (Figura 78). A exploração da questão 2.1 poderia contribuir para que os alunos conseguissem perceber a diferença entre uma transformação e a outra, no entanto, estes não atenderam à relação entre os domínios das duas funções, copiando a representação gráfica de g no intervalo $[0, 2\pi]$.

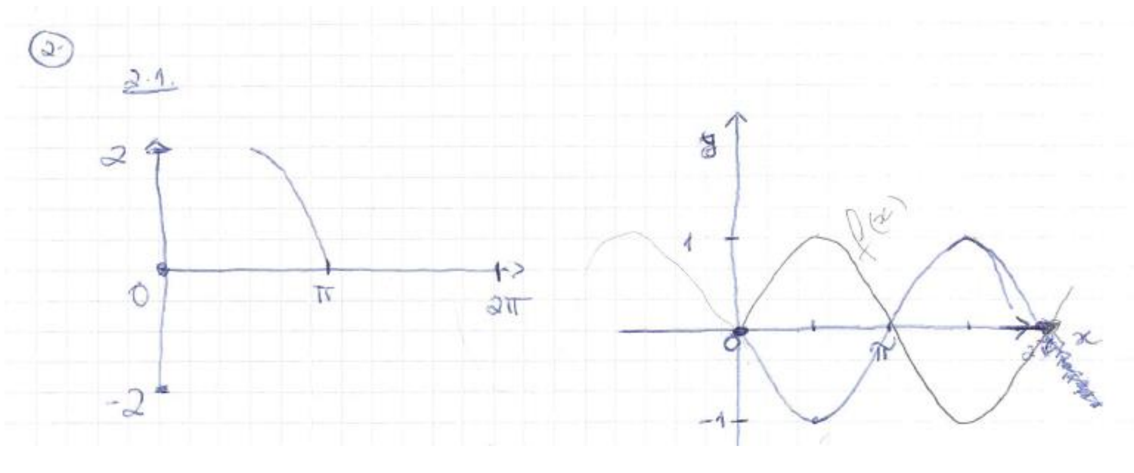


Figura 131 – Representação gráfica das funções *f* e *g* (E5, questão 2.1).

Ao serem questionados acerca do domínio da função g, o Francisco considerou que seria igual ao de *f*, o que revela pouco à-vontade a trabalhar com situações em que o domínio é um intervalo limitado. Neste caso a calculadora gráfica não foi convertida num instrumento eficiente, já que o aluno não conseguiu relacionar o domínio das duas funções. Foi possível perceber que o aluno não tem conhecimento da possibilidade de definir o domínio da expressão, ao editá-la na calculadora.

Alongamento vertical ou horizontal

Tal como a simetria relativamente ao eixo Oy, também o alongamento vertical e horizontal não foi praticamente trabalhado na sala de aula. Ao serem confrontados com a questão 1.3 da quinta entrevista (Anexo 5), os alunos não estavam familiarizados com os efeitos da transformação, pelo que a abordagem seguida pelo par foi a atribuição de valores aos parâmetros. A exploração da questão foi dividida, tendo o Diogo ficado com a investigação dos efeitos do parâmetro *d* e o Francisco com os de *c*. Em seguida, foram transmitindo um ao outro as suas conclusões, fazendo depois alguma exploração conjunta, nomeadamente no caso de os parâmetros tomarem valores negativos. Apesar de atribuíram valores positivos e negativos aos parâmetros, consideraram apenas valores absolutos maiores que um. As conclusões retiradas pelo par encontram-se registadas na Figura 132.

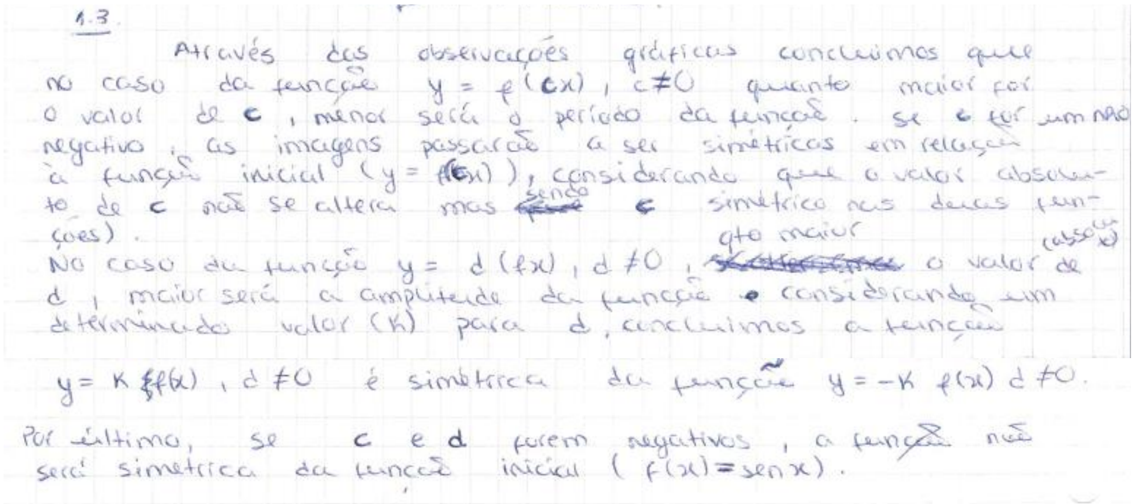


Figura 132 – Resolução da questão 1.3 (E5).

Como se depreende da leitura da resposta à questão, os alunos conseguiram relacionar os efeitos dos parâmetros com algumas características da função trigonométrica envolvida, como o período e a amplitude, apesar de algumas imprecisões na linguagem. Por exemplo, referem que quanto maior é o *c* menor será o período da função, quando deveriam referir o valor absoluto. Ao escreverem as conclusões relativas ao parâmetro *d*, essa questão é levantada pelo Francisco e registada na resposta:

> **Diogo**: Quanto maior for o valor de *d*, maior a amplitude (pausa), da função. […] Se alterarmos o …
> **Francisco**: E vice-versa, não é?
> **Diogo**: Claro! (Risos)
> **Francisco**: Não!
> **Diogo**: E vice-versa? Como assim?
> **Francisco**: Não, não! Se o *d* for negativo também aumenta …
> **Diogo**: Sim, quanto maior o valor absoluto mais aumenta! Percebes?
> **Francisco**: O valor …, então tem que se escrever. (Emenda e lê) O valor absoluto de *d*, maior será a amplitude da função. (E5)

Ao explorarem a questão 2.2 ambos os alunos consideraram que *c* deveria ser 2, no entanto, após a investigadora pedir para identificarem as representações gráficas de *f* e de *h*, o Francisco conseguiu transferir as conclusões retiradas a partir da exploração da questão 1.3, relativas a esse parâmetro, para a situação apresentada, compreendendo que deveria ser igual a 0,5. A calculadora gráfica permitiu-lhes confirmar a conjetura do Francisco, apesar de não conseguirem restringir o domínio da função *f*.

Os invariantes operatórios relativos a estas transformações não foram instituídos, o que não é de estranhar dado que as explorações ocorreram em situações pontuais, no entanto, é possível perceber que o alongamento vertical parece ser mais intuitivo, tendo o aluno logo na terceira entrevista efetuado a previsão acerca do valor corrigido para o máximo da função que dá a área do triângulo quando se apercebeu que editou a expressão $y=(50-2x)\left(\sqrt{50x-625}\right)$ em vez de $y=(25-x)\sqrt{50x-625}$:

> **Francisco**: […] Pois foi enganei-me, deveria ser esta aqui (risca e escreve vinte e cinco menos *x*). O que vai alterar tudo. (Volta à calculadora, emenda a expressão e visualiza o gráfico) Quer dizer, não vai alterar tudo mas … O máximo vai ser diferente. (Começa os procedimentos para determinar o máximo usando as funcionalidades da calculadora) Provavelmente vai ser metade … (E3)

O mesmo não acontece relativamente ao alongamento horizontal, que parece ser um pouco contraintuitivo. Por exemplo, relativamente à transformação $f\left(\frac{x}{2}\right)$, presente na questão 1.2 da sétima entrevista (Anexo 7), o Francisco demorou bastante tempo a explorar com a calculadora o seu efeito na representação gráfica, partindo de funções cúbicas mais simples, exclamando "é curioso" ao perceber o comportamento da função:

> **Francisco**: Hum, pois! Aqui neste caso os zeros vão se alterar! (Pausa) Eu vou ver é se consigo estabelecer uma relação. Aqui ficou para, era menos dois (aponta) e aqui passou para menos quatro (pausa longa), o que é curioso!
> **Investigadora**: (Risos) É curioso?
> **Francisco**: Hum, hum.
> **Investigadora**: (Pausa longa) Então porquê?
> **Francisco**: Então, porque se passou para o quatro, os zeros também (pausa), automaticamente se dividirmos, ou melhor, neste caso é, como se andássemos, duas casas para a esquerda, mas isso é porque era o dobro! Ficava quatro. (E7)

Uma abordagem pontual poderia permitir uma melhor compreensão neste tipo de situação, mas o aluno não tomou essa iniciativa. Contudo, ao ser questionado acerca da imagem de -4 através da função $f\left(\frac{x}{2}\right)$, o Francisco acabou por compreender melhor a transformação:

> **Francisco**: (Aponta) Aqui? Metia menos quatro sobre dois (pausa), que é igual a menos dois, f de menos dois …
> **Investigadora**: Quanto é que era o f de menos dois?
> **Francisco**: Era zero.
> **Investigadora**: Então, essa dava zero, quando o *x* era o quê?
> **Francisco**: (Pausa) Menos quatro. Ah! (Pausa) Fazia sentido! (Risos)
> **Investigadora**: Faz sentido ou não?
> **Francisco**: Faz! Tal como aqui se o *x* fosse aqui dois (aponta o zero na representação gráfica), não, mas assim não.
> **Investigadora**: Dois? Mas porquê dois?
> **Francisco**: Não, aqui neste caso era um, não aqui neste caso era dois, dois sobre dois …
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: Ah, faz, faz. Dois sobre dois, igual a um, *f* de um é zero (pausa longa), pois, no fundo tem lógica! (Pausa longa) É porque o *x* tem que … Já percebi! O *x* tem sempre que passar para o dobro, porque está sempre a dividir por dois, então para ser … (E7)

Em resumo, a visualização dos efeitos das transformações de funções na representação gráfica da função original, a partir do artefacto mediador, vai permitindo ao aluno memorizar esses efeitos, o que contribui para a instituição dos teoremas-em-ação que utiliza depois em situações semelhantes, sem recurso ao artefacto. Os teoremas-em-ação, como por exemplo, $f(x)+k$ *corresponde a uma translação do gráfico de f associada ao vetor* $(0,k)$, ou, $f(x-h)$ *corresponde a uma translação associada do gráfico de f associada ao vetor* $(h,0)$, parecem assim basear-se mais na memorização do que na compreensão desses efeitos. Em situações de dúvida relativamente aos efeitos da transformação o Francisco integrou a calculadora gráfica na atividade, mesmo na situação em que desconhecia a expressão analítica da função original, baseando nesse caso a sua exploração em funções do mesmo tipo. Porém, a exploração fica dependente da interpretação da notação envolvida, o que levanta dificuldades ao aluno, como foi visto na secção 8.4.5.

As transformações de funções são encaradas pelo Francisco essencialmente a nível global, a partir da visualização da representação gráfica, no entanto, uma abordagem a nível local poderia contribuir para uma melhor compreensão das transformações de funções e dos seus efeitos na representação gráfica. A utilização eficaz da calculadora gráfica no que diz respeito às transformações de funções depende também da compreensão do conceito de função, tendo sido possível perceber que, no caso em que o domínio é um intervalo limitado, o aluno não conseguiu utilizar a calculadora de modo eficiente por não atender ao domínio da função correspondente à transformação.

8.5.3. Conversão de representações

Conversão da representação verbal na representação gráfica ou algébrica

O Francisco nem sempre conseguiu efetuar corretamente a conversão da representação verbal de uma função na representação gráfica. Por exemplo, no teste intermédio de 5 de maio de 2010, questão 2 do grupo II, (Anexo 9), o aluno considerou que as duas irmãs se deslocavam à mesma velocidade, embora apenas fosse referido que cada uma delas se deslocava a uma velocidade constante:

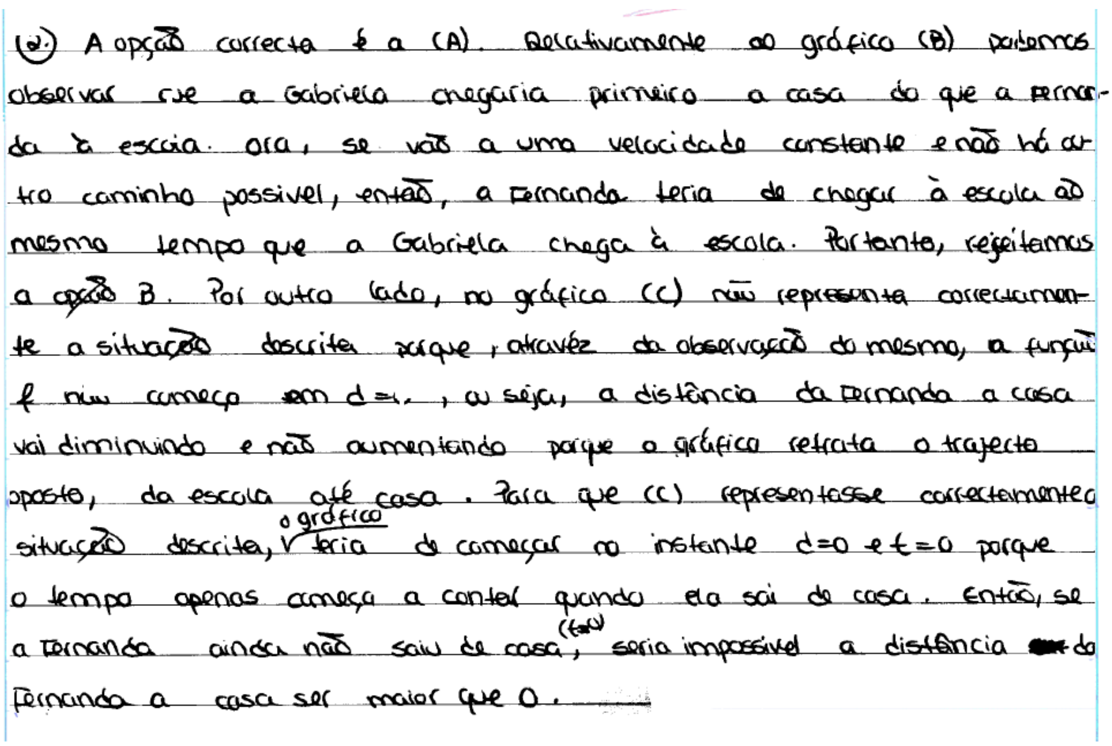

(2) A opção correcta é a (A). Relativamente ao gráfico (B) podemos observar que a Gabriela chegaria primeiro a casa do que a Fernanda à escola. Ora, se vão a uma velocidade constante e não há outro caminho possível, então, a Fernanda teria de chegar à escola ao mesmo tempo que a Gabriela chega à escola. Portanto, rejeitamos a opção B. Por outro lado, no gráfico (C) não representa correctamente a situação descrita porque, através da observação do mesmo, a função f não começa em d=1, ou seja, a distância da Fernanda a casa vai diminuindo e não aumentando porque o gráfico retrata o trajecto oposto, da escola até casa. Para que (C) representasse correctamente a situação descrita, o gráfico teria de começar no instante d=0 e t=0 porque o tempo apenas começa a contar quando ela sai de casa. Então, se a Fernanda ainda não saiu de casa (t=0), seria impossível a distância da Fernanda a casa ser maior que 0.

Figura 133 – Resolução da questão 2, do grupo II, do teste intermédio de 5 de maio de 2010.

Também na segunda parte do teste de março de 2010, questão 2 (Anexo 9), o Francisco não conseguiu identificar corretamente a representação gráfica associada à representação verbal. Neste caso, o problema ficou a dever-se à dificuldade em antever o tipo de covariação entre as duas variáveis. Embora este tipo de questão seja usualmente resolvida sem recorrer a outra representação, a escrita da representação algébrica poderia contribuir para identificar a representação gráfica correta, já que permitiria ao aluno recorrer à calculadora gráfica.

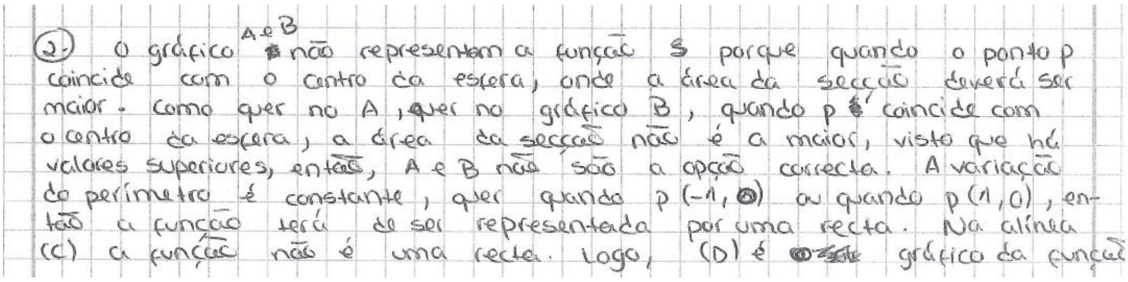
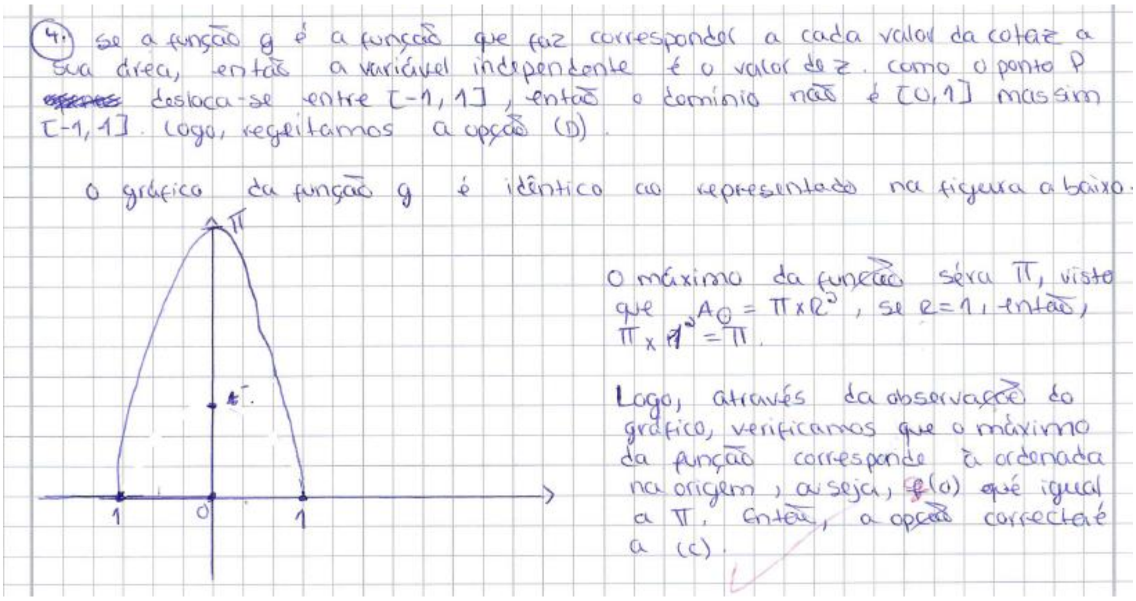

(2) O gráfico A e B não representam a função S porque quando o ponto P coincide com o centro da esfera, onde a área da secção deverá ser maior. Como quer no A, quer no gráfico B, quando P coincide com o centro da esfera, a área da secção não é a maior, visto que há valores superiores, então, A e B não são a opção correcta. A variação do perímetro é constante, quer quando P(−1,0) ou quando P(1,0), então a função terá de ser representada por uma recta. Na alínea (C) a função não é uma recta. Logo, (D) é o gráfico da função

Figura 134 – Resolução da questão 2, da segunda parte, do teste de 5 de março de 2010.

É de salientar que, posteriormente, perante uma situação semelhante, embora não sendo propriamente necessário identificar a forma da representação gráfica para responder à questão, o Francisco conseguiu efetuar a conversão na representação gráfica, possivelmente passando pela representação algébrica e o recurso à calculadora, apesar de isso não estar explícito na resolução do aluno:


4. Se a função g é a função que faz corresponder a cada valor da cota z a sua área, então a variável independente é o valor de z. Como o ponto P desloca-se entre [-1, 1], então o domínio não é [0, 1] mas sim [-1, 1]. Logo, regeitamos a opção (D).

O gráfico da função g é idêntico ao representado na figura a baixo.

O máximo da função séra π, visto que $A_{\bigcirc} = \pi \times R^2$, se $R = 1$, então, $\pi \times 1^2 = \pi$.

Logo, através da observação do gráfico, verificamos que o máximo da função corresponde à ordenada na origem, ou seja, g(0) que é igual a π. Então, a opção correcta é a (C).

Figura 135 – Resolução da questão 4, primeira parte, teste de 4 de junho de 2010.

No que diz respeito à conversão da representação verbal na representação algébrica, o Francisco mostrou alguma facilidade em termos da escrita de uma variável em função de outra, contudo, nem sempre conseguiu ser bem-sucedido, já que, muitas vezes, associada à representação verbal estão outras representações, como a geométrica, sendo necessário relacionar diferentes conteúdos para obter uma expressão algébrica. Tanto no teste de 5 de março de 2010, questão 4.1 (Anexo 9), como no teste intermédio de 5 de maio de 2010, questão 3.1 (Anexo 9), o Francisco não conseguiu efetuar a conversão da representação gráfica na representação algébrica, sendo evidente a dificuldade em utilizar a semelhança de triângulos para obter uma relação entre as duas variáveis.

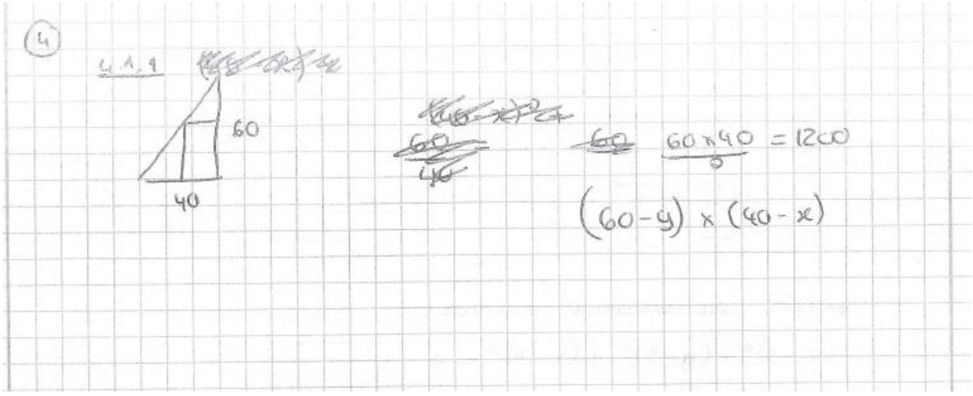


Figura 136 – Resolução da questão 4.1.1, teste de 5 de março de 2010.

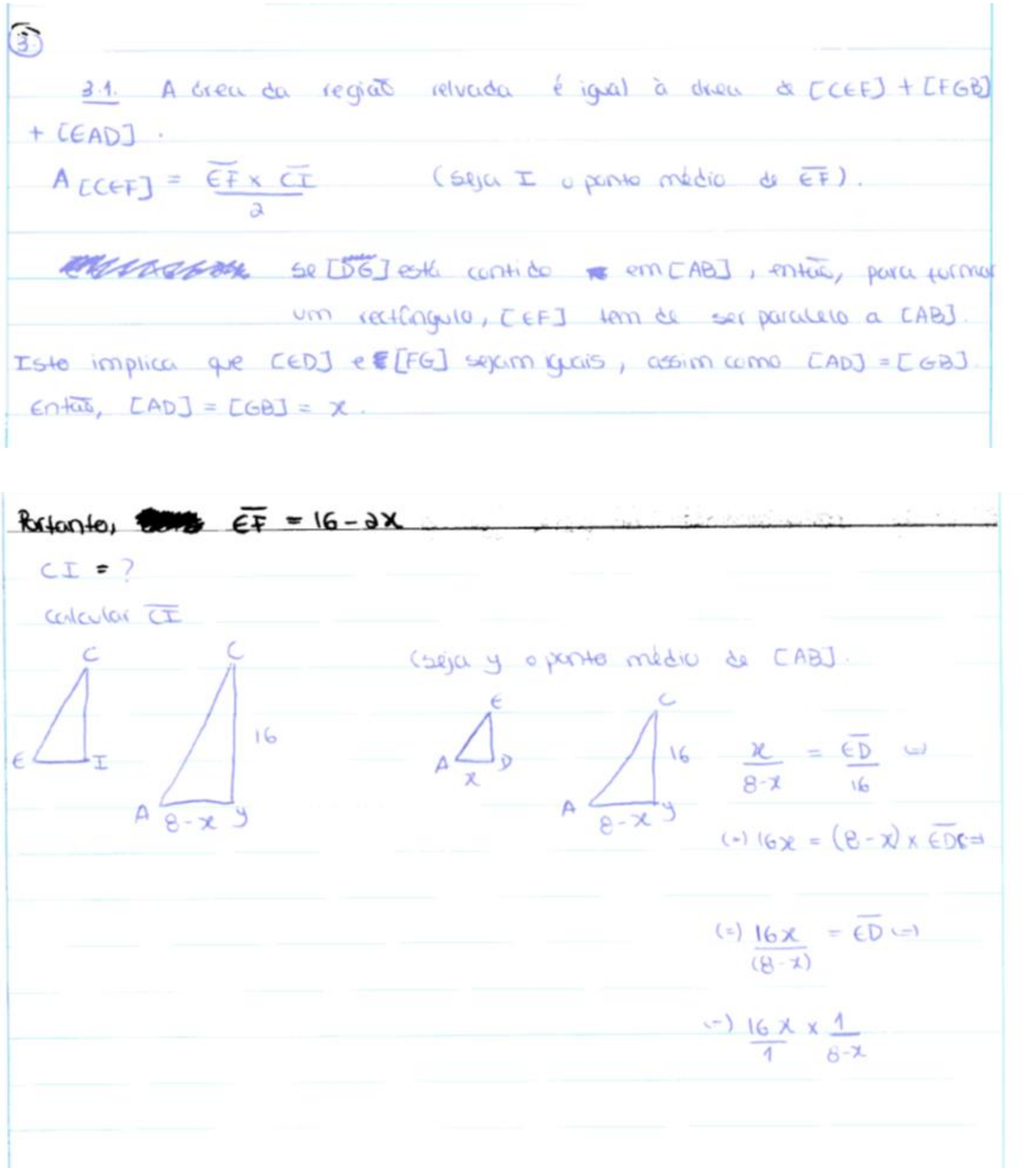


Figura 137 – Resolução da questão 3.1 do teste intermédio de 5 de maio de 2010.

Na questão 3.3 da terceira entrevista (Anexo 3), o Francisco conseguiu recorrer ao teorema de Pitágoras, revelando alguma facilidade em termos da escrita de uma variável em função da outra:

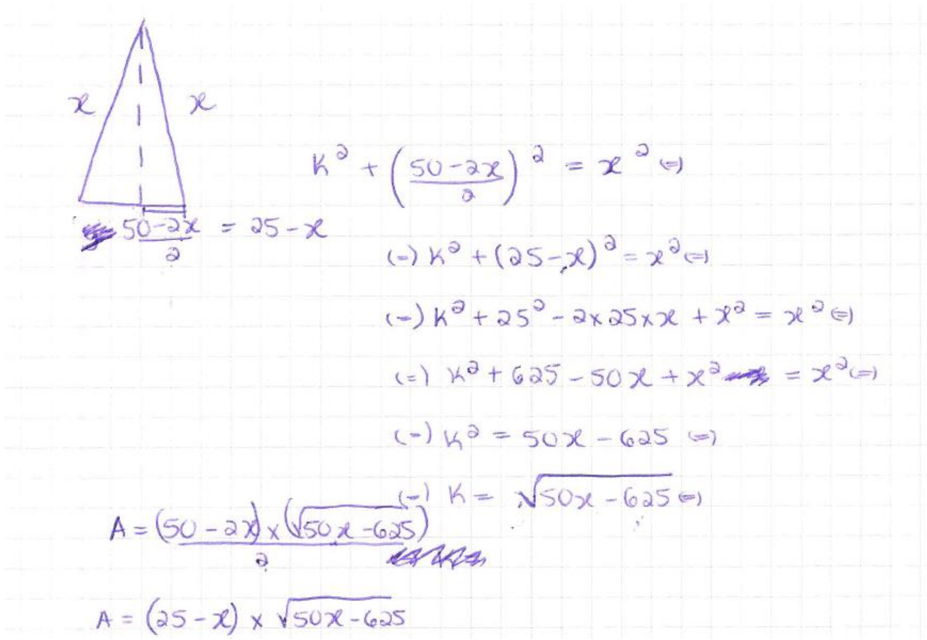


Figura 138 – Determinação da expressão que dá a área do triângulo em função de *x* (E3, questão 3.3).

Dificuldades de ordem algébrica podem, como é evidente, condicionar a correta conversão. Por exemplo, apesar de o Francisco ter tido à-vontade para escrever a altura e a área em função de *x*, foi possível observar algumas dificuldades na simplificação da expressão $\frac{50-2x}{2}$. Ainda nessa questão, o aluno pretendia efetuar a raiz de 625: "Até podia pôr cinquenta *x* menos vinte e cinco, mas pronto" (E3), não compreendendo que não o poderia fazer.

É interessante notar que os próprios números envolvidos na questão podem dificultar a conversão. Por exemplo, na questão 6.1 da oitava entrevista (Anexo 8), o Francisco manifestou alguma dificuldade na conversão, por um lado, inicialmente não considerou corretamente a área lateral do cilindro, tendo depois também alguma dificuldade em relacionar a altura com o raio e em utilizar corretamente as unidades:

> **Francisco**: Mas eu não estou a perceber é onde é que eu vou, onde é que isso me dá … É que eu hoje estou um bocado burro.

> Não, o que eu não percebi, é que mesmo que aqui seja a altura (risca na representação), isto vai ser quanto?
> **Investigadora**: Ok, tens que ver se te dizem mais qualquer coisa que possas relacionar, com o raio.
> **Francisco**: Pois. (Pausa longa) Isto é preciso ter um poder de (pausa), abstração!
> **Investigadora**: Ok, o que é que sabes mais do cilindro? (Pausa) Porque eles dizem aí qualquer coisa, ainda não usámos tudo.
> **Francisco**: (pausa longa) Hum, a capacidade da
> **Investigadora**: Isso diz qualquer coisa, não é?
> **Francisco**: Meio litro, um litro é igual a um decímetro cúbico, isto tem que ser centímetros quadrados … (E8)

Por outro lado, após ter ultrapassado a dificuldade relacionada com a escrita da área do cilindro e com a redução das unidades, o Francisco revelou alguma insegurança relativamente à expressão obtida, manifestando-se relativamente ao facto de envolver o número π quando resolvia a questão seguinte:

> **Francisco**: […] Isto está mal de certeza, está mal de certeza! (Fica a observar) Bem, já estava feito! Com muita …, mas já estava feito! […] *Stora*, diga-me qual é mesmo a expressão que fica! Porque esta expressão não é de certeza!
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: (Pausa longa) Eu não estou nada mesmo inspirado para isto, acho que isto não vai dar mesmo nada isto (sublinha a expressão, Figura 139). (Pausa longa) Quer dizer no fundo estava expresso em coiso …
> […]
> **Francisco**: Isto é muito estranho, *Stora*!
> **Investigadora**: (Risos) Porque é que é muito estranho?
> **Francisco**: Porque é com pis! (E8)

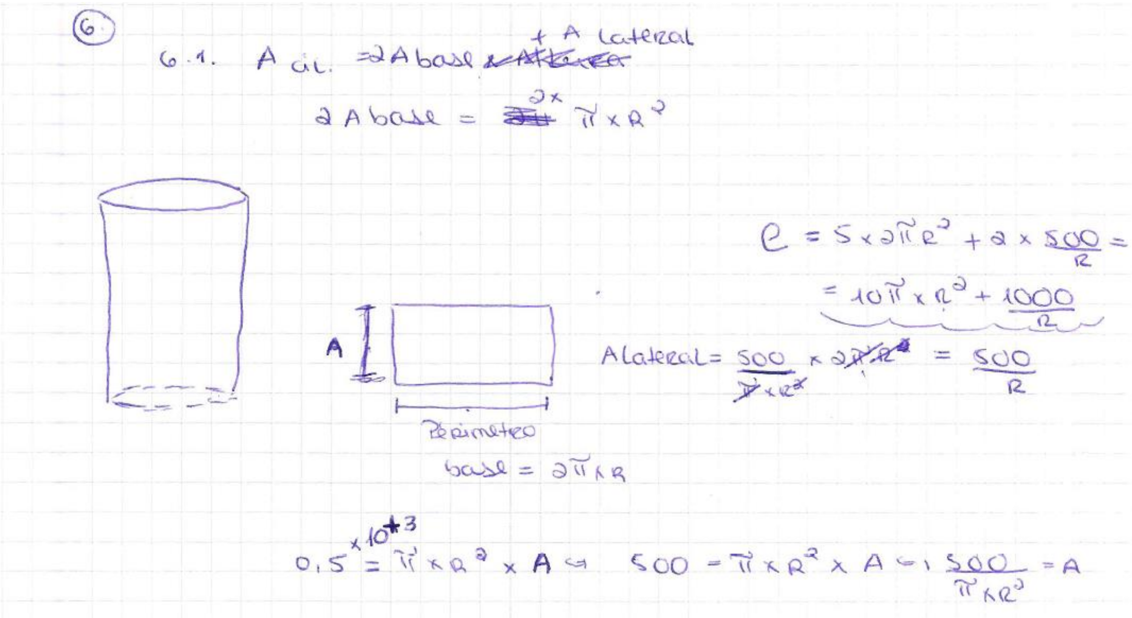


Figura 139 – Resolução da questão 6.1 (E8).

O Francisco foi revelando alguma facilidade em termos da escrita de uma variável em função de outra, contudo, muitas vezes, a conversão da representação verbal na representação algébrica é influenciada por outros fatores, entre os quais o estabelecimento de relações entre vários conteúdos e a fluência algébrica.

Conversão da representação algébrica na representação gráfica

A conversão da representação algébrica na representação gráfica é feita pelo Francisco, geralmente, recorrendo à calculadora gráfica. Apesar de a conversão ser feita de forma imediata pela calculadora, o aluno tem que ajustar a janela e decidir se está ou não perante uma representação gráfica aceitável, ou procurar as janelas adequadas à visualização das principais características da função envolvida, o que pressupõe o estabelecimento de conexões entre as representações algébrica e gráfica e, eventualmente, a numérica. A escolha da janela de visualização é feita, como vimos na secção 8.3.2, através de tentativa e erro, no entanto, esse processo não é usualmente feito ao acaso, tendo sido possível perceber que o aluno tenta relacionar a representação algébrica e a gráfica. Por vezes, essa relação pode ser baseada em imagens mentais que não são válidas, como aconteceu, por exemplo, relativamente à função $f(x) = \left|x^2 + 50x - 104\right|$ que, pelo facto de envolver um módulo, fez suscitar a imagem de uma representação gráfica em forma de V, o que foi reforçado pela representação gráfica visualizada na calculadora nas várias janelas utilizadas. Na altura o aluno tinha explorado na sala de aula o módulo de funções representadas por retas oblíquas, tendo retido a imagem de um V, contudo, quando a investigadora lhe pediu para confirmar o suposto eixo de simetria, o Francisco compreendeu que algo estava errado, conseguindo depois conceber a representação gráfica da função, tendo em conta a representação da função quadrática e a definição de módulo.

Relativamente às funções afins e quadráticas parece que o aluno desenvolveu alguns esquemas que lhe permitem identificar algumas características relevantes no registo algébrico e os consequentes efeitos no registo gráfico, embora no caso das funções quadráticas isso nem sempre seja evidente. Por exemplo, na questão 2 da quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4), os alunos optaram por efetuar o esboço da representação gráfica de cada um dos fatores, conseguindo fazê-lo sem recorrer à calculadora no caso dos fatores do primeiro grau e nalguns do segundo. Porém, perante o fator $\left(x^2+2\right)$, tanto o Francisco como o colega tiveram algumas dificuldades na conversão, com o Diogo a considerar que tinha que modificar a expressão e o Francisco a assinalar o vértice no ponto de coordenadas $(-2,0)$ (visível na Figura 140, a forma de parábola encontra-se, no entanto, muito sumida). A translação do gráfico da função $y=x^2$ associada ao vetor $(0,2)$ só foi evocada depois de o Diogo ter visualizado a representação na calculadora:

> **Francisco**: […] Esta aqui [x^2+2] é igual a isto (representa sumido com a esferográfica, como se a representação gráfica de $y=x^2$ tivesse sofrido uma translação horizontal), dá-me o lápis, é esta (passa com o lápis). Agora esta …. Esta aqui (aponta), *x* mais um, é para aqui (representa ao lado)
> **Diogo**: (Estava a mexer na calculadora e deve ter feito a representação do primeiro fator) O que é que tu disseste? Que era igual a qual (espreita para a folha onde o Francisco representou, a Investigadora tapa com a mão o visor da calculadora do Diogo).
> **Francisco**: Não é? Não é!?
> **Diogo**: A *Stora* tapou! É para eu não te dizer.
> **Francisco**: Supostamente é porque não é.
> **Investigadora**: É *x* quadrado, não é? Mais dois!
> **Diogo**: Sim. (Pausa) E o mais dois é qual? Como se fosse o *k*, não?
> **Francisco**: Sim. Ah! Não! Pois é, era subir em vez de deslocar para o lado. (E4)

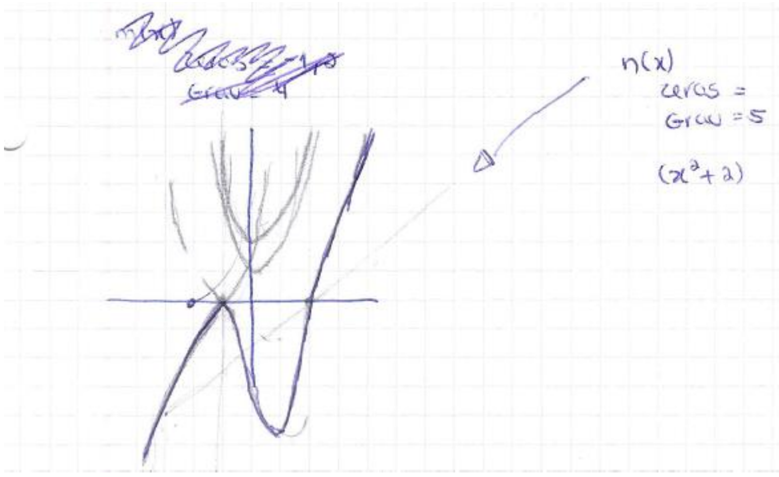


Figura 140 – Esboço da forma da representação gráfica da função *n*, a partir da representação gráfica dos fatores (E4, parte conjunta, questão 2).

Em algumas ocasiões o Francisco manifestou confusão entre uma parábola e representação gráfica com forma sinusoidal. Por exemplo, na quinta entrevista, o Diogo considerou o retângulo de visualização $[-1,1]\times[-1,1]$ para a função seno. Ao ser questionado se estava a visualizar uma representação aceitável do gráfico da função, o aluno alterou os valores da variável independente para o intervalo $\left[-50,50\right]$, e a investigadora tentou que os alunos referissem o facto de a função seno ser periódica, contudo, o Francisco refere-se a uma função quadrática. Mesmo depois de a investigadora lhe chamar a atenção para o tipo de representação gráfica que corresponderia a uma função quadrática, o Francisco refere "são muitas parábolas":

> **Francisco**: Cinquenta?
> **Diogo**: Sim! Eh lá! (Risos)
> **Investigadora**: (Risos) O que é que te aconteceu?
> **Diogo**: A calculadora pifou! (Vira o visor para a investigadora).
> **Investigadora**: Será?
> **Diogo**: Não *Stora*.
> **Investigadora**: Então porquê?
> **Diogo**: Só que como eu aumentei muito no *x*, o comprimento de cada, …
> **Investigadora**: E a função é o quê? Essa função, é uma função quê?
> **Diogo**: (Risos) Agora é o Francisco. (Mostra o visor ao colega) Esta função é uma função quê?
> **Francisco**: Hum, parece-me ser quadrática.
> **Investigadora**: Quadrática?
> **Francisco**: Se calhar … (Pausa) Ok, não é! (Risos)

> **Investigadora**: Não, quadrática, a representação gráfica seria o quê?
> **Francisco**: Uma parábola.
> **Investigadora**: Uma parábola, não é?
> **Francisco**: São muitas parábolas! (E5)

Posteriormente, na sexta entrevista (Anexo 6), ao indicar a forma da representação gráfica da função $g(x)=\frac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1}$, o aluno voltou a revelar essa confusão, o que sugere que a relação entre a representação algébrica e gráfica, no caso das funções quadráticas, parece ter sido esquecida do décimo para o décimo primeiro ano:

> **Investigadora**: […] O que é que esperarias obter, graficamente?
> **Francisco**: (Pausa) Esperaria obter, eu para mim não sabia como é que seria a representação gráfica de menos *x* ao quadrado, mais três *x*, …, ou de alguma função, *x* ao quadrado, *x*, … (vai fazendo gesto com a mão).
> **Investigadora**: Não tens ideia de qual é a representação gráfica de uma função desse género?
> **Francisco**: Tenho duas ideias.
> **Investigadora**: Duas? Então já … (ri)
> **Francisco**: Uma é uma parábola, mas eu acho que uma parábola é só quando temos uma incógnita ao quadrado, e a outra é, algo do género de uma onda (faz um gesto sinusoidal com o dedo), mas não deve ser. (E6)

Estes exemplos vêm reforçar o facto de que, mesmo para as funções quadráticas, a conversão da representação algébrica na gráfica nem sempre é imediata para o aluno, particularmente no décimo primeiro ano.

No caso das funções cúbicas, apesar de o aluno estar consciente que poderão ter no máximo três zeros, não parece haver evidência de que tenha desenvolvido outros esquemas que lhe permitam antever a forma da representação gráfica, mesmo no caso em que a expressão permite identificar de imediato os zeros e o coeficiente diretor do polinómio, como acontece na expressão $f(x)=-(x+2)^2(x-1)$, presente na questão 2 da quarta entrevista, parte conjunta (Anexo 4). Não tendo ideia da forma da representação, os alunos optaram por tentar deduzi-la a partir da representação gráfica dos fatores envolvidos (Figura 141).

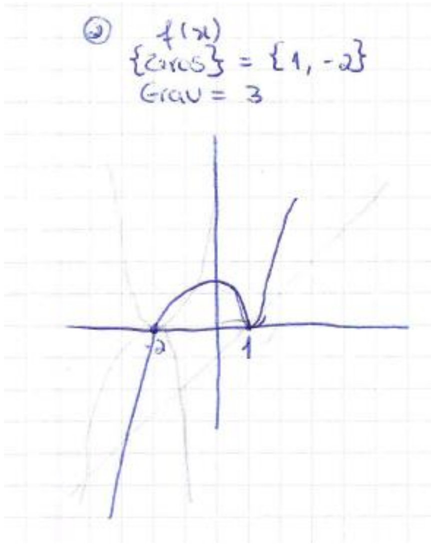


Figura 141 – Esboço da forma da representação gráfica de f, a partir do esboço da representação gráfica dos fatores (E4, parte conjunta, questão 2).

Apesar de a decomposição de um polinómio em fatores, no décimo ano, ter sido bastante trabalhada ao nível algébrico na sala de aula, o aluno não evocou esse tipo de representação algébrica e a sua relação com os zeros do polinómio quando tentava explorar com a calculadora gráfica, a partir de outras funções cúbicas, os efeitos da transformação $f\left(\frac{x}{2}\right)$, presente na questão 1.2 da sétima entrevista (anexo):

> **Investigadora**: […] E agora ias fazer o quê na máquina?
> **Francisco**: Ia tentar arranjar uma expressão, mais completa, da do terceiro grau.
> **Investigadora**: Então, pode ser que …
> **Francisco**: (Edita a função $y = x^3 + 2x^2 + x$ e visualiza) (Baixinho) Não! (Vai ao editor de funções e anda com o cursor sobre a expressão) Pronto não dá! (Pausa longa, enquanto desloca o cursor) É que não, não consigo mesmo pensar, no que poderá … (pausa longa), é que mesmo que eu meta mais três ou assim (soma três à expressão anterior), só vai alterar (visualiza), ali. Para ser igual esta parte tinha que vir para baixo (assinala no visor).
> **Investigadora**: (Pausa longa) Como é que podes fazer essa parte ir para baixo? (Pausa) Se é que podes! (Ri).
> **Francisco**: É assim (ri), poder posso! Não sei é como! (E7)

Para além de não evocar a escrita da expressão analítica sob a forma de fatores, o aluno também não conseguiu estabelecer relação com as transformações de funções de modo a fazer com que a representação gráfica da função $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ sofresse uma translação vertical, passando a uma representação gráfica com três zeros, como pretendia.

Relativamente às funções racionais, o Francisco desenvolveu esquemas para relacionar a representação algébrica e gráfica no caso em que a representação gráfica é uma hipérbole, estando a expressão escrita na forma $y = a + \frac{b}{x-c}$, $b \neq 0$. Quando a expressão não está escrita nessa forma o aluno efetua o tratamento algébrico, utilizando a divisão inteira dos polinómios, como explica quando resolve a questão 1.5 da sexta entrevista (Anexo 6):

> **Francisco**: Eu estava a tentar ver, se nós podíamos fazer (pausa longa), como é que eu hei de dizer? Transformar estas equações, haaa, para sabermos a assimptota horizontal do gráfico, e vermos até ao máximo que elas, podem ir (faz um gesto de expansão com as duas mãos), o raio delas podem ir, depois de sabermos o máximo, o máximo que nunca chega àquele tal máximo, mas no final de sabermos esses dois … […] Depois de sabermos, quase o máximo que ela pode atingir, podemos somar os dois e vemos se consegue chegar aos dez centímetros, mas estar a fazer isso tudo e depois não ser! (Pausa) Mas eu vou tentar!
> **Investigadora**: Hum, hum. (Pausa) Portanto, falaste em assimptota horizontal, tu olhando para a expressão consegues, imaginar a representação gráfica?
> **Francisco**: Hum, não! Por isso é que eu vou fazer a divisão …
> **Investigadora**: Sim.
> **Francisco**: Para conseguir …
> **Investigadora**: Hum, hum.
> **Francisco**: (Efetua a divisão e o tratamento algébrico) Pronto, agora já sei as assimptotas horizontais, que são o cinco e o quatro, agora, tecnicamente imagino na representação gráfica, que o raio só poderá alcançar, em princípio, o cinco ou o quatro. Mas é melhor eu verificar sempre na calculadora, porque pronto … (pausa), posso? (E6)

O aluno identificou a assíntota horizontal do gráfico da função a partir da expressão e parece relacionar o tipo de monotonia da função com o sinal de *b* na expressão $y = a + \frac{b}{x-c}$, embora tenha optado por confirmar a configuração da hipérbole com a calculadora gráfica.

No caso em que o divisor tem o coeficiente do termo em *x* diferente de um, o aluno não parece ter desenvolvido esquemas para escrever a expressão na forma referida acima. Isso parece evidente quando refere não conseguir determinar o domínio da função $f(x)=\dfrac{8-4x}{2x-4}$, presente na questão 2 da sexta entrevista, apesar de ser uma situação um pouco diferente, já que neste caso $b=0$:

> **Francisco**: […] É assim normalmente eu, haaa, o domínio eu vejo quando temos, por exemplo, esta parte aqui, *x* menos três, ou *x* mais quatro …
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Como não, como não tenho o, apenas o *x*, como tenho dois *x* (pausa), como o *x* não está …, haaa, não consigo tirar, pronto, eu pelo menos não consigo tirar a conclusão de qual seria o domínio.
> **Investigadora**: Então e se tivesses *x* menos quatro?
> **Francisco**: Pois nesse caso, mas neste caso não ia conseguir. Não ia conseguir das duas maneiras, eu pensava que ia conseguir, afinal não era, se tivesse *x* menos quatro, pensava que era $\mathbb{R}$ exceto quatro.
> **Investigadora**: Hum. E porque é que pensavas isso?
> **Francisco**: Porque (pausa), parece que já estou habituado à função (pausa), às funções um sobre *x*, (não se percebe bem o que diz), às hipérboles, pronto. É por isso. (E6)

No momento, o aluno não parece ter relacionado de imediato o domínio com os valores que não anulam o denominador da fração racional, baseando a sua justificação em imagens mentais referentes às funções racionais que lhe são familiares. Além disso, parece ter ficado confuso com o facto de identificar a representação gráfica de *f* com uma reta, o que lhe sugeria que o domínio fosse o conjunto dos números reais. A calculadora gráfica não lhe permitiu a visualização do buraco, e o aluno não conseguiu que fosse um instrumento eficaz na conversão da representação algébrica na gráfica:

> **Francisco**: (Pega na máquina) Sendo a reta, sendo a reta constante, pressupõe-se que seja com domínio (faz um gesto na horizontal), indeterminado.
> **Investigadora**: Indeterminado?
> **Francisco**: Haa, pronto que não há, não há nenhum local do gráfico ou da função, onde, para o qual não haja imagem.
> **Investigadora**: Hum. Sim. E, mas a expressão inicial não era menos dois, não é?
> **Francisco**: Pois não!

> **Investigadora**: Ou seja, a expressão *f* de *x*, não dizia logo, diretamente que *f* de *x* era igual a menos dois, não é?
> **Francisco**: Pois não.
> **Investigadora**: E isso, será que altera alguma coisa, ou não?
> **Francisco**: (Pausa longa) Não sei. Eu acho, que não. Acho que estava era representada de maneira diferente, mas não sei. Vou colocar com uma janela maior (altera a janela), mas eu tenho quase a certeza que é assim, mas … […] É uma reta constante e, pronto! Pronto, é uma reta constante, uma função constante. (E6)

Mais tarde, no decorrer da entrevista, ao analisar a representação gráfica da função $g(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1}$ na calculadora gráfica, o Francisco voltou a considerar que o domínio seria o conjunto dos números reais, acabando depois por reformular o domínio de ambas as funções ao ser confrontado com a expressão da função *g*. Só então o aluno concluiu que as representações gráficas de *f* e de g deveriam apresentar um buraco: "provavelmente teria lá um pontinho sem, não deveria, ou melhor, não estaria lá um pontinho" (E6), não compreendendo, no entanto, porque é que não o visualizava na calculadora apesar de ter efetuado várias alterações na janela de visualização. A opção de calcular o valor surgiu quando a investigadora o questionou sobre outro modo de confirmar, com a calculadora, que a função não estava definida para determinado valor de *x*.

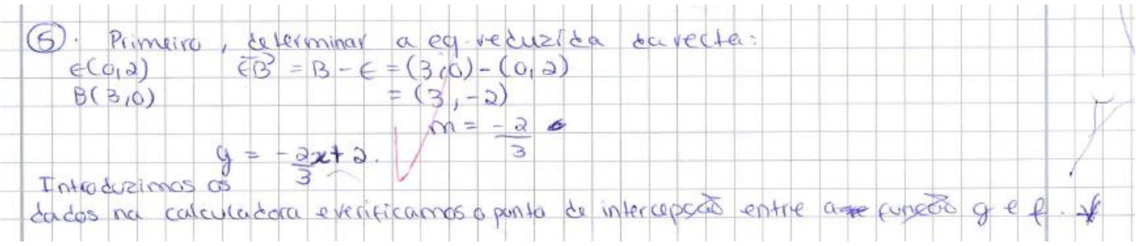
A representação algébrica de uma função racional parece evocar ao aluno uma hipérbole como representação gráfica, apesar de este conseguir perceber que nem sempre assim é ao efetuar o tratamento da expressão algébrica. Por exemplo, perante a questão 2.3 da sexta entrevista (Anexo 6), o Francisco começou por considerar que deveria identificar a assíntota horizontal, contudo, ao efetuar o tratamento da expressão algébrica compreendeu que o gráfico da função não possuía uma assíntota horizontal, optando por visualizar a representação gráfica na calculadora.

A conversão da representação algébrica na gráfica é feita quase sempre recorrendo à calculadora gráfica, no entanto, o desenvolvimento de esquemas que permitem relacionar as várias representações é muito importante para que a calculadora seja um instrumento eficiente na conversão, de modo que o aluno não seja influenciado pela representação que visualiza numa dada janela.

Conversão da representação gráfica na representação algébrica

Em determinadas funções o Francisco consegue identificar as propriedades relevantes no registo gráfico e relacionar com as correspondentes características no registo algébrico, nomeadamente, nas funções afins, quadráticas e racionais cuja representação gráfica é uma hipérbole. Para estas funções o Francisco conseguiu ser bem-sucedido ao efetuar a conversão da representação gráfica na algébrica, conseguindo articular com coerência os dois registos de representação.

Relativamente à função afim podemos ver, por exemplo, que o Francisco converteu corretamente a representação gráfica da função *g* presente na questão 5, da segunda parte, do teste de julho de 2010 (Anexo 9), na representação algébrica, sendo possível perceber que identificou a ordenada na origem diretamente. Porém, como foi visto na seção 8.3.1, o aluno esqueceu-se de introduzir a variável independente ao editar a expressão na calculadora, não identificando o erro.



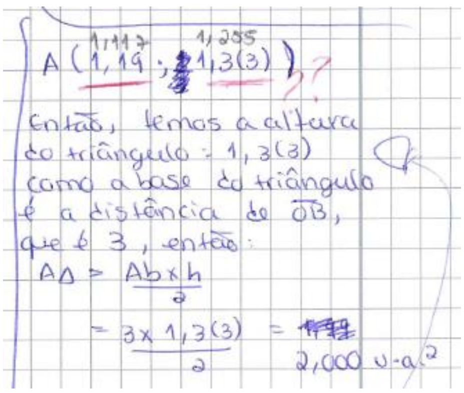


Figura 142 – Resolução da questão 5, segunda parte, teste de julho de 2010.

No que diz respeito à função quadrática, podemos, por exemplo, observar a conversão efetuada pelo Francisco e pelo Diogo relativamente à representação III presente na ficha *Relacionando a função quadrática e a função afim* (Anexo 11), a partir da identificação do vértice e de um ponto da parábola:

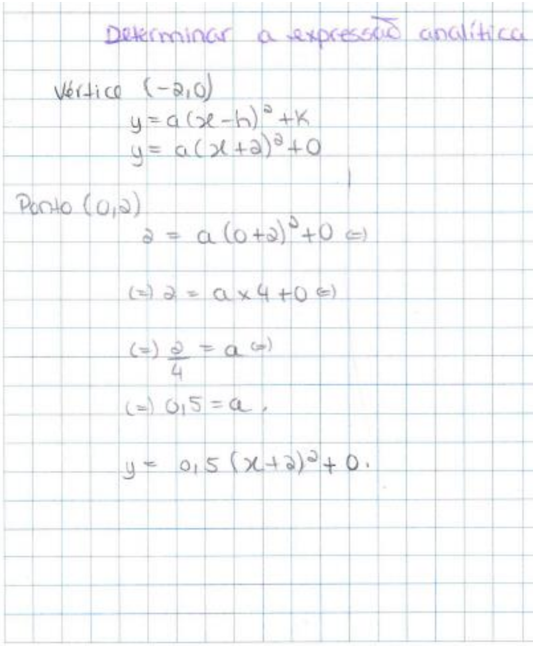


Figura 143 – Conversão da representação gráfica III na algébrica, ficha *Relacionando a função quadrática e a função afim*.

Quanto às funções racionais cuja representação gráfica é uma hipérbole, é possível ver que o aluno relaciona corretamente os parâmetros a e *c*, na expressão algébrica que é dada no enunciado, com as equações das assíntotas do gráfico da função *g*, ao efetuar a conversão da representação gráfica de *g* na algébrica, proposta na questão 1.3 da segunda parte da ficha de 28 de fevereiro de 2011 (Anexo 15). A determinação do parâmetro *b* é feita a partir de um ponto da hipérbole, dado no enunciado.

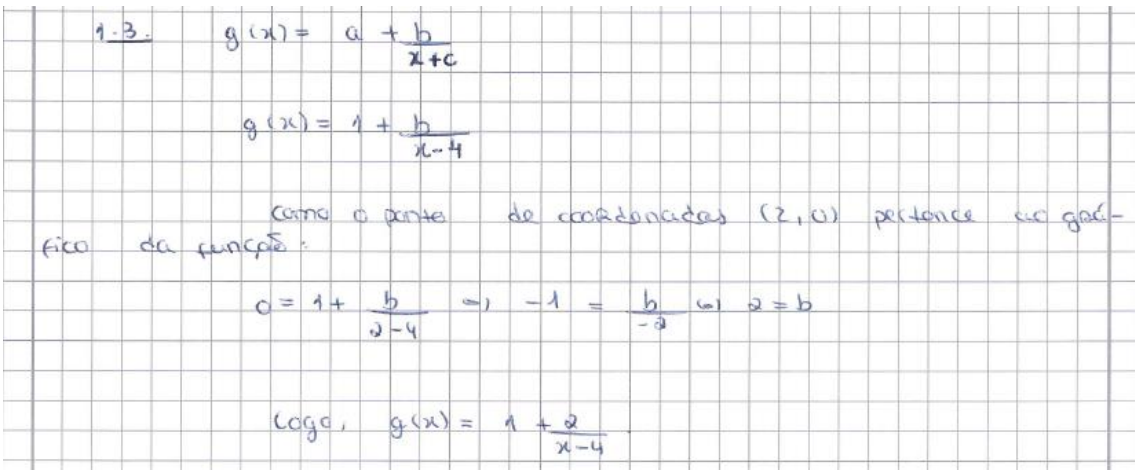


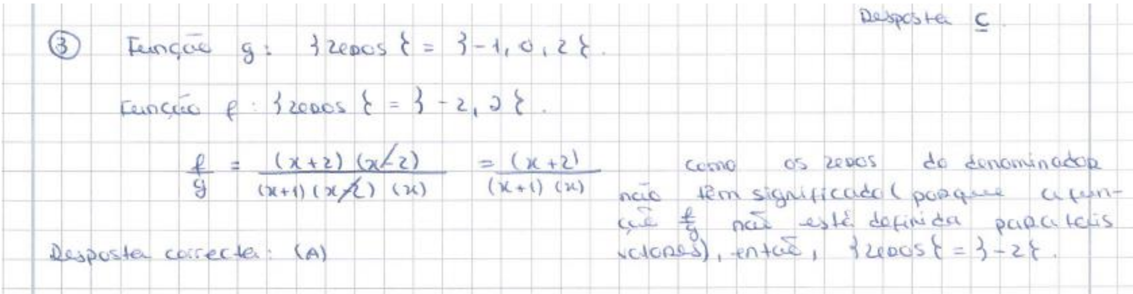
Figura 144 – Resolução da questão 1.3, segunda parte, ficha de 28 de fevereiro de 2011.

Os exemplos que acabámos de ver correspondem a situações bastante trabalhadas na sala de aula, sendo os procedimentos já instrumentais na atividade do aluno. Apesar de a conversão da representação gráfica de uma função cúbica com três zeros, na representação algébrica, também ter sido bastante trabalhada na aula, o Francisco na sétima entrevista, questão 1 (Anexo 7), não conseguiu efetuar a conversão respeitante à função *f*.

> **Investigadora**: Não consegues encontrar a expressão analítica dessa função?
> **Francisco**: Como é cúbica não. (Pausa longa) Eu sei os zeros …(Pausa longa) Mas isso não … […] Por exemplo, se fosse de quadráticas … até conseguia.
> **Investigadora**: Porquê?
> **Francisco**: Porque, acho que sei trabalhar melhor com elas.
> **Investigadora**: Ham, como?
> **Francisco**: Não sei, se fosse mesmo uma quadrática e se fosse só este troço aqui (percorre a parte direita da representação gráfica no enunciado), conseguia ver …
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Os zeros, e sabia, por exemplo que, provavelmente seria *x* ao quadrado, porque a parábola tinha a concavidade voltada para cima, pronto, havia algumas coisas …
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: Por aí … (pausa longa).
> […]
> **Investigadora**: Não consegues encontrar uma expressão analítica para essa função? Não te recordas do ano passado como é que …
> **Francisco**: Hum! É que não!
> **Investigadora**: (Pausa longa) Não?
> **Francisco**: Não me lembro mesmo! (Pausa) Do ano passado então! (Pausa longa) Não sei mesmo!
> **Investigadora**: Pronto, e já me disseste que com a calculadora não sabias encontrar, a expressão analítica, não é? Por um outro processo? Outra funcionalidade.
> **Francisco**: Não! (E6)

A calculadora gráfica permitiu-lhe explorar graficamente a transformação presente na questão 1.2 a partir de outras funções cúbicas, no entanto, a resolução da questão 1.3 ficaria dependente da expressão analítica de *f*. O menu de regressão não foi utilizado na aula, no âmbito das funções, e parece evidente pela resposta do aluno que este desconhece essa funcionalidade.

É interessante notar que num teste realizado anteriormente, 28 de março de 2011, o Francisco utilizou a decomposição em fatores para escrever as expressões analíticas das funções *f* e *g* representadas graficamente na questão 3 da primeira parte (Anexo 15), não tendo, contudo, considerado o coeficiente diretor dos polinómios, o que, não sendo relevante para a resolução da questão, levanta a hipótese de não ter sido levado em conta (Figura 145). De qualquer modo, é de salientar que, por vezes, alguns conhecimentos não são evocados em determinada altura, sendo importante que o aluno consiga encontrar procedimentos alternativos para ultrapassar as dificuldades que lhe vão surgindo.


Resposta C.

③ Função g: {zeros} = {-1, 0, 2}.

Função f: {zeros} = {-2, 2}.

$\frac{f}{g} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}(x)} = \frac{(x+2)}{(x+1)(x)}$ como os zeros do denominador não têm significado (porque a função $\frac{f}{g}$ não está definida para estes valores), então, {zeros} = {-2}.

Resposta correcta: (A)

Figura 145 – Resolução da questão 3, primeira parte, teste de 28 de março de 2011.

Em situações que saem do âmbito da conversão usualmente proposta na sala de aula, é possível identificar algumas dificuldades em relacionar coerentemente os dois registos de representação. Por exemplo, apesar de o Francisco efetuar um esboço de uma parábola que supostamente obedeceria às condições do enunciado, questão 2.2 da terceira entrevista (Anexo 3), ao efetuar a conversão na representação algébrica o aluno considerou para vértice o ponto de coordenadas $(3,-2)$, não compreendendo que nesse caso as imagens dos objetos 1 e 5 teriam que ser iguais

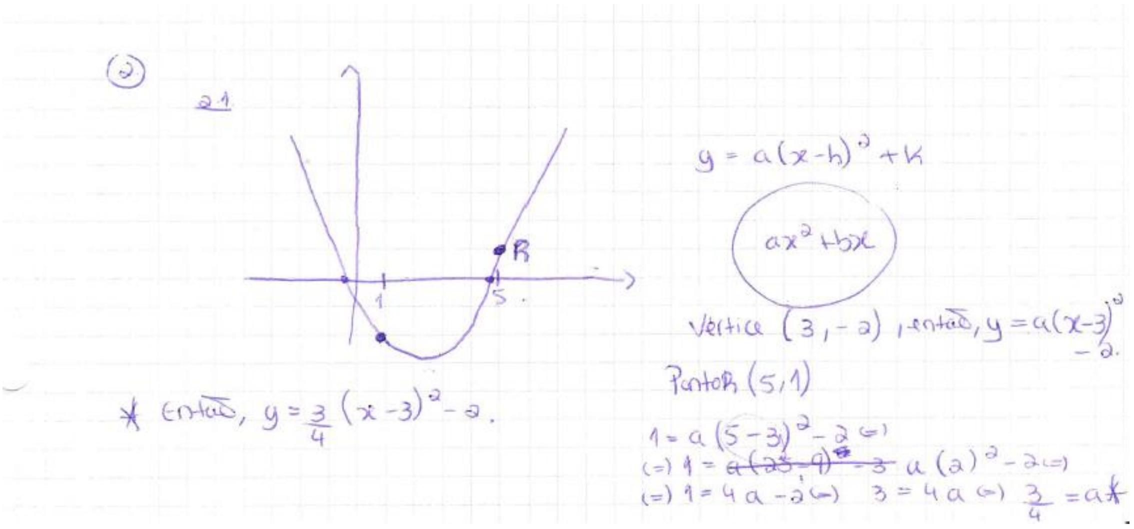


Figura 146 – Resolução da questão 2.2 (E3).

Em resumo, relativamente à conversão de representações, o Francisco revelou algum à-vontade na escrita de uma variável em função de outra, essencial para a conversão da representação verbal na representação algébrica, embora, por vezes, dificuldades de ordem algébrica e em relacionar conteúdos tenham interferido no desempenho do aluno.

No caso de determinadas funções, nomeadamente, afins, quadráticas e racionas cuja representação gráfica é uma hipérbole, o Francisco consegue identificar algumas propriedades relevantes e a sua relação nos dois registos de representação – algébrico e gráfico, apesar de nem sempre isso ser imediato no caso das funções quadráticas, notando-se, particularmente no décimo primeiro ano, algumas dificuldades em relacionar de forma imediata uma expressão do segundo grau com uma parábola e alguma confusão entre parábola e uma curva em forma de sinusoide. No caso de outras funções polinomiais ou racionais é possível perceber uma maior dificuldade por parte do aluno em relacionar as duas representações, o que não é de estranhar tendo em conta que o trabalho desenvolvido na aula, no caso dessas funções, foi feito essencialmente ao nível algébrico.

A conversão da representação algébrica na gráfica é feita pelo Francisco, usualmente, recorrendo à calculadora gráfica, mesmo para funções que lhe são bastante familiares. A correta interpretação da representação visualizada na máquina pressupõe o estabelecimento de conexões entre as duas representações, o que o aluno de modo geral tenta fazer, embora nem sempre o consiga, particularmente nas funções racionais que não são representadas por hipérboles, sendo de salientar a dificuldade do aluno em identificar o domínio onde a simplificação de uma fração racional é válida. O recurso à representação numérica poderia contribuir para uma melhor compreensão das propriedades das funções envolvidas, no entanto, o recurso a esta funcionalidade é reduzido.

A conversão da representação gráfica na algébrica foi trabalhada para determinado tipo de representação algébrica de funções polinomiais de grau menor ou igual a três e funções racionais que representam hipérboles, tendo o aluno revelado globalmente um bom desempenho nesse tipo de conversão. Porém, na sétima entrevista, relativamente à função cúbica, o aluno não conseguiu evocar a decomposição em fatores e o recurso à calculadora no menu gráfico, efetuando tentativa e erro, não foi suficiente para conseguir a conversão. Nesse caso, o Francisco revelou não ter conhecimento de procedimentos alternativos que lhe permitissem obter a expressão algébrica, fosse recorrendo à calculadora gráfica, fosse por meio de outros procedimentos algébricos.

8.5.4. Fluência e flexibilidade representacional

O Francisco trabalha, usualmente, no registo algébrico, mesmo nas situações em que a tarefa poderia ser mais fácil e rapidamente resolvida através de uma abordagem gráfica, sendo esta tendência particularmente evidente no décimo primeiro ano. Esta opção por trabalhar no registo algébrico parece ser essencialmente uma consequência do contexto, como se depreende da resposta dada pelo aluno ao ser questionado se poderia resolver a questão 1.4 da sétima entrevista (Anexo 7) por outro processo:

> **Investigadora**: Havia outro processo?
> **Francisco**: (Pausa) Havia (pausa), mais rápido!
> **Investigadora**: Que seria o quê?
> **Francisco**: Calculadora. (Pausa, vai à máquina).
> **Investigadora**: Hum, não precisas de ir fazer. Vou só perguntar porque é que escolheste esse?
> **Francisco**: Hum! É, foi mesmo porque (pausa longa), mesmo por estar se calhar, não sei por a *Stora* se calhar preferir que eu faça analiticamente, não sei.
> **Investigadora**: Hum, hum.

> **Francisco**: Porque até era mais rápido fazer logo pela calculadora, acho eu. (E7)

O aluno reconhece a equivalência de procedimentos entre o registo algébrico e o gráfico, contudo, apesar de considerar mais rápida uma resolução gráfica, optou por resolver analiticamente (Figura 147). Essa decisão acaba por ser tomada quase inconscientemente, já que para o aluno é essa a resolução que é esperada ou valorizada pela professora.

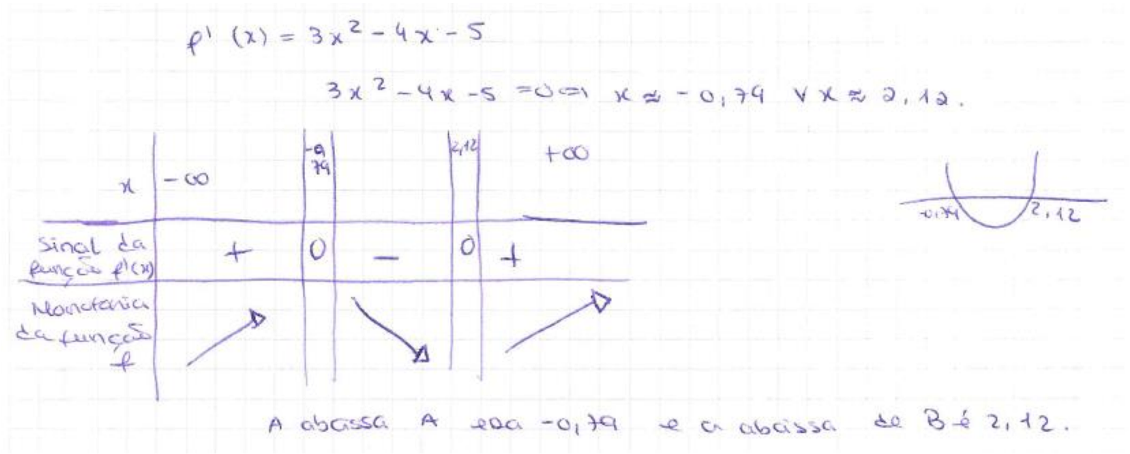


Figura 147 – Resolução da questão 1.4 (E7).

A escolha da representação algébrica para resolver determinada tarefa parece assim prender-se essencialmente com o contexto, uma vez que, como o aluno refere, habitualmente existe a imposição de uma resolução analítica: "[…] Eu normalmente, é assim, haaa, mesmo nas aulas, mesmo nos testes, nós usamos mais métodos analíticos. […] Por norma não costumo usar assim a calculadora para resolver um exercício, porque quase todos eles são para fazer de forma analítica" (E8). Esta opção poderá desenvolver a fluência em termos da representação algébrica, que acaba por ser a mais valorizada, sendo a representação gráfica utilizada basicamente quando ainda não está familiarizado com os métodos analíticos. Por exemplo, relativamente à equação fracionária resultante da questão 1.3 da sexta entrevista (Anexo 6), o Francisco refere: "[…] Sim podia fazer [graficamente], acho que já fiz, haaa, nas primeiras vezes, como ainda não sabia bem fazer analiticamente, fazia sempre graficamente" (E6).

Por outro lado, parece que o aluno considera que uma resolução algébrica dá alguma legitimidade ao seu trabalho. Por exemplo, apesar de ter obtido a informação necessária, a partir da exploração da alínea anterior, para responder diretamente à questão 2.2 da sétima entrevista (Anexo 7), relativa aos pontos de interseção do gráfico da função $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ com os eixos coordenados, o Francisco optou por uma resolução analítica (Figura 148):

> **Francisco**: (Iguala a expressão a zero, coloca equivalente, mas risca e põe o sinal de implicação) Eu já sei o resultado, era só para fazer! (Ri).
> **Investigadora**: Ah! Então, se já sabias o resultado podias já ter usado.
> **Francisco**: Ah, é?
> **Investigadora**: É!
> **Francisco**: *x* igual a quatro, como eu já tinha calculado ali …
> **Investigadora**: Mas pronto fizeste uma equação irracional (ri).
> **Francisco**: Só para mostrar que sei (pausa), ou não.
> **Investigadora**: Exato.
> **Francisco**: Pronto, mas eu à partida já sabia, porque era a intersecção com o eixo *Ox*, que eram os zeros.
> **Investigadora**: Hum, hum.
> **Francisco**: Agora (pausa), agora é substituir aqui na expressão quando o *x* é zero. (Escreve) *y* igual a raiz de, dezasseis menos zero, igual a raiz de, igual a quatro. Pronto, sei que intersectou o, o eixo dos *yy*, no ponto *x* igual a zero, pronto. (E6)

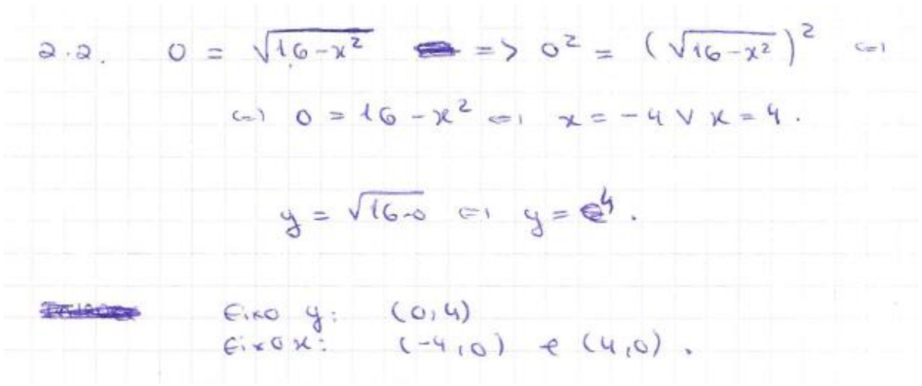


Figura 148 – Resolução da questão 2.2 (E7).

A opção por uma resolução analítica não impede, no entanto, que o aluno recorra a outras representações quando não consegue avançar, lhe surgem dúvidas ou pretende confirmar algo, seja recorrendo à calculadora gráfica ou usando outros recursos. Por exemplo, perante a questão 3 da quinta entrevista (Anexo 5), relativa à existência de solução para a equação $1+x^2=\cos x$, os alunos começaram por tentar uma resolução analítica, não conseguindo como é evidente avançar na resolução, e, apesar de nenhum deles evocar de imediato uma resolução gráfica, recorrendo à calculadora, o Francisco conseguiu relacionar os valores possíveis para o cosseno e os de um dado número não negativo adicionado de uma unidade. É interessante notar que, depois de o Francisco começar a sua explicação, também o Diogo conseguiu participar na discussão:

> **Francisco**: Ai! (Pausa bastante longa) Não sei o que hei de pensar.
> **Diogo**: Eu sei que não pensas nada! É difícil, *Stora*!
> **Francisco**: Um mais *x* ao quadrado (pausa bastante longa). Não sei, assim parcialmente parece não ter solução.
> **Diogo**: Isso veio tudo da tua cabeça.
> **Francisco**: Porque, o cosseno de *x*, o máximo é um …
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Depois temos um mais *x* ao quadrado, só se o *x* fosse igual a zero, e mesmo assim …
> **Investigadora**: Sim, só se o *x* fosse igual a zero. Então e se fosse?
> **Francisco**: Assim era possível porque o cosseno de zero …
> **Diogo**: Era possível pois.
> **Francisco**: Porque o cosseno de zero é igual a um.
> **Diogo**: É igual a um. Depois ficava um igual …
> **Francisco**: Estamos a chegar à essência! (Risos).
> **Investigadora**: Então? Tem solução, não tem solução?
> **Diogo**: Tem, pelo menos uma solução!
> **Francisco**: Tem uma. Quando *x* é igual a zero. (E5)

Ao ser questionado se tinha pensado nas representações gráficas, o Francisco revelou ter imaginado o círculo trigonométrico e, apesar de não ter evocado a parábola, conseguiu estabelecer a relação a partir da representação algébrica:

> **Investigadora**: […] O Francisco fez os cálculos mentalmente e, e, estavas a visualizar algumas representações gráficas, ou não? Quando fizeste os cálculos? Mentalmente?
> **Francisco**: Assim, não (aponta para a máquina). Mas no círculo trigonométrico.
> **Investigadora**: Ah! No círculo trigonométrico. E no um mais *x* ao quadrado, também não?
> **Francisco**: Ai (ri), não! (E5)

Neste caso, perante uma impossibilidade de resolução algébrica, o aluno conseguiu relacionar conhecimentos de modo a resolver a questão, sem recorrer ao artefacto.

Nas situações em que lhe surgem dúvidas durante a resolução algébrica a calculadora gráfica é muitas vezes integrada na atividade do aluno. Por exemplo, relativamente às funções presentes na questão 2.1 da sexta entrevista (Anexo 6), aparentemente familiares, o Francisco começou por efetuar o tratamento das expressões analíticas, esperando a partir daí conseguir indicar o domínio e contradomínio, como habitualmente fazia ao trabalhar com hipérboles. Ao ser confrontado com o resto zero na primeira expressão, o aluno conseguiu compreender que se encontrava perante uma situação diferente da esperada:

> **Francisco**: […] Dá oito, menos oito, resto, zero? Ai! (Pausa longa) Não, não era suposto!
> **Investigadora**: Porque é que não era suposto? (Ri)
> **Francisco**: Porque não! Não, porque zero a dividir por qualquer, que seja …
> **Investigadora**: Sim?
> **Francisco**: Dá zero. (Pausa longa) Hum! Isto é complicado! (pausa longa) Mas pronto, ficaria, *f* de *x*, igual a menos dois, mais zero sobre dois *x* menos, quatro. (Pausa) Bem! Daqui pelo menos (circunda o menos dois), já sei a assimptota horizontal, do gráfico, que será, a reta, de equação *y* igual a menos dois, assíntota (escreve), se é que tem! Porque isto no fundo (aponta a expressão) era igual a *f* de *x* igual a menos dois (ri). Agora estou com uma dúvida. (Pausa longa) Posso ir utilizar a calculadora?
> **Investigadora**: Podes.
> **Francisco**: É nestes momentos de dúvida que eu prefiro … (pega na máquina)
> **Investigadora**: Sim, e o que é que estás à espera que te surja, na calculadora?
> **Francisco**: É assim, pelas contas ia-me dar *f* de *x* igual a menos dois.
> **Investigadora**: Sim, e o que é que esperarias?
> **Francisco**: Esperaria, uma reta, constante (faz o gesto com a mão na horizontal). Uma função constante. (E6)

Perante a dúvida, optou por confirmar com a calculadora gráfica a sua conjetura relativa à representação gráfica, manifestando uma grande confiança no artefacto:

> **Francisco**: (Edita a função, visualiza) Lá está! Ia-me dar, bem! Mas pronto (iguala a menos dois e risca o que tinha começado a escrever acerca da assíntota), quando eu não acredito muito naquilo que me vai dar, eu prefiro, usar.
> **Investigadora**: Quando não tens muita confiança em ti, vais à máquina, é isso? (Risos)
> **Francisco**: Exatamente.
> **Investigadora**: Então confias mais nela? (Risos)
> **Francisco**: Por acaso, sim! (E6)

No entanto, não conseguiu ser bem-sucedido no que diz respeito ao domínio da função, uma vez que, após a simplificação, não atendeu ao domínio onde a simplificação é válida, o que pode ter sido reforçado pela visualização da representação na calculadora. Relativamente à função g, depois de efetuar o tratamento da expressão analítica, voltou a ser evidente que o aluno não considera o domínio onde a simplificação é válida. A intenção de confirmar com a calculadora a conjetura de que o domínio é o conjunto dos números reais mostra que não se encontra ciente de que a representação gráfica na calculadora pode fornecer uma ideia errada do domínio de determinadas funções racionais:

> **Francisco**: […] Zero. (Pausa) Isto não me motiva! Ai!
> **Investigadora**: Então? (Ri).
> **Francisco**: Agora a função *g* de *x* …
> **Investigadora**: Não querias que fosse resto zero, era?
> **Francisco**: Hum, pois! (Escreve a função usando o quociente e o resto, fica a observar durante algum tempo), isto é equivalente a dizer que é menos *x* ao quadrado, … (escreve apenas o quociente e fica a observar).
> **Investigadora**: Ok, então o que é que podes dizer dessa?
> **Francisco**: Para mim também tinha domínio $\mathbb{R}$. (Pausa longa) Vou tentar (acende a máquina). (E6)

Só quando confrontado com a expressão inicial é que o Francisco considerou que o domínio não poderia ser o conjunto dos números reais, acabando por reconsiderar também o domínio da função *f*. O aluno compreendeu que a representação gráfica de ambas as funções deveria apresentar um buraco mas ficou surpreendido por não ser visível na calculadora, apesar de ter feito alterações na janela de visualização. O estabelecimento de conexão com a representação numérica, sob a opção de calcular o valor, surgiu apenas quando a investigadora o questionou sobre um modo de confirmar o domínio com a calculadora.

Relativamente ao contradomínio da função g, o Francisco, contrariamente ao habitual, preferiu recorrer à calculadora, talvez por já não recordar os procedimentos para determinar o vértice de uma parábola, o que pode ser considerada uma escolha flexível, já que conseguiu utilizar eficazmente o artefacto.

Nalgumas situações, particularmente envolvendo funções que não lhe são muito familiares, o Francisco recorre à representação gráfica essencialmente com o intuito de conjugar informação proveniente dos dois registos de representação, como aconteceu, por exemplo, no caso referido acima respeitante à função *f* presente na questão 2.1 da sexta entrevista. Foi também possível observar o aluno a recorrer à representação algébrica com o objetivo de confirmar a informação proveniente da representação gráfica visualizada na calculadora. Embora não seja frequente o aluno optar inicialmente por recorrer à representação gráfica, foi isso que fez perante a questão 2.1 da sétima entrevista (Anexo 7), relativa ao domínio e contradomínio da função $f(x)=\sqrt{16-x^2}$. O aluno indicou o domínio a partir da representação gráfica, porém, decidiu confirmá-lo algebricamente:

> **Francisco**: Vou à calculadora (edita a função e visualiza) Isto é tão estranho! (Risos) Estas funções! (Observa durante algum tempo) O domínio dá-me de menos quatro a quatro, lá está, por isso é que eu gosto de fazer sempre, por via analítica, senão isto com … (E7)

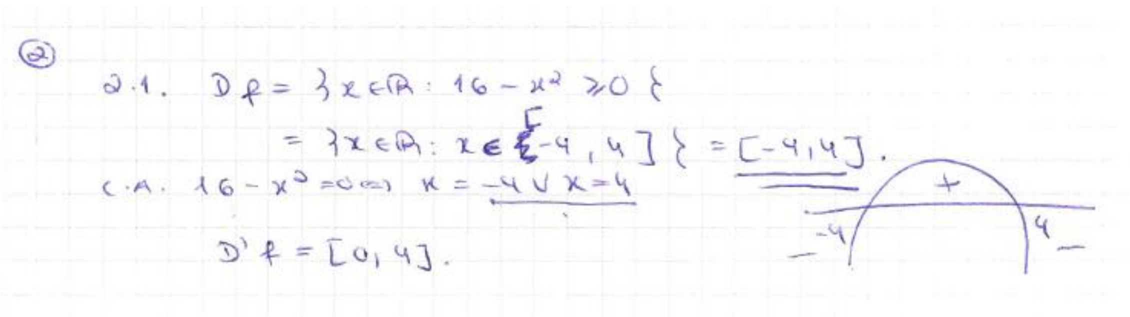


Figura 149 – Determinação do domínio da função *f* (E7, questão 2.1).

A resolução algébrica (Figura 149) não lhe provocou conflito imediato com a representação gráfica, contudo, ao tentar determinar o contradomínio a partir desta última, o Francisco ficou surpreendido por obter o valor zero nos extremos do domínio, o que a representação gráfica, na janela *ZStandard*, não aparenta:

> **Francisco**: Contradomínio iria ver à, calculadora. (Pega na máquina).
> **Investigadora**: Mas vai dizendo, aquilo que vais fazendo.
> **Francisco**: Vou fazer o máximo. Que será no *y* igual a quatro. A função, e portanto, eu tinha o limite e depois ia ver para o *x* igual a menos quatro, por exemplo (calcula o valor).
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: Mas vai dar zero?
> **Investigadora**: (Pausa bastante longa) Porquê essa dúvida também, agora?

Francisco: (Ri) Porque a representação gráfica que eu tenho aqui parece que não mostra que a função está definida para, este valor, e normalmente quando nós pedimos, quando não está definido nesse valor, não aparece no *y*. (E7)
Investigadora: Hum. Mas qual é o domínio que tu consideraste?
Francisco: Menos quatro a quatro.
Investigadora: Considerando que o teu domínio estava bem …
Francisco: Não, não está! (Risca o sinal de intervalo fechado).
Investigadora: Então?
Francisco: Se calhar não está! (Risos).
Investigadora: Olha! (Ri) Não mudes de opinião só porque eu, faço um comentário!
Francisco: Não! Porque faz sentido! Porque faz sentido, então se eu acho, pelo menos pela representação gráfica que ela não está definida para esses valores, se calhar …
Investigadora: Então confias mais na representação gráfica ou nos teus cálculos?
Francisco: Como é óbvio, na representação gráfica (ri)! (E7)

Perante o conflito, o aluno tentou compreender melhor a situação, acabando por concluir que o domínio deveria ser efetivamente um intervalo fechado, contudo, não conseguiu explicar a aparente discrepância entre a informação fornecida pela representação algébrica ou numérica e a representação gráfica:

Francisco: É que como é maior ou igual, se ela … (pausa longa)
Investigadora: Sim? Se ela é …?
Francisco: Se ela é igual para menos quatro e quatro tinha que, pertencer ao domínio.
[…]
Investigadora: Mas repara, a máquina não te enganou totalmente, porque ela deu-te uma imagem, não deu?
Francisco: Enganou-me mais ou menos! (Risos)
Investigadora: Então?
Francisco: Ele deu-me, só que pelo menos pela representação gráfica, parece que não … (aponta).
Investigadora: E porque é que será que isso acontece?
Francisco: (Pausa muito, muito longa) (Risos) Pois! (Pausa longa) Sinceramente, não sei! (E7)

Este exemplo mostra que, para além da flexibilidade na escolha da representação, tendo em conta a tarefa e a fluência nessa representação, é importante que o aluno estabeleça conexões entre representações para que possa resolver determinados conflitos suscitados pela integração do artefacto na atividade, já que este possui características representacionais próprias.

Ao determinar o contradomínio da função *h*, questão 2.3.1 da sétima entrevista (Anexo 7), o Francisco já conseguiu lidar melhor com os constrangimentos do artefacto. Apesar de no início ter ficado surpreendido com a representação gráfica visualizada na calculadora, conseguiu estabelecer conexões com outras representações, nomeadamente com o domínio já determinado:

> **Francisco**: […] Parece que falha aqui qualquer coisa, mas …, na calculadora.
> **Investigadora**: E tem que falhar ou não?
> **Francisco**: Tem!
> **Investigadora**: Olha lá para o teu domínio.
> **Francisco**: Pois, é isso que eu agora via. (E7)

A calculadora gráfica foi convertida num instrumento eficaz para o aluno obter o contradomínio da função, através da opção numérica "calcular o valor" para os extremos menos um quarto e um quarto, e para o valor 99:

> **Investigadora**: Qual é a parte do gráfico que te dava jeito ver um bocadinho melhor (faz um gesto circular no visor da calculadora)?
> **Francisco**: Era esta aqui (aponta próximo da origem).
> **Investigadora**: Pois! Se calhar podes ajustar ainda um bocadinho melhor a janela.
> **Francisco**: (Escolhe o retângulo $[-4,4]\times[0,5]$) Penso que assim, já dará. (Aponta o domínio que escreveu) se a função está definida para menos um quarto, vou ver o valor para menos um quarto (calcula o valor com a máquina), dá *y* igual a zero (pausa). E para um quarto, suponho que dê o mesmo (efetua o cálculo).
> **Investigadora**: Tem lógica ou não?
> **Francisco**: (Calcula o valor para um quarto) *y* igual a zero. Sim, tem lógica. (Baixinho) Tem lógica, sim (risos). Então o contradomínio (vai escrevendo), da *h*, seria de zero ... (pega na máquina).
> **Investigadora**: Agora já não te fez confusão? Não veres [a representação gráfica] a ir até ao zero?
> **Francisco**: Não, agora já não! (Risos). Agora um valor para … (carrega na opção de cálculo de valor, pausa), mas aquela linha pode aumentar! (Vai à janela mas fica indeciso) É que agora, isto é difícil …
> **Investigadora**: Pois agora podes mudar a janela, mesmo que já não vejas tão bem aquela parte ali.
> **Francisco**: Pois.
> […]

> **Francisco**: (Considera o retângulo $[-50,50]\times[0,5]$, calcula a imagem de quarenta, observa, desloca o cursor para a frente, calcula a imagem de cinquenta) Pois! Eu acho que ele se vai aproximar do (pausa, observa o valor), vai se aproximar, do quatro. Mas isso também é uma questão de, alterar a janela (muda o *x* máximo para cem), a ver se ele passa para lá. (Calcula a imagem de 99, observa) Pois, quatro, aberto. (E7)

Dificuldades de ordem algébrica podem comprometer tanto uma resolução algébrica como gráfica. Uma dificuldade recorrente na atividade do aluno prende-se com o facto de este estabelecer uma espécie de relação entre o argumento de determinada função e o cálculo das imagens por meio dessa função. Por exemplo, relativamente à função *h*, referida acima, o Francisco começou por considerar que $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ (Figura 150).

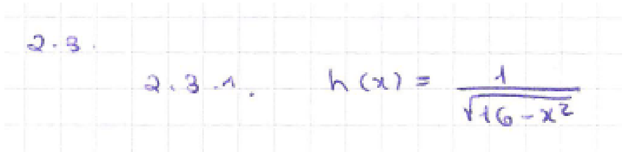


Figura 150 – Escrita inicial da expressão analítica da função *h* (E7, questão 2.3).

É interessante notar, porém, que quando a investigadora lhe pediu que efetuasse a composição da função *f* com a função $g(x)=\frac{1}{x}$, o aluno escreveu a expressão de $f\circ g$ corretamente (Figura 151), o que aponta para uma compartimentação do conhecimento. Ou seja, perante a composição de funções o aluno reage de uma maneira, contudo, perante a mesma situação, num contexto onde a composição de funções não é evocada, reage de maneira distinta.

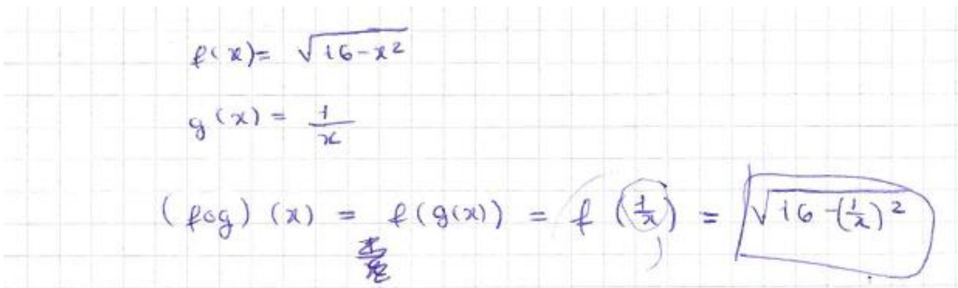


Figura 151 – Composição da função *f* com a função $g(x)=\frac{1}{x}$ (E7).

Perante o confronto entre as duas expressões o Francisco acabou por considerar que a segunda é que estaria correta, apesar de mostrar algumas dúvidas:

> **Francisco**: Acho que seria assim [Figura 151] (Observa durante muito tempo) Não é? (Pausa longa) Pelo menos é assim, se neste caso (rodeia um sobre *x*), pronto, se aqui estivesse um dois, nós íamos substituir o *x* por dois, se estivesse *x* ao quadrado, íamos substituir por *x* ao quadrado, logo um sobre *x*, também! (Pausa muito longa) Não, pois não?
> […]
> **Investigadora**: (Ri) Essa que aqui tens (aponta no enunciado) é diferente desta que aqui escreveste (última)?
> **Francisco**: Não! É que eu acho que, pelo menos é igual!
> **Investigadora**: Então?
> **Francisco**: (Pausa longa) É esta, não é [Figura 151] (Risos).
> **Investigadora**: Não sei!
> **Francisco**: Não! Eu sei que equivale, esta aqui [Figura 151], é igual a esta (enunciado). Agora que (pausa longa), sei lá! Pronto eu acho que aqui [Figura 150] fiz uma asneira, aqui fiz asneira, e esta é que está bem.
> **Investigadora**: Hum.
> **Francisco**: (Pausa longa) Acho, que sim. (E7)

Anteriormente, em relação à função $f\left(\frac{x}{2}\right)$, presente na questão 1.2 da mesma entrevista, o Francisco já tinha manifestado uma dificuldade semelhante, situação que foi abordada na secção 8.4.5. Esta dificuldade não parece depender da compreensão do conceito de função, já que quando é confrontado com a situação acaba por responder corretamente. Aliás, em várias situações, o Francisco revelou até alguma facilidade em interpretar o simbolismo matemático associado ao conceito de função como um processo ou como um objeto, contudo, parece ter desenvolvido essa conceção errónea relativa à possibilidade de estabelecer relação entre o argumento e o modo de determinar as imagens.

Outra dificuldade recorrente na atividade do aluno prende-se com o facto de, muitas vezes, não atender ao domínio onde a simplificação de uma fração racional é válida, o que coloca em causa tanto uma resolução algébrica como gráfica. Por exemplo, relativamente à função definida por $x^3 - 2x + xy = 0$, presente na alínea iv) da questão 1 da oitava entrevista (Anexo 8), considerou apenas a expressão simplificada (Figura 152), o que condicionou o seu desempenho não apenas relativamente ao domínio da função, mas também relativamente ao contradomínio, determinado a partir da representação gráfica. Uma vez que introduziu na calculadora a expressão simplificada não conseguiu aperceber-se que a função não estava definida para zero, o que teria acontecido se tentasse determinar o máximo com a calculadora a partir da expressão não simplificada.

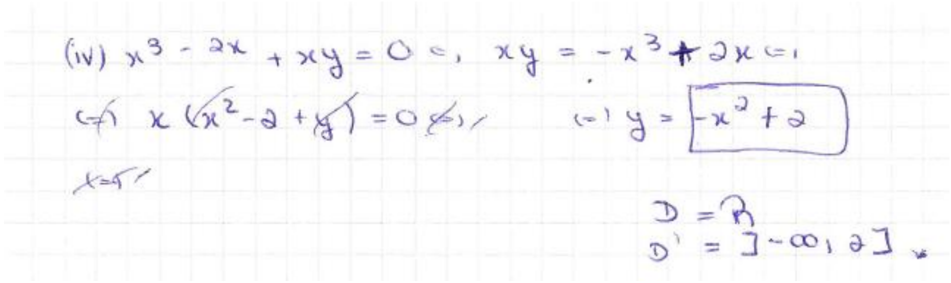


Figura 152 – Resolução da questão 1 (E8, alínea iv).

Em resumo, o Francisco usualmente recorre à representação algébrica para resolver determinada tarefa, no entanto, em caso de dúvida integra a calculadora gráfica na sua atividade, tentando conjugar a informação proveniente das duas representações – algébrica e gráfica. O recurso à representação numérica não foi muito frequente, ocorrendo em situações pontuais, essencialmente no que diz respeito à opção de cálculo de valores, não sendo o menu da tabela praticamente utlizado. Por vezes, alguns constrangimentos do artefacto, em particular relativamente à representação gráfica, provocaram-lhe alguns conflitos, sendo possível perceber alguma falta de conhecimento relativamente ao modo de funcionamento da máquina. Apesar de o aluno tentar estabelecer conexões entre representações, dificuldades de ordem algébrica e alguma falta de conhecimento relativo ao modo de funcionamento do artefacto condicionaram o seu desempenho, particularmente no que diz respeito às tarefas envolvendo funções não familiares.

Capítulo 9

Discussão de resultados

Neste capítulo pretendo comparar os resultados dos dois casos e estabelecer um paralelo com as ideias centrais provenientes da revisão da literatura, no que diz respeito à integração da calculadora gráfica na atividade matemática envolvendo funções e à aprendizagem do conceito de função, no seu sentido mais amplo. Começo assim por efetuar um confronto da noção de função desenvolvida por cada um dos alunos no final do ensino básico. Analiso, seguidamente, os principais esquemas de utilização desenvolvidos pelos alunos ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário relativos ao artefacto calculadora gráfica, e as situações e objetivos com que os alunos o utilizam na atividade com funções. Prossigo examinando alguns aspetos centrais da aprendizagem das funções desenvolvidos pelos alunos, tentando compreender o modo como a calculadora gráfica foi sendo integrada na atividade e o seu papel na aprendizagem.

9.1. Conceito de função no final do ensino básico

O *conceito imagem* (Tall & Vinner, 1981) de função dos alunos no final do ensino básico envolve alguns casos particulares de funções estudados nesse nível de ensino, essencialmente funções afins, representadas algébrica ou graficamente, sendo de destacar as funções de proporcionalidade direta. A identificação de funções foi feita pelos alunos tendo por base, essencialmente, esses casos particulares presentes no *conceito imagem.* No caso do Francisco, o *conceito imagem* engloba também o *conceito definição formal* (Tall & Vinner, 1981), dado que foi inicialmente evocado, contudo, foi possível perceber que este não estava claro para o aluno, o que se evidenciou na falta de consistência relativa à sua aplicação. No caso do Diogo, o *conceito definição formal* não parece sequer fazer parte do seu *conceito imagem*, pois nunca foi evocado.

Esta situação pode ser explicada tendo em conta que, por um lado, decorreu um longo período de tempo entre o trabalho desenvolvido no âmbito do tópico das funções e a primeira entrevista, e, por outro lado, o *conceito definição formal* (Tall & Vinner, 1981) é usualmente introduzido no início do tópico não voltando praticamente a ser abordado ao longo do desenvolvimento do mesmo. Vinner (1983) refere que "os elementos (do *conceito imagem*) que não são constantemente reforçados têm uma grande probabilidade de ser esquecidos" (p. 305), o que pode dar origem a um conceito imagem distorcido. No caso do Diogo é evidente que desenvolveu um conceito imagem restrito já que não aceita que uma função possa ser representada, por exemplo, por uma linha curva. Alguns autores consideram que o conceito de função deve ser desenvolvido desde muito cedo (Blanton & Kaput, 2011; Willoughby, 2000), nomeadamente com exemplos concretos da vida real, passando por um processo de abstração progressiva, de modo que os alunos estejam familiarizados com o conceito quando começam a estudar determinadas classes de funções.

Enquanto a função de proporcionalidade direta parece estar bastante presente no *conceito imagem* de função de ambos os alunos, o mesmo não acontece em relação à função de proporcionalidade inversa. Por exemplo, o Diogo conseguiu expressar a relação existente entre as variáveis no caso de uma proporcionalidade inversa, mas não identificou a expressão algébrica correspondente a uma função desse tipo. Por sua vez, o Francisco revelou possuir uma ideia relativa à forma da representação gráfica, identificou a representação algébrica como sendo de uma função, mas não conseguiu explicitar a relação entre as duas variáveis, nem reter a ideia da impossibilidade de as variáveis assumirem o valor zero. Os alunos possuem algumas imagens mentais associadas ao conceito de proporcionalidade inversa, no entanto, a dificuldade em coordenar as várias representações aponta para a existência do fenómeno de *compartimentação* (Gagatsis, Elia & Mousoulides, 2006). Foi também possível perceber que, apesar de os alunos conseguirem identificar funções afins através da representação algébrica, este reconhecimento pode ficar condicionado pela forma como a expressão está escrita, o que sugere também algumas dificuldades em estabelecer relações dentro do mesmo registo de representação.

Ambos os alunos conseguiram trabalhar com a representação numérica, compreendendo a existência de uma relação entre as variáveis. A conversão de representações revelou-se uma tarefa difícil para os dois alunos, mesmo no caso de funções relativamente familiares como a função afim, não sendo feita de forma espontânea, exceto no caso do Francisco relativamente à expressão $x = y$. O desempenho dos alunos parece indicar uma maior dificuldade relativa à conversão da representação gráfica na algébrica, como é referido por Duval (2006), embora tal não possa ser afirmado com segurança apenas com os dados recolhidos numa entrevista.

A notação própria das funções foi retida pelo Francisco, enquanto o Diogo parece tê-la esquecido, não conseguindo responder às questões que envolviam a notação formal. A noção de contradomínio de uma função também não parece ter sido apreendida pelo Diogo, embora este tenha a ideia que se relaciona com a variável dependente. O Francisco, por sua vez, interpretou a notação usual e conseguiu resolver condições simples a partir da representação gráfica. Comparativamente, no final do ensino básico, o *conceito imagem* de função do Francisco é um pouco mais alargado do que o do Diogo, envolvendo algumas propriedades, notação, e uma ideia relativa ao *conceito definição formal*, apesar de este não estar claro para o aluno. No entanto, essa ideia, ainda que pouco clara, permitiu-lhe aceitar para funções algumas representações algébricas que não lhe eram familiares.

9.2. Principais esquemas de utilização desenvolvidos ao longo do 10.º e 11.º anos

Ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário os alunos foram transformando o artefacto calculadora gráfica num *instrumento* (Rabardel, 2002), através do desenvolvimento de *esquemas de utilização* (Rabardel, 2002) que lhes permitiram ir integrando a calculadora gráfica na sua atividade, no âmbito do trabalho com as funções. São em seguida analisados os principais esquemas de utilização desenvolvidos ao longo do 10.º e 11.º anos – esquemas de edição da expressão analítica; esquemas de enquadramento; esquemas de resolução de equações e inequações;

esquemas de determinação de pontos notáveis; esquemas relativos à derivada de uma função – tentando salientar semelhanças e diferenças entre os esquemas desenvolvidos pelos dois alunos.

Relativamente à edição da expressão analítica de uma função, ambos os alunos foram atribuindo significado a várias teclas envolvidas nesse procedimento. Os erros que surgiram na edição da expressão, relacionados essencialmente com a introdução do sinal negativo ou dos parêntesis, foram sendo corrigidos através da participação na atividade, sendo muitas vezes a professora a identificar e a chamar a atenção dos alunos para o erro cometido, pelo menos numa fase inicial do processo de *génese instrumental* (Rabardel, 2002). No entanto, em várias ocasiões ficou por abordar a tipologia do erro devolvido pela máquina, o que poderia facilitar a sua correção numa situação posterior. Os erros cometidos pelo Diogo observaram-se apenas numa fase inicial do processo de génese instrumental, mas o mesmo não aconteceu com o Francisco que, por exemplo, continuou a ter alguma dificuldade em identificar o erro proveniente da introdução incorreta da operação de subtração em vez do sinal negativo. A edição de parêntesis também nem sempre foi feita corretamente pelo Francisco, embora tal não pareça ter relação com o processo de génese instrumental, dado que o mesmo erro foi também observado numa resolução com papel e lápis. Algumas funcionalidades relativas à edição de uma função nunca foram utilizadas por nenhum dos dois alunos, como a definição do domínio ou a definição de uma transformação, recorrendo à função já editada, sem explicitar a sua expressão analítica (Tabela 11).

Tabela 11 – Comparação dos esquemas de edição da expressão analítica de Diogo e Francisco.

<table>
<tr><th>Esquemas de utilização</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Esquemas de edição da expressão analítica</td><td colspan="2">Atribuição de significado e funções a várias teclas envolvidas na edição de expressões, incluindo a introdução de parêntesis.
A funcionalidade relativa à edição do domínio nunca foi utilizada.
As transformações de funções nunca foram editadas a partir da função original (implicitamente).</td></tr>
<tr><td>Alguns erros iniciais relativos ao sinal</td><td>Dificuldade em identificar o erro</td></tr>
</table>

	negativo e à introdução incorreta de parêntesis, contudo, ocorreram apenas numa fase inicial do processo de génese instrumental.	relativo ao sinal negativo mesmo numa fase relativamente avançada do processo de génese instrumental. A introdução de parêntesis nem sempre foi feita corretamente, no entanto, isso não parece estar relacionado com o processo de génese instrumental relativo à calculadora, sendo antes conceptual.

A representação gráfica na calculadora está associada à janela de visualização definida, pelo que os alunos necessitam desenvolver esquemas de enquadramento que lhes permitam observar as caraterísticas globais de determinada representação gráfica, ou analisar partes da representação nos casos em que uma única janela de visualização não permite observar o comportamento global do gráfico da função. A definição da janela de visualização é feita pelos dois alunos de modo semelhante, apesar de o Francisco mostrar mais eficiência em termos do estabelecimento de conexões entre a representação algébrica e gráfica, o que, de modo geral, lhe permite encontrar uma janela adequada mais rapidamente do que o Diogo. Ambos começam usualmente por recorrer ao *Zoom ZStandard* ($\left[-10,10\right]\times\left[-10,10\right]$), alterando depois os valores diretamente, sem recurso a outros *zooms*. O menu tabela poderia fornecer informação relativa à grandeza dos valores envolvidos, mas nenhum dos alunos utiliza esse recurso como estratégia para alterar os valores da janela.

Tabela 12 – Comparação dos esquemas de enquadramento de Diogo e Francisco.

Esquemas de utilização	**Diogo**	**Francisco**
Esquemas de enquadramento	Tentativa e erro – Recurso ao *Zoom ZStandard*, alteração direta do retângulo de visualização sem recurso a outros *zooms*. Por vezes, relação com o contexto no caso de um problema.	

	O menu tabela não foi utilizado.	
	Alguma tentativa de estabelecimento de conexões entre as representações algébrica e gráfica. Nas situações em que os valores eram elevados o aluno demorou um tempo considerável a encontrar uma janela adequada.	Estabelecimento de conexões entre as representações algébrica e gráfica. Maior rapidez na obtenção de uma janela apropriada.

A resolução gráfica de equações e inequações é feita pelos dois alunos através de um esquema de utilização semelhante, contudo, o Diogo, por vezes, substitui esse esquema por outro, mostrando compreender a equivalência dos procedimentos. O Francisco também recorreu a um esquema equivalente num trabalho de pares com o Diogo, e, apesar de inicialmente revelar alguma confusão, após interação com o colega parece ter ficado esclarecido quanto à equivalência dos procedimentos. O esquema de utilização, para as suas calculadoras, inclui a definição de um ponto na vizinhança do ponto de interseção ou do zero (*Guess*), o que na maioria das vezes não constitui problema. Porém, em determinadas funções, uma fraca aproximação pode conduzir a mensagem de erro, sendo importante que os alunos compreendam o tipo de erro, de modo a poderem corrigir rapidamente o problema.

A resolução analítica de equações e inequações do segundo grau é facilitada pelo recurso à calculadora gráfica, já que os alunos instalaram um programa para aplicação da fórmula resolvente. Assim, mesmo quando o enunciado impõe uma resolução analítica, os alunos recorrem usualmente à máquina para obter os zeros da expressão.

Uma situação interessante diz respeito ao comportamento dos dois alunos perante situações matemáticas semelhantes – equações na variável x, mas envolvendo diferentes tipos de funções. Perante uma equação cúbica ambos os alunos optaram por recorrer à calculadora gráfica para determinar o número de soluções e os seus valores aproximados, contudo, perante uma equação em que as funções envolvidas nos dois membros eram de diferentes tipos (quadrática e trigonométrica), nenhum dos dois alunos tomou a iniciativa de recorrer à calculadora gráfica, mesmo estando em dificuldades para responder à questão. Este comportamento sugere que o tipo de função envolvida pode condicionar o recurso à calculadora.

Tabela 13 – Comparação dos esquemas de resolução de equações ou inequações de Diogo e Francisco.

<table>
<tr><th>Esquemas de utilização</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Esquemas de resolução de equações ou inequações</td><td colspan="2">A resolução gráfica de equações e inequações é feita recorrendo usualmente ao seguinte esquema: edição das funções correspondentes a cada um dos membros; ajuste da janela de visualização; determinação dos pontos de interseção e indicação do conjunto solução. A aplicação do esquema usual, na sua calculadora, inclui a definição de um ponto numa vizinhança do ponto de interseção (Guess).

Na resolução de equações e inequações do segundo grau, quando não utilizam a funcionalidade gráfica, recorrem a um programa que instalaram nas suas calculadoras para determinação das raízes da equação quadrática.

O tipo de função envolvida parece condicionar o recurso à calculadora gráfica</td></tr>
<tr><td>Por vezes, o esquema usual é substituído por outro que resulta do tratamento da condição, sendo determinados os zeros.</td><td>O esquema usual foi substituído por outro, resultante do tratamento da condição, num trabalho de pares com o Diogo.
Numa situação em que obteve mensagem de erro, devido a uma má aproximação do ponto Guess, continuou a aplicar o esquema usual até conseguir obter o ponto de interseção, não o substituindo por outro esquema.</td></tr>
</table>

A determinação de zeros ou extremos de uma função, recorrendo à calculadora, é geralmente feita pelos alunos a partir do menu *Calc*. O Diogo, na sua atividade, foi confrontado com algumas situações em que não conseguiu aplicar o esquema de utilização usual. Na primeira ocorrência, o aluno recorreu ao menu *Table* por sugestão da investigadora, tendo-o feito, posteriormente, por sua iniciativa, noutra situação semelhante. Apesar de o Diogo ter utilizado este menu em situações pontuais, este não foi praticamente utilizado pelos alunos.

A adaptação do esquema usual a novas classes de funções pode ficar dependente da representação gráfica visualizada na calculadora, sendo essa situação mais evidente no caso do Diogo que, nalgumas situações, não conseguiu recorrer ao esquema adequado para responder à questão.

Tabela 14 – Comparação dos esquemas de determinação de pontos notáveis de Diogo e Francisco.

Esquemas de utilização	Diogo	Francisco
Esquemas de determinação de pontos notáveis	A determinação dos zeros de uma função, ou dos extremos relativos, utilizando a calculadora gráfica é, de um modo geral, feita pelos alunos recorrendo ao menu *Calc*. Devido aos constrangimentos das suas calculadoras, o esquema de utilização inclui a determinação de um intervalo definido por um valor à esquerda e outro à direita do zero, ou do extremo, e pela indicação de um ponto na vizinhança do ponto notável – *Guess*.	
	Perante dificuldades na sua utilização, o esquema usual foi substituído por outro, através do recurso ao menu tabela.	Aplicação incorreta do esquema usual, por definição irregular do intervalo, numa fase relativamente avançada do processo de génese instrumental.
	A adaptação do esquema a novas classes de funções nem sempre foi conseguida, ficando dependente da representação gráfica visualizada na calculadora.	A adaptação do esquema a novas classes de funções foi conseguida, apesar de, por vezes, suscitar algumas dúvidas.

A calculadora gráfica não foi praticamente utilizada pelos alunos no que diz respeito ao tema das derivadas, pelo que o processo de génese instrumental relativo a esta funcionalidade da calculadora manteve-se numa fase inicial. Nas situações pontuais em que foi possível observar os alunos a recorrer a esta funcionalidade, os esquemas de utilização foram idênticos, não sendo os mais eficientes no caso do cálculo da derivada de uma função num ponto. Os alunos desconhecem outras funcionalidades relacionadas com o tema das derivadas, como por exemplo, a obtenção da equação da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto.

Tabela 15 – Comparação dos esquemas relativos à derivada de uma função de Diogo e Francisco.

<table>
<tr><th>Esquemas de utilização</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td>Esquemas relativos à derivada de uma função</td><td colspan="2">Para obter a representação gráfica da função derivada os alunos editam a função original e a função derivada da função original recorrendo à opção nDeriv (ordem a x, no ponto variável x).

Para obter a derivada num ponto fazem a representação gráfica da função constante definida pela derivada da função original no ponto x_0 (ordem a x, no ponto x_0), obtendo o seu valor a partir da opção value no menu Calc.

Os alunos desconhecem outras opções relacionadas com esta funcionalidade.</td></tr>
</table>

Os esquemas de utilização desenvolvidos pelos alunos refletem o trabalho com a calculadora gráfica que foi sendo privilegiado na sala de aula, envolvendo essencialmente o menu *Calc*, associado ao registo gráfico. Embora numa fase inicial do processo de génese instrumental os alunos tenham sugerido a utilização do registo numérico, no menu tabela, posteriormente esta opção praticamente não foi utilizada por estes. Numa situação em que não conseguiu aplicar o esquema usual na determinação do zero de uma função, o Diogo explicitou que se esquece do menu tabela, porque geralmente não o utiliza. Na altura, recorreu à tabela por sugestão da investigadora, efetuando uma aproximação do zero às unidades, não alterando o acréscimo de x, que estava definido como uma unidade. Posteriormente, noutra situação em que voltou a ter dificuldade na aplicação do esquema usual, devido ao facto de a função não estar definida para o valor de x em que considerava existir um extremo relativo, já recorreu à tabela por sua iniciativa. De qualquer modo, a partir do momento em que os esquemas se tornam instrumentais na atividade dos alunos parece natural que, apenas em caso de dificuldade, sejam substituídos por outros.

Perante as mesmas situações, o Francisco não chegou a sentir as mesmas dificuldades. Por um lado, relativamente à primeira situação, o aluno fez um esboço da representação gráfica sem rigor, não sentindo necessidade de determinar o zero como fez o Diogo. Por outro lado, no que diz respeito à segunda situação, uma vez que simplificou a expressão racional, editando-a desse modo na calculadora, não obteve mensagem de erro ao determinar o extremo relativo. Ou seja, os esquemas que os alunos utilizam e vão desenvolvendo dependem das situações com que se vão deparando, mas também do seu método de trabalho e dos conhecimentos matemáticos que possuem ou que são evocados na altura.

Os esquemas de utilização dependem também do tipo e da marca da calculadora gráfica. As calculadoras do Diogo e do Francisco eram da mesma marca e muito semelhantes, sendo necessário definir um intervalo e/ou um ponto (*Guess*) em determinados itens do menu *Calc*, o que, como foi visto, pode conduzir a determinados erros que os alunos devem interpretar de modo a efetuar a sua correção. Contudo, podem ocorrer situações em que não é apresentada mensagem de erro, mas o resultado não é o pretendido. Por exemplo, no caso da determinação dos extremos relativos, é devolvido um valor no intervalo indicado sem que neste se verifique mudança de variação, pelo que o esquema de utilização deverá incluir esse requisito.

Também em termos da edição da expressão analítica é importante que os esquemas de utilização envolvam a distinção das situações em que deve ser utilizado o sinal negativo ou a operação de subtração, uma vez que, nesta marca de calculadora, não é devolvida mensagem de erro no caso de o sinal negativo ser editado na expressão, sendo interpretado como uma multiplicação. O Diogo e o Francisco foram confrontados com essa situação numa fase inicial do processo de génese instrumental, mas, no que diz respeito às situações observadas, não voltaram a cometer o mesmo erro. Alguns dos constrangimentos referidos são específicos das calculadoras da marca TEXAS, não se verificando, por exemplo, nas calculadoras da marca CASIO.

Os esquemas de utilização desenvolvidos pelos alunos envolvem, na generalidade, esquemas de enquadramento. A definição da janela de visualização é feita de modo semelhante pelo Diogo e pelo Francisco. Ambos recorrem à mudança direta dos valores do retângulo de visualização através de tentativa e erro, não recorrendo a *zooms* predefinidos para além do *Zoom ZStandard*. Nas várias situações em que os valores a definir eram elevados, o Diogo demorou muito tempo até conseguir uma janela adequada. O Francisco, apesar de o conseguir um pouco mais rápido, já que tem uma maior facilidade em estabelecer conexões entre a representação algébrica e gráfica, menciona que, em termos do trabalho com a calculadora gráfica, este é um aspeto que lhe levanta, por vezes, algumas dificuldades. Os esquemas desenvolvidos neste âmbito refletem também o trabalho desenvolvido na aula. De facto, a professora não fez referência a outros *zooms*, nem sugeriu aos alunos que recorressem à tabela, sendo a janela de visualização, nos exemplos trabalhados na aula, definida essencialmente a partir do contexto dos problemas em que a representação gráfica estava a ser utilizada.

Os dados sugerem também que, apesar de, por vezes, ser possível visualizar uma representação gráfica aceitável tendo em conta a função ou o problema envolvidos, os alunos usualmente não recorrem a alterações na janela de modo a conseguirem interpretar melhor a representação gráfica na vizinhança de algum ponto relevante que pretendam determinar, como os zeros ou os extremos. Este comportamento pode conduzir a interpretações incorretas da representação gráfica. Por exemplo, o Diogo, num determinado problema, considerou a ausência de movimento nos intervalos em que a representação visualizada na calculadora parecia constante, embora o enunciado fizesse referência expressa a uma mudança de variação e não a uma "estabilização". Um ajuste na janela de visualização de modo a focar a parte da representação gráfica pretendida, e o recurso ao menu *TRACE*, poderia ter contribuído para o Diogo resolver com sucesso a questão, mas efetivamente os alunos não mostraram essa predisposição para fazer *zoom in* ou *zoom out*, o que poderiam fazer mesmo sem recurso aos *zooms* predefinidos. Nas entrevistas, as alterações na janela de visualização foram, várias vezes, sugeridas pela investigadora.

De um modo geral, os dados sugerem que os esquemas desenvolvidos pelos alunos e o modo como estes utilizam a calculadora gráfica está relacionada, em grande parte, com o modo como ela é utilizada pelo professor na sala de aula, o que tem sido também assinalado por diversos autores (Cavanagh & Mitchelmore, 2003; Doerr & Zangor, 2000; Oack, 2008; Rocha, 2000). A exploração individual do artefacto recorrendo ao manual, por exemplo, de acordo com os testemunhos dos dois alunos não ocorreu, e a exploração pelos pares, fora da sala de aula, também não parece ter ocorrido, já que as funcionalidades a que ambos recorreram foram exatamente as que foram assinaladas na sala de aula. O processo de instrumentalização envolveu, no entanto, a ampliação do artefacto, por parte dos dois alunos, com a inclusão de alguns programas, sugeridos pela professora, nomeadamente o programa para recorrer à fórmula resolvente, que não faz parte dos recursos de origem daquelas máquinas gráficas.

9.3. Em que situações e com que objetivo a calculadora gráfica é utilizada

Os alunos recorrem à calculadora gráfica em várias situações e com diferentes objetivos, nomeadamente, para representar graficamente uma função ou analisar a situação a partir da representação gráfica da função envolvida; para confirmar graficamente resultados obtidos por procedimentos analíticos; para resolver situações matemáticas que não conseguem resolver analiticamente; como um instrumento facilitador de certos procedimentos, como por exemplo resolução de equações; e para explorar determinadas situações problemáticas. Em muitos aspetos os objetivos com que os dois alunos utilizam a calculadora gráfica são semelhantes, embora seja possível perceber diferenças no perfil de trabalho de cada aluno.

Quando é pedida a representação gráfica de uma função, e é dada a expressão analítica, ambos os alunos recorrem à calculadora gráfica. Foi possível verificar diferenças numa situação em que era dada a representação gráfica de uma função afim e era pedido para representar graficamente funções resultantes de uma transformação dessa, em particular do módulo. Enquanto o Francisco preferiu obter a expressão analítica da função representada graficamente para poder recorrer à calculadora, o Diogo não considerou essa hipótese e tentou resolver a questão, partindo da definição de módulo e considerando os efeitos na representação gráfica da função original.

Tabela 16 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Representação gráfica de uma função.

<table>
<tr><th>Situação/objetivo</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Representação gráfica de uma função</td><td colspan="2">Os alunos utilizaram a calculadora gráfica sempre que foi pedido para representar graficamente uma função, ou quando, por iniciativa própria, pretenderam converter a representação algébrica na representação gráfica.</td></tr>
<tr><td></td><td>Recorreu à calculadora gráfica para representar graficamente uma função obtida por transformação de outra representada graficamente, efetuando em primeiro lugar a conversão da representação gráfica na algébrica.</td></tr>
</table>

A confirmação gráfica de resultados obtidos analiticamente é feita pelos dois alunos essencialmente quando ainda não estão muito familiarizados com os procedimentos analíticos. Em situações de avaliação, a confirmação depende fundamentalmente do tempo disponível.

Tabela 17 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Confirmação de resultados obtidos analiticamente.

<table>
<tr><th>Situação/objetivo</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Confirmação de resultados obtidos analiticamente</td><td colspan="2">A confirmação de resultados obtidos analiticamente é, por vezes, feita pelos alunos, dependendo do tempo que estes têm para responder à questão e da familiaridade que têm com os procedimentos analíticos.</td></tr>
<tr><td></td><td>As questões de escolha múltipla, em situações de avaliação, são muitas vezes confirmadas graficamente, em especial no 11.º ano, por conseguir terminar a prova antes do seu tempo de duração.</td></tr>
</table>

A calculadora gráfica permite aos alunos resolver situações para as quais não têm conhecimentos analíticos, como por exemplo determinação de extremos de uma função antes do estudo das derivadas. Por vezes, a calculadora surge também como um recurso alternativo quando se encontram em dificuldades perante uma resolução analítica, apesar de terem os conhecimentos para o fazer.

Tabela 18 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Situações matemáticas que não conseguem resolver analiticamente.

<table>
<tr><th>Situação/objetivo</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td>Situações matemáticas que não conseguem resolver analiticamente</td><td colspan="2">Os alunos recorreram à calculadora gráfica perante várias situações para as quais não tinham conhecimentos para resolver analiticamente, nomeadamente determinação de extremos relativos, resolução de equações e inequações.

Nalgumas ocasiões, apesar de terem conhecimentos para uma resolução analítica, a calculadora gráfica surgiu como um recurso alternativo após tentativa falhada de resolução analítica. Estas situações não foram muito frequentes na atividade dos alunos.</td></tr>
</table>

A calculadora gráfica é, por vezes, utilizada como um instrumento facilitador de certos procedimentos, por exemplo, na resolução de equações e inequações. Embora ambos os alunos, por uma questão de simplicidade e economia de tempo, a utilizem nessa perspetiva, esse padrão de comportamento é mais frequente no Diogo.

Tabela 19 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Instrumento facilitador de certos procedimentos.

<table>
<tr><th>Situação/objetivo</th><th>Diogo</th><th>Francisco</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Instrumento facilitador de certos procedimentos</td><td colspan="2">A calculadora gráfica é utilizada como instrumento facilitador de determinados procedimentos, como determinação de zeros, extremos, etc., por uma questão de facilidade e rapidez.</td></tr>
<tr><td>O aluno utiliza a calculadora gráfica, frequentemente, com esse objetivo.</td><td>O aluno utiliza a calculadora gráfica, esporadicamente, com esse objetivo.</td></tr>
</table>

	As questões de escolha múltipla, que não impõem uma resolução analítica, são, muitas vezes, resolvidas recorrendo à calculadora gráfica.	

Relativamente à exploração de situações problemáticas foi também possível perceber algumas semelhanças e diferenças no perfil de trabalho dos alunos. No que diz respeito à exploração dos efeitos de um parâmetro na representação gráfica dos elementos de famílias de funções, ambos os alunos mostraram tendência para atribuir apenas números inteiros aos parâmetros e para tirar conclusões com base num reduzido número de casos particulares, o que, por vezes, os conduziu a conclusões incorretas. Este tipo de comportamento está documentado na literatura, por exemplo, por Even (1998) que refere que, embora a investigação de determinadas situações através da verificação de casos específicos seja uma poderosa estratégia em matemática, muitas vezes, o número de exemplos e a sua diversidade é muito limitado, conduzindo a regras que não são válidas no contexto.

Ambos os alunos revelaram, também, uma tendência para considerar uma justificação baseada na visualização gráfica na calculadora como prova de determinada conjetura. Rocha (2012) assinala também a dificuldade que os alunos têm em provar determinada conjetura, afirmando, por exemplo, "vê-se logo", não compreendendo a necessidade de basear a justificação em algo mais do que a visualização.

O Francisco mostrou uma melhor apetência para tirar partido da sua calculadora gráfica na exploração de algumas situações problemáticas do que o Diogo, apesar de, por vezes, a sua exploração ser condicionada por dificuldades de ordem conceptual.

Tabela 20 – Confronto situação/objetivo de utilização da calculadora gráfica de Diogo e Francisco: Exploração de situações problemáticas.

Situação/objetivo	**Diogo**	**Francisco**
Exploração de	A calculadora gráfica foi utilizada pelos alunos na investigação dos efeitos de um parâmetro em famílias de funções; na exploração gráfica de	

situações problemáticas	situações para as quais os alunos não tinham à partida uma estratégia de resolução; e para estabelecer, confirmar ou refutar conjeturas.	
		Nalgumas situações de dúvida recorreu à calculadora, fazendo alguma exploração a partir de casos mais simples.

Em muitos aspetos os dois alunos utilizam a calculadora gráfica com objetivos semelhantes, em particular para representar o gráfico de uma função, confirmar resultados obtidos por métodos analíticos, resolver situações matemáticas que não conseguem resolver analiticamente e como um instrumento facilitador de certos procedimentos, tais como resolução de equações e inequações, determinação do extremo de funções quadráticas, entre outros. Mas, existem também algumas diferenças que foram sendo percetíveis ao longo do período em que decorreu a recolha de dados. Por exemplo, nas situações em que não é imposto um método de resolução analítica, o Diogo recorre mais vezes à calculadora gráfica do que o Francisco, que, usualmente, opta por uma resolução analítica. Este padrão de comportamento encontra-se patente nomeadamente quando os alunos se referem às questões de escolha múltipla, em que o Diogo menciona recorrer, com frequência, à calculadora gráfica, por lhe poupar tempo, enquanto o Francisco refere que, em particular no décimo primeiro ano, confirma as escolhas feitas nessas questões com a calculadora gráfica.

Ao nível da exploração de situações problemáticas, contudo, o Francisco parece aproveitar melhor o recurso disponível do que o Diogo. Em situações de dúvida optou por fazer algum tipo de exploração com a calculadora, a partir da representação gráfica da função envolvida, ou através da exploração da situação a partir de casos mais simples ou semelhantes. Esta vertente de exploração a partir de outras funções ou de situações mais simples não esteve presente na atividade matemática do Diogo. É de salientar que, na sala de aula, para além da exploração dos efeitos dos parâmetros na representação gráfica de famílias de funções, a calculadora gráfica foi utilizada essencialmente em situações concretas, de um modo geral definidas pela professora.

As situações e o objetivo com que os alunos recorrem à calculadora gráfica são em grande parte coincidentes com os padrões e modos de utilização definidos por Doerr e Zangor (2000), com exceção da utilização da calculadora para obtenção de dados. Este modo de utilização não surgiu neste estudo, já que a calculadora gráfica nunca foi utilizada em contexto de sala de aula nesse sentido.

9.4. Aprendizagem do conceito de função e integração da calculadora gráfica na atividade do aluno

9.4.1. Reconhecimento e identificação de funções

Os alunos mostraram alguma facilidade no reconhecimento e identificação de funções, o que lhes permitiu, de um modo geral, resolver problemas com sucesso. Foi possível perceber uma evolução no conceito de função de um nível operacional para um nível estrutural, visível no modo de abordar os problemas envolvendo funções, em particular no Diogo que, relativamente ao Francisco, parece ter iniciado o 10.º ano tendo um nível de compreensão do conceito de função mais elementar (Hitt, 1998). A calculadora gráfica, através da representação gráfica, impulsionou esta abordagem estrutural, pois embora a dualidade processo/objeto possa ser percebida em cada uma das representações de uma função, algumas das representações encorajam mais uma das abordagens, sendo que a representação gráfica encoraja uma abordagem estrutural (Sfard, 1991). O facto de a calculadora gráfica lhes proporcionar uma estratégia para resolver determinados problemas, permite uma abordagem estrutural às funções desde uma fase inicial, facilitando o desenvolvimento de uma visão orientada para o objeto.

Nas situações em que os alunos foram confrontados com a decisão de se encontrarem ou não perante uma função, o Diogo recorreu ao *conceito definição* aplicando-o a partir da representação gráfica, enquanto o Francisco apelou essencialmente a imagens mentais contidas no seu *conceito imagem*. A calculadora gráfica foi utilizada pelo Diogo para efetuar a conversão da representação algébrica na gráfica, o que indica que o aluno sente um maior à-vontade em aplicar o *conceito definição* a partir da representação gráfica. A calculadora não conseguiu ser convertida num instrumento eficiente no caso em que a função estava definida por ramos, situação para a qual não desenvolveu esquemas de utilização, nem no caso em que a expressão representava uma equação na variável *x*. Relativamente à equação na variável *x*, o aluno recorreu aos esquemas de utilização para resolver equações, não conseguindo compreender a diferença entre o conceito de função e de equação, apesar de ser possível perceber um certo conflito cognitivo, nomeadamente quando tentou determinar o domínio e o contradomínio da suposta função. O facto de utilizar a calculadora gráfica para resolver equações, considerando funções convenientes, poderia ter contribuído para este equívoco, no entanto, Elia *et al.* (2007) também reportam a dificuldade que os alunos têm em reconhecer que uma equação na variável *x* não representa uma função, num estudo em que não usam tecnologias.

O Francisco identificou algumas funções tendo em conta determinadas classes de funções presentes no seu *conceito imagem*, contudo, mostrou também conhecer o *conceito definição*. Por exemplo, uma expressão definida por troços suscitou-lhe dúvidas pelo facto de não ser contínua, dúvidas essas que continuaram quando o aluno optou por converter a representação algébrica na gráfica. Mas, ao ser questionado sobre o que entendia por função, evocou o *conceito definição* e conseguiu decidir corretamente. Alguns autores referem que o facto de uma função não ser contínua condiciona o seu reconhecimento (Gagatsis, Monoyiou, Deliyianni, & Philippou, 2010), o que muitas vezes é um reflexo do ensino e do tipo de funções com que os alunos foram confrontados. De facto, o Francisco mostrou alguma hesitação inicial, o que parece indicar que este tipo de função não fazia parte do seu *conceito imagem*. Apesar disso, o aluno conseguiu ultrapassar a dificuldade quando recordou o *conceito definição*.

A calculadora gráfica foi utilizada pelo Francisco como um instrumento para converter a representação algébrica na gráfica, essencialmente com o objetivo de confirmar a previsão relativa à forma da representação gráfica, não sendo convertida num instrumento eficaz no caso de algumas expressões, devido a dificuldades no tratamento algébrico.

Apesar de o Francisco recorrer, com frequência, a imagens mentais presentes no seu *conceito imagem* para identificar funções, foi possível perceber que o *conceito definição* também está presente, sendo evocado após interação com a investigadora, e utilizado essencialmente para decidir se determinada representação gráfica poderia representar uma função. Tal como no estudo de Elia *et al.* (2007), tanto o Diogo como o Francisco revelaram maior facilidade em reconhecer funções a partir da representação gráfica do que a partir da representação algébrica, com o Diogo a proceder de imediato à conversão da representação algébrica na gráfica, facilitada pelo recurso ao instrumento, e o Francisco a utilizá-la mais numa perspetiva de confirmação.

9.4.2. Transformações de funções

Relativamente às transformações de funções, tanto o Diogo como o Francisco conseguiram desenvolver facilmente os invariantes operatórios respeitantes à translação vertical. Já os invariantes operatórios relativos à translação horizontal demoraram mais tempo a ser instituídos pelo Diogo. A dificuldade da translação horizontal relativamente à translação vertical está referida na literatura (Borba & Confrey, 1996; Eisenberg & Dreyfus, 1994; Zazkis *et al.*, 2003) e, de facto, o Diogo parece ter tido alguma dificuldade em aceitar o sentido da translação horizontal. Em caso de dúvida, nem sempre conseguiu recorrer à calculadora gráfica para esclarecer o sentido da translação, já que, por um lado não desenvolveu esquemas de utilização para escrever implicitamente uma função a partir de outra e, por outro lado, houve situações em que o recurso à calculadora ficou condicionado pela dificuldade da expressão envolvida. O facto de este tipo de transformações ser bastante trabalhado na sala de aula, permitiu que, a partir de determinada altura, ambos os alunos identificassem de imediato o efeito da transformação, mesmo sem recurso ao artefacto. O mesmo aconteceu com a simetria relativamente ao eixo *Ox*. Contudo, quando questionados relativamente aos efeitos desse tipo de transformações, os alunos baseiam a sua resposta numa memorização dos *teoremas-em-ação* (Vergnaud, 1998).

As transformações correspondentes ao alongamento vertical e horizontal não foram praticamente trabalhadas na aula, pelo que os alunos não desenvolveram os invariantes operatórios, contudo, assim como a translação horizontal parece ser mais contraintuitiva que a translação vertical, o mesmo se passa relativamente ao alongamento horizontal. No caso em que os alunos tinham a expressão analítica da função original, os efeitos da transformação foram identificados recorrendo ao artefacto. Não tendo a expressão analítica, o Diogo considerou de imediato o efeito contrário, enquanto o Francisco acabou por compreender o efeito a partir da exploração de casos mais simples, recorrendo ao artefacto, apesar das dificuldades reveladas em termos da interpretação da notação envolvendo funções, em particular, da sua tendência para tratar a simbologia envolvida como uma espécie de "um operador linear".

Nalgumas situações foi possível perceber dificuldades na aplicação dos conhecimentos relativos às transformações de funções, mesmo as mais usuais, quer em termos do estabelecimento de relações entre propriedades das funções envolvidas, quer em termos da resolução de situações problemáticas. O estabelecimento de relações entre propriedades das funções envolve algum *sentido de símbolo* (Arcavi, 2006) ou de *sentido de função* (Eisenberg & Dreyfus, 1994), sendo necessário que os alunos "olhem" os símbolos e tentem estabelecer relações, não embarcando de imediato no processo de resolução "usual". Este tipo de comportamento não é habitual na atividade dos alunos, que tendem a memorizar processos de resolução para determinadas situações típicas, como foi possível verificar neste estudo.

9.4.3. Conversão de representações

O Diogo mostrou mais aptidão do que o Francisco na conversão da representação verbal na gráfica, conseguindo relacionar propriedades das funções nas duas representações com maior sucesso. Por vezes, a conversão intermédia na representação algébrica poderia facilitar a conversão pretendida, no entanto, esse procedimento não parece ser habitual na atividade dos dois alunos, apesar de haver indícios, pelo menos numa situação, de o Francisco ter recorrido a ele, o que mostra alguma flexibilidade representacional. No que diz respeito à conversão da representação verbal na algébrica, o Francisco mostrou desde o início alguma facilidade em termos da escrita de uma variável em função da outra. Já o Diogo revelou inicialmente dificuldade nesse sentido, talvez devido a uma visão mais operacional do conceito de função. É de salientar, contudo, que o sucesso na conversão da representação verbal na algébrica não está apenas associado a uma visão mais estrutural do conceito de função, uma vez que vários outros fatores influenciam o sucesso da conversão, nomeadamente a capacidade de estabelecimento de relações entre conceitos e propriedades, assim como a capacidade de tratamento algébrico.

Em termos da conversão entre as representações algébrica e gráfica foi possível perceber a importância do estudo de classes de funções, feito a partir da observação dos efeitos dos parâmetros em determinadas formas de representação algébrica, na representação gráfica dos elementos da família de funções. De facto, os alunos mostraram alguma facilidade em efetuar conversões entre a representação algébrica e a gráfica de funções afins, quadráticas, e racionais representadas por hipérboles, funções que foram estudadas salientando as relações entre as duas representações. Almeida e Oliveira (2009) também concluíram que os esquemas utilizados pelos alunos na conversão da representação algébrica na gráfica, em funções racionais, se baseiam em "representações mentais que foram construídas com o auxílio da calculadora" (p. 112).

No caso das funções cujo estudo foi desenvolvido a partir de famílias de funções não parece haver diferença de desempenho no que diz respeito ao sentido da conversão, contrariamente ao que é referido por Duval (2006), que mostra evidências de que os alunos têm maior dificuldade em efetuar a conversão da representação gráfica na algébrica, mesmo em funções relativamente familiares como as funções afins. Thomas *et al.* (2008) e Thomas *et al.* (2010), porém, também não encontraram diferenças significativas em termos do desempenho dos participantes no que diz respeito ao sentido da conversão em funções afins e quadráticas.

O facto de as funções afins, quadráticas e racionais cuja representação é uma hipérbole terem sido estudadas a partir dos efeitos dos parâmetros nas famílias de funções permitiu aos dois alunos focarem algumas propriedades das funções e a sua relação nos dois registos de representação, conseguindo efetuar conversões deste tipo de funções com algum sucesso. No caso de outras funções, como a função cúbica, em que o estudo praticamente não incidiu na ligação entre as duas representações, foi possível perceber maiores dificuldades em ambos os sentidos da conversão mesmo recorrendo ao artefacto.

9.4.4. Fluência e flexibilidade representacional

Ao longo dos dois anos em que decorreu o estudo, em particular, no décimo primeiro ano, o Francisco revelou uma tendência para começar por abordar as questões envolvendo funções através da representação algébrica, mesmo quando estas não impunham uma resolução analítica. Esta situação deve-se em particular ao contexto, já que o próprio aluno afirma que, em geral, têm que resolver as questões analiticamente, sendo esse o modo de resolução privilegiado. A resolução gráfica é feita pelo aluno essencialmente quando ainda não está familiarizado com o procedimento analítico, ou quando se encontra em dificuldade perante a resolução algébrica. O Diogo mostrou uma maior inclinação para abordar determinadas questões a partir da representação gráfica, recorrendo à calculadora, fazendo o que pode ser considerado uma *escolha flexível* (Nistal *et al.*, 2012), já que analisa a questão e escolhe a representação que lhe proporciona uma resolução rápida e eficaz. Claro que o contexto pode influenciar esta decisão, pois muitas vezes existem restrições relativamente à utilização da calculadora gráfica.

Apesar de o Diogo optar várias vezes por uma resolução recorrendo à calculadora, em situações que não as usuais nem sempre conseguiu tirar partido das potencialidades desse artefacto, mostrando maior dificuldade no estabelecimento de conexões entre representações do que o Francisco. Além disso, o *conceito imagem* desenvolvido pelo Diogo para determinadas classes de funções parece mais *rígido* do que o *conceito imagem* desenvolvido pelo Francisco, uma vez que utiliza determinadas propriedades que considera válidas para essas funções, não conseguindo articular a informação proveniente das várias representações. O Francisco recorre usualmente à representação algébrica, mas, em situações de dúvida, tenta estabelecer conexões entre representações, particularmente entre a representação algébrica e gráfica, recorrendo à calculadora.

Em resumo, o Diogo parece possuir uma maior flexibilidade em termos da escolha da representação a utilizar perante determinada tarefa, porém, escolhida uma representação, apresenta alguma tendência para se manter dentro do registo escolhido. O Francisco recorre quase sempre em primeiro lugar à representação algébrica, um pouco condicionado pelo contexto, mas mostra alguma flexibilidade em mudar de registo de representação quando encontra alguma dificuldade no processo de resolução.

Em relação à fluência representacional, foi evidente alguma dificuldade em termos do trabalho com funções trigonométricas nos dois alunos, quer no registo algébrico, quer no registo gráfico, mas tal pode ser explicado pelo facto de esse tipo de funções ter sido abordado na sala de aula pontualmente, no contexto da trigonometria, não tendo havido um grande desenvolvimento do tema em termos de funções reais de variável real. Em situações familiares notou-se alguma fluência ao nível de ambos os registos de representação (algébrico e gráfico), quer em relação ao Diogo, quer em relação ao Francisco. Nas situações não familiares, o estabelecimento de conexões, alternando entre vários registos de representação (algébrico, gráfico, numérico), parece ser fundamental para o sucesso na resolução das tarefas.

Capítulo 10

Conclusões

Neste capítulo pretendo, numa primeira parte, responder às questões do estudo, baseando-me nas evidências empíricas e nas considerações teóricas abordadas na revisão de literatura, tendo também em conta o contexto de aprendizagem em que o estudo decorreu. Numa segunda parte, apresento uma reflexão final sobre o processo de génese instrumental e sobre as potencialidades da calculadora gráfica no ensino e aprendizagem da matemática, bem como da importância que esta investigação teve em termos do meu desenvolvimento enquanto investigadora e principalmente enquanto professora. Ainda nesta secção final apresento algumas sugestões para futuras investigações.

10.1. Síntese do estudo

A calculadora gráfica, obrigatória no ensino secundário desde há quase duas décadas, ainda é vista de forma controversa por alguns e utilizada nas aulas de Matemática de forma muito diversa (Andrade, 2007; Rocha, 2012). É importante conhecer e compreender o papel que este artefacto desempenha na aprendizagem da matemática, em particular na aprendizagem das funções, e esse é um dos propósitos deste estudo. É necessário, no entanto, ter em consideração que os artefactos disponíveis não se tornam de imediato em instrumentos na atividade humana, sendo necessário que o utilizador desenvolva esquemas de utilização (Rabardel, 2002), que lhe permitam integrá-los de forma eficiente na atividade, e esse é o principal objetivo do estudo, compreender como é que os alunos se apropriam do artefacto calculadora gráfica e o transformam num instrumento na sua atividade matemática com funções.

A recolha de dados decorreu num ambiente naturalista e em situação de entrevista com a investigadora, numa turma de Ciências e Tecnologias do 10.º ano, numa escola da região centro, prolongando-se no ano letivo seguinte, com os alunos no 11.º ano. A investigação seguiu o paradigma interpretativo, sendo a modalidade escolhida o estudo de caso. Foram elaborados dois estudos de caso.

10.2. Conclusões do estudo

Nesta seção são delineadas as principais conclusões do estudo, inferidas a partir da interpretação dos dados, nomeadamente dos dois estudos de caso, atendendo e refletindo sobre o contexto em que decorreu o processo de ensino/aprendizagem. As conclusões estão organizadas de acordo com as questões de investigação.

1. Que esquemas instrumentados desenvolvem os alunos ao utilizar a calculadora gráfica na sua atividade com funções? Como se desenvolvem e evoluem esses esquemas?

Ao longo dos dois primeiros anos do ensino secundário os alunos desenvolveram esquemas de utilização referentes ao artefacto calculadora gráfica que lhes permitiram visualizar a representação gráfica de funções (edição da expressão analítica e enquadramento), resolver equações e inequações graficamente, determinar as coordenadas de pontos pertencentes ao gráfico de determinada função, obter a representação gráfica da função derivada de uma função e a derivada de uma função num ponto.

Os esquemas de utilização referentes à edição da expressão analítica desenvolvem-se essencialmente através da participação na atividade. O professor chama a atenção dos alunos para determinadas características que considera essenciais que conheçam, mas é através da atividade que os processos de instrumentalização e instrumentação vão sendo desenvolvidos, sendo atribuídos significados às várias teclas, assim como assimilados os esquemas a elas respeitantes. As mensagens de erro que, por vezes, são devolvidas pela máquina nem sempre são descodificadas pelos alunos, porém a identificação da tipologia do erro poderia conduzir a uma correção mais rápida e eficaz. Neste sentido o professor pode desempenhar um papel importante, pedindo aos alunos para identificarem o erro e a sua eventual correção. As funções com que os alunos se vão deparando são cruciais para o desenvolvimento do processo de génese instrumental. Por exemplo, dificilmente um aluno consultar o manual da calculadora para perceber como se edita uma função definida por ramos, se não se deparar com essa situação na sua atividade. Do mesmo modo, parece essencial que, a edição de uma função, a partir de outra editada, seja abordada na sala de aula, para que os alunos possam depois adaptar os esquemas a novas situações.

Os esquemas de enquadramento são desenvolvidos a partir da atividade na sala de aula, parecendo haver uma forte tendência para os valores do retângulo de visualização serem alterados usando as mesmas funcionalidades que foram sugeridas pelo professor. Ou seja, mais uma vez parece não haver grande predisposição dos alunos para explorem as potencialidades das suas calculadoras gráficas para além do que é trabalhado na sala de aula. A escolha de uma janela de visualização apropriada ou, eventualmente, de várias janelas, que permitam compreender as principais características da representação gráfica de uma função, é um aspeto essencial da atividade com uma calculadora gráfica, sendo também um dos aspetos que mais dificuldades levanta aos alunos. Para além do conhecimento dos vários modos de alterar a janela de visualização e dos seus efeitos na representação gráfica, o estabelecimento de conexões entre as duas representações, algébrica e gráfica, é fundamental na procura de uma janela adequada. Ter uma ideia acerca do aspeto gráfico de determinada expressão algébrica, da relação entre os valores de alguns parâmetros e da ordem de grandeza dos valores correspondentes às variáveis em questão, é determinante para uma escolha rápida do retângulo de visualização.

Os esquemas de resolução de equações/inequações e determinação de pontos notáveis envolvem essencialmente o menu gráfico (*Calc* nas TEXAS), havendo pouca tendência por parte dos alunos para recorrerem à representação numérica na tabela, por exemplo. Só em situações pontuais, em caso de dificuldade na aplicação do esquema usual, é que o menu *Table* surgiu como alternativa. Efetivamente, o recurso ao menu gráfico é muito mais eficaz do que o recurso ao menu *Table*, havendo menor possibilidade de serem cometidos erros em termos da aproximação pedida, contudo, parece importante que, em caso de dificuldade, exista a flexibilidade para mudar de representação, nem que seja para explorar o porquê dessa dificuldade. Mas, mais uma vez, será necessário que tal seja trabalhado na sala de aula, já que os alunos referem esquecer o menu tabela. Além disso, o uso do menu tabela poderá contribuir para a compreensão do processo matemático envolvido na determinação dos zeros ou dos extremos.

Os esquemas de utilização envolvendo o menu *Calc* englobam os esquemas de enquadramento, pois são aplicados no registo gráfico da calculadora. Os dados mostram que, uma vez obtida uma janela de visualização, os alunos raramente a alteram de modo a focarem melhor a zona da representação gráfica onde pretendem determinar os pontos relevantes. Este tipo de comportamento pode conduzir a conclusões erróneas, pelo que é essencial que os alunos desenvolvam o hábito de ampliar ou reduzir "a lente" consoante o que pretendem analisar na representação gráfica. A adaptação dos esquemas de utilização, já desenvolvidos, a novas classes de funções, por vezes, pode trazer algumas dificuldades, o que pode ser reduzido se os alunos desenvolverem a capacidade de conjugar a informação proveniente das várias representações, incluindo a capacidade para alterarem de forma dinâmica vistas da representação gráfica ou os valores na tabela.

Os esquemas que envolvem a derivada praticamente não foram desenvolvidos, o que sugere que o recurso à calculadora gráfica, no caso deste tema da matemática, não é muito valorizado pela professora. Analisando as tarefas propostas em exames nacionais e testes intermédios, concluímos que relativamente ao tópico das derivadas existe sempre uma imposição de resolução analítica, pelo menos no que respeita à obtenção da função derivada. Este aspeto referente à avaliação externa pode contribuir para a desvalorização do uso do artefacto neste tópico da matemática. Foram os alunos que, num trabalho de pares, perguntaram à professora se podiam "fazer a derivada de uma função na calculadora gráfica" e como é que o podiam fazer. Ao longo do tempo em que decorreu este estudo foi possível perceber que a calculadora gráfica surgiu no trabalho na aula essencialmente numa perspetiva de resolução de determinadas tarefas típicas, e não muito numa perspetiva de introdução ou exploração de conceitos, e isso é particularmente visível no caso deste tema.

Em resumo, os esquemas desenvolvidos pelos alunos dependem fortemente dos que são usados e valorizados no âmbito do trabalho na sala de aula de Matemática. Apesar de inicialmente, para a mesma situação, poderem existir vários esquemas de utilização, alguns vão ficando para segundo plano, acabando um deles por ganhar visibilidade. O método de trabalho dos alunos e os conhecimentos matemáticos que possuem são também determinantes em termos do desenvolvimento e da evolução dos esquemas de utilização, daí que a partilha dos esquemas, na sala de aula, possa desempenhar um importante contributo para o seu desenvolvimento e evolução. Além disso, o confronto e a discussão de resultados reforçam quer o desenvolvimento dos esquemas de utilização, quer a compreensão conceptual (Drijvers, 2008). Este e outros autores (Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010; Drijvers & Trouche, 2008) salientam a importância da *orquestração instrumental* por parte do professor, já que este desempenha um papel fundamental em termos do modo como a calculadora gráfica ou outros artefactos computacionais são usados na sala de aula.

2. Em que situações e com que objetivo é que os alunos usam a calculadora gráfica na sua atividade matemática envolvendo funções?

Os alunos recorrem à calculadora gráfica sempre que é pedida a representação gráfica de uma função definida por uma expressão algébrica. Esta situação parece perfeitamente compreensível, já que estão de posse de um artefacto que efetua rapidamente a conversão da representação algébrica na gráfica. Não tendo a representação algébrica, a opção por recorrer ou não à calculadora gráfica, parece ficar dependente do perfil de trabalho do aluno ou dos conhecimentos matemáticos que possuiu relativamente às funções envolvidas, como foi possível perceber pelo recurso a diferentes estratégias numa situação em que era pedida a representação gráfica de funções que dependiam de uma definida graficamente.

A calculadora gráfica foi também utilizada pelos alunos para resolver situações que não conseguiam resolver analiticamente, confirmar resultados obtidos por via algébrica e para explorar situações problemáticas. Perante situações para as quais não tinham conhecimentos matemáticos para resolver analiticamente, os alunos recorreram às capacidades da calculadora gráfica, no entanto, foi possível perceber que as funções envolvidas podem condicionar essa opção. A utilização da calculadora gráfica depois de uma tentativa de resolução analítica também foi observada, ocorrendo essencialmente perante funções sobre as quais os alunos não possuíam elevada fluência algébrica, como as trigonométricas ou polinomiais de grau superior a dois. Esta hipótese de recorrer à calculadora gráfica perante uma dificuldade algébrica parece ser eficaz apenas no caso de não haver imposição de resolução analítica. Apesar de uma imposição de resolução analítica, o recurso à representação gráfica poderia ser um contributo para a continuidade da resolução analítica, contudo, essa situação não foi observada.

A confirmação gráfica de resultados obtidos analiticamente é feita essencialmente quando os alunos não estão ainda muito familiarizados com o método analítico. Em situações de avaliação, por exemplo, a confirmação depende em grande parte do tempo que os alunos têm disponível.

Em termos da exploração de situações problemáticas a calculadora gráfica foi utilizada na aula principalmente para estudo da influência de parâmetros na representação gráfica dos elementos de famílias de funções, notando-se tendência para atribuírem valores inteiros aos parâmetros, num número reduzido de casos particulares. Um dos alunos mostrou alguma predisposição para fazer exploração de situações problemáticas a partir de situações mais simples, ou de casos semelhantes, apesar de revelar alguma dificuldade em efetuar conjeturas e investigar situações que pudessem refutar ou corroborar as suas conjeturas. Esta vertente de exploração não surgiu na sala de aula, devendo-se antes ao perfil de trabalho do aluno e ao facto de ter o artefacto acessível.

O trabalho realizado em aula com a calculadora acaba também por condicionar as situações e os objetivos com que os alunos recorrem a este artefacto. No entanto, ao contrário dos esquemas de utilização que parecem iniciar-se apenas na sala de aula, a acessibilidade do artefacto permite aos alunos utilizá-lo com outros objetivos, numa perspetiva de exploração de situações que lhes colocam algum tipo de dificuldade.

3. Em que medida a calculadora gráfica contribui para que os alunos ultrapassem as dificuldades que encontram ao trabalhar com funções?

Uma das dificuldades dos alunos ao trabalharem com funções prende-se com a dualidade processo/objeto, sendo bastante salientada na literatura (Sfard, 1991; Slavit, 1997). Estes autores consideram necessário que os alunos desenvolvam uma visão orientada para o objeto, de modo a conseguirem compreender, por exemplo, transformações e operações com funções. O facto de os alunos poderem recorrer à calculadora para visualizar a representação gráfica de uma função pode contribuir para atenuar esta dificuldade, uma vez que esta representação favorece o desenvolvimento de uma visão orientada para o objeto. Inicialmente um dos alunos mostrou alguma dificuldade em compreender que uma única expressão pudesse traduzir a relação existente entre duas variáveis, o que poderia estar associado a uma visão mais operacional do conceito de função. Contudo, o recurso à representação gráfica, onde aquela variação é expressa de forma visual, pode ter sido determinante para que essa dificuldade fosse rapidamente ultrapassada.

Uma outra dificuldade dos alunos diz respeito ao estabelecimento de conexões entre representações de uma função, e, consequentemente, dificuldade na conversão de representações. Neste aspeto a calculadora gráfica pode desempenhar um papel bastante importante, em particular no estabelecimento de conexões entre a representação algébrica e a gráfica. A identificação dos "aspetos chave" em ambos os registos de representação é importante para o sucesso da conversão, e tal como referem Thomas *et al.* (2010), o professor desempenha um papel significativo no desenvolvimento da atenção dos alunos para esses aspetos ou propriedades.

Nesta investigação foi particularmente visível a importância do estudo da influência de parâmetros na representação gráfica de elementos de famílias de funções, já que, para as classes de funções em que esse estudo decorreu, os alunos demonstraram uma maior facilidade em efetuar a conversão de um registo de representação para o outro, não havendo grandes diferenças de desempenho em termos do sentido da conversão. No caso de funções em que esse estudo não ocorreu, foram detetadas maiores dificuldades no estabelecimento de conexões entre os dois registos de representação e na conversão de representações, em ambos os sentidos. Dentro da mesma classe de funções, ter a oportunidade de estudar as propriedades que são invariantes e as que não são, parece também fundamental para que não seja desenvolvido um *conceito imagem* restrito que possa conduzir a dificuldades em situações que não são as usuais.

A conversão da representação algébrica na gráfica pode não ser conseguida de forma imediata mesmo recorrendo ao artefacto, já que fica dependente da janela de visualização. Este facto conduz à consciencialização da importância do estabelecimento de conexões entre os dois registos de representação quando se utiliza o artefacto com o objetivo de efetuar a conversão da representação algébrica na representação gráfica. Assim, a procura de uma janela de visualização apropriada acaba por fortalecer o estabelecimento de conexões entre representações, ou seja, a calculadora gráfica contribui para o fortalecimento da relação entre os dois registos de representação. Eventualmente o artefacto poderia também ser utilizado para efetuar a conversão da representação gráfica na algébrica, passando pela representação numérica no menu estatístico e recorrendo à regressão adequada, mas neste estudo essa possibilidade não foi verificada. Essa situação faria sentido no caso de modelação de situações da realidade, em que fosse necessário encontrar uma expressão que se ajustasse a determinada nuvem de pontos, mas essas situações matemáticas não ocorreram na sala de aula. Em todo o caso, o menu de regressão poderia permitir aos alunos confirmar, caso desejassem, se a expressão algébrica, determinada manualmente, estaria ou não correta, ou, em caso de dificuldade, obtê-la recorrendo ao artefacto. Ambos os alunos relevaram dificuldades em obter a expressão algébrica de uma função cúbica representada graficamente, nesse caso, o recurso à regressão poderia ser uma estratégia alternativa.

As dificuldades evidenciadas pelos alunos ao nível das representações de funções não dizem apenas respeito à conversão de representações, tendo sido também detetadas ao nível do tratamento, dentro do registo algébrico, envolvendo simplificação ou factorização de expressões algébricas, resolução de equações e inequações e cálculo de derivadas. Apesar de a calculadora gráfica usada não efetuar cálculo simbólico, não podendo ser utilizada para efetuar confirmação no registo algébrico, poderá auxiliar a conversão no registo gráfico e a consequente comparação das representações gráficas. Esta situação foi observada na atividade matemática de ambos os alunos. Poderão existir situações em que, aparentemente, as representações gráficas sejam coincidentes, sendo necessário atender ao domínio das expressões, contudo, este é um aspeto em que os alunos também demonstram dificuldades. Assim, o domínio onde a simplificação de uma expressão racional é válida deve ser discutido e enfatizado em sala de aula e a calculadora gráfica poderá ser utilizada com esse objetivo, recorrendo também ao registo numérico.

Em termos das transformações de funções, a calculadora gráfica facilita a instituição dos invariantes operatórios, permitindo também uma confirmação em caso de dúvida, já que a translação e alongamento horizontais são um pouco contraintuitivos. Contudo, parece que os alunos acabam por memorizar os *teoremas-em-ação* (Vergnaud, 1998), sem que exista uma real compreensão acerca dos efeitos da transformação. Embora, tal como referem Gagatsis *et al.* (2010), vários estudos indiquem que uma abordagem global relativamente às funções seja mais poderosa do que uma abordagem pontual, a conjugação de múltiplas representações, integrando uma abordagem mista (global, proporcionada pela visualização da representação gráfica na calculadora, e pontual, proporcionada pela representação numérica), poderia contribuir para uma melhor compreensão dos efeitos das transformações. De facto, tal como refere Even (1998), existem várias situações em que uma abordagem pontual pode fornecer informação para uma solução completa ou que ajude na construção de uma solução completa. Além disso, o autor salienta que um indivíduo pode usar uma abordagem global para as funções e ainda assim não compreender o significado dos gráficos, pelo que uma abordagem pontual poderá ser importante na monitorização de interpretações precipitadas.

Os alunos demonstraram também dificuldades em relacionar o domínio de transformações de funções com o domínio da função original quando este é um subconjunto do conjunto dos números reais. A integração de várias abordagens e representações poderia também ser importante na compreensão dos efeitos da transformação no caso em que o domínio é um conjunto limitado, não colocando o foco apenas na representação gráfica global, mas também nas características inerentes às funções envolvidas, como é o caso do domínio. As calculadoras gráficas, da marca TEXAS, permitem obter a representação gráfica das transformações de funções no domínio apropriado ao ser definido o domínio da função original, o que pode ser um contributo para a exploração e compreensão dos conceitos envolvidos. Apesar de nem todas as calculadoras o permitirem, por exemplo, nas calculadoras da marca CASIO é devolvida mensagem de erro ao tentar definir uma função a partir de outra definida num subconjunto de $\mathbb{R}$, esta situação pode ser aproveitada para fortalecer a discussão na sala de aula.

A notação envolvendo transformações de funções, em determinados casos que não as transformações de funções mais trabalhadas na sala de aula, levantou dificuldades a um dos alunos, que mostrou uma tendência para desconsiderar os parêntesis e efetuar uma espécie de linearização. É interessante assinalar que, sendo-lhe pedido para fazer a composição das funções correspondentes, o aluno determinou corretamente a expressão analítica da função composta, o que revela uma compartimentação dos conceitos envolvidos. Esta constatação sugere a importância de se irem revisitando temas, por exemplo, quando é abordado o tópico da composição de funções, as transformações de funções poderão também ser analisadas desse ponto de vista, reforçando o domínio onde a composição é válida. A calculadora gráfica pode ser utilizada flexivelmente, através da comparação da representação gráfica da expressão obtida pelo aluno com a representação correta, já que também permite definir implicitamente uma função a partir de outra, ou definir a função composta a partir de duas funções editadas.

A compartimentação ligada às representações e a tópicos da matemática é uma dificuldade que é também bastante realçada na literatura (Duval, 2006; Gagatsis *et al.*, 2006), sendo identificada nesta investigação. Também aqui a calculadora gráfica pode contribuir para uma "descompartimentação", já que permite trabalhar com múltiplas representações, relacionando conceitos, mesmo que ainda não tenham sido abordados os procedimentos analíticos.

A calculadora gráfica pode ainda ser um importante agente mediador na formulação e teste de conjeturas. Foi possível perceber, em particular na situação de entrevista, alguma tentativa de formular e validar conjeturas, em especial por parte de um dos alunos, contudo, notou-se alguma dificuldade nesse sentido, o que pode ser compreendido tendo em conta o contexto de aprendizagem, uma vez que os momentos para os alunos desenvolverem tarefas de caráter exploratório foram muito limitados ao longo dos dois anos em que decorreu esta investigação.

4. Qual o papel que a calculadora gráfica desempenha na evolução do conceito imagem de função dos alunos ao longo do 10.º e 11.º anos, nomeadamente, em termos da sua capacidade de trabalhar com diferentes representações e de resolver problemas?

No final do ensino básico, o *conceito imagem* (Tall & Vinner, 1981) de função dos alunos envolvia essencialmente alguns exemplos de funções, nomeadamente as funções linear e afim representadas algébrica ou graficamente. Em relação às funções de proporcionalidade inversa, por exemplo, notou-se uma compartimentação das várias representações. O *conceito definição* (Tall & Vinner, 1981) não fazia parte do *conceito imagem* de um dos alunos e o outro não o conseguiu aplicar consistentemente. No que diz respeito à conversão de representações foi possível perceber várias dificuldades. Notou-se também, no início da recolha de dados, que um dos alunos tinha desenvolvido uma visão de função essencialmente operacional, tendo alguma dificuldade em conceber o conceito como um todo.

A calculadora gráfica facilita o desenvolvimento de uma visão orientada para o objeto, essencial para que os alunos possam compreender, por exemplo, operações com funções, já que possibilita a rápida conversão da representação algébrica na gráfica, a qual favorece uma visão estrutural do conceito.

O modo como os alunos vão desenvolvendo o *conceito imagem* de função depende em grande parte das situações matemáticas com que se vão deparando. Este estudo sugere que o *conceito imagem* dos alunos no final do ensino básico é um pouco restrito, o que não surpreende já que as funções com que os alunos trabalham nesse nível de ensino, de um modo geral, também o são. Mesmo que numa fase inicial de introdução do conceito sejam apresentados alguns exemplos diferentes, o trabalho posterior é desenvolvido essencialmente em torno das funções afim e de proporcionalidade inversa.

O contacto com várias classes e tipos de funções, relacionando as várias representações, parece ser essencial para o desenvolvimento de um *conceito imagem* abrangente, de modo a serem evitados conflitos cognitivos quando os alunos são confrontados com funções não familiares. O estudo de famílias de funções relacionando os registos algébrico e gráfico, em particular, focando aspetos relevantes e relacionando-os num e noutro registo, permite o desenvolvimento de um conhecimento relacional, conferindo aos alunos uma maior flexibilidade na altura de efetuar a escolha da representação que melhor lhes permitirá resolver determinado problema ou situação problemática. A calculadora gráfica pode desempenhar um papel essencial nesse sentido, já que permite uma rápida conversão entre representações, possibilitando assim a exploração de um número elevado de casos particulares. Porém, é importante que os alunos compreendam que a generalização a partir de casos particulares deve ser feita com cuidado, relacionando sempre as conclusões com conhecimentos matemáticos que de algum modo as suportem.

O facto de o artefacto se encontrar disponível, facilita uma mudança de registo de representação, permitindo aos alunos utilizarem-no quando pretendem resolver graficamente determinado problema, ou fazer algum tipo de exploração em caso de dificuldade. Mesmo nos casos em que a tarefa impõe uma resolução analítica, o aluno poderá recorrer à representação gráfica e/ou numérica para tentar retirar alguma informação complementar que contribua para um desempenho com sucesso. Curiosamente, nesta investigação, o aluno que usualmente começava por abordar os problemas de forma algébrica, mostrou uma maior tendência para alterar o registo de representação em caso de dificuldade e tentar conjugar a informação proveniente das várias representações, enquanto o outro aluno, após escolher um registo de representação, demonstrou menos flexibilidade em recolher informação das restantes representações disponíveis. Tal como Verschaffel *et al.*, (2009) referem, vários fatores devem ser incorporados num conceito abrangente de flexibilidade/adaptabilidade, nomeadamente, para além das características da tarefa, o contexto e o próprio sujeito.

A ideia da importância do estabelecimento de conexões entre representações é salientada por vários autores (Andrade & Saraiva, 2012; Even 1998; Gagatsis *et al.*, 2006; NCTM, 1991) e é corroborada neste estudo. Em particular nas situações não familiares, a calculadora gráfica desempenha um papel bastante relevante, dada a facilidade com que possibilita a conversão entre os vários registos. É, no entanto, essencial que os alunos compreendam algumas limitações do artefacto, em particular relacionadas com o processo de discretização, para que possam tirar o maior partido das potencialidades dessa ferramenta.

Em termos da resolução de problemas envolvendo funções, a calculadora gráfica poderá também desempenhar um papel relevante, quer numa perspetiva de exploração, quer em termos da obtenção da solução por meio das suas capacidades representacionais. Apesar de os alunos terem demonstrado dificuldades em transformar a calculadora gráfica num instrumento eficaz perante problemas que saíam do âmbito dos que foram trabalhados na sala de aula, foi possível identificar situações que, com algum questionamento da investigadora, conduziram a resoluções com sucesso. Ou seja, o estudo mostrou evidências de que a calculadora gráfica pode ser convertida num instrumento eficiente na resolução de problemas envolvendo funções.

10.3. Reflexão final

10.3.1. Processo de génese instrumental

Em termos do processo de génese instrumental, um dos alunos parece estar num nível superior, conseguindo coordenar melhor a informação das diferentes representações, contudo, ambos revelaram não compreender algumas limitações da calculadora gráfica, particularmente o processo de discretização associado à representação gráfica. O desconhecimento acerca do modo de funcionamento da calculadora influenciou algumas respostas dos alunos, mas foi possível perceber um desenvolvimento no processo de génese instrumental à medida que estes foram resolvendo conflitos entre aquilo que esperavam obter e a informação retirada das várias representações. Este processo foi mais evidente nas entrevistas, nomeadamente em questões envolvendo o estudo de propriedades de funções não familiares, já que na sala de aula a calculadora gráfica foi essencialmente utilizada em determinadas situações tipo, semelhantes ao que é, regra geral, pedido em testes intermédios e exames nacionais, e que envolve resolução de equações e inequações ou a determinação de extremos.

Com as funções não familiares foi possível compreender melhor o modo de integração da calculadora gráfica na atividade, uma vez que, não obtendo aquilo que inicialmente esperavam para o tipo de função, sentiram necessidade de analisar com mais atenção os resultados obtidos. O Diogo começou por abordar as questões graficamente recorrendo ao artefacto, no entanto, a representação gráfica obtida entrou em conflito com o conceito imagem desenvolvido para aquelas funções, o que não lhe permitiu utilizar a calculadora gráfica de modo eficiente, não tendo também mostrado flexibilidade para recorrer à representação algébrica, efetuando o tratamento. O Francisco, por sua vez, começou por abordar as questões analiticamente, e o facto de não obter o que esperava, impeliu-o a efetuar a conversão para a representação gráfica, de modo a poder conjugar a informação proveniente dos dois registos de representação.

Apesar de ambos os alunos terem demonstrado alguma dificuldade na resolução de problemas ligeiramente diferentes dos abordados na sala de aula, o Francisco, com algum questionamento por parte da investigadora, mostrou uma melhor aptidão para converter a calculadora gráfica num instrumento eficiente do que o Diogo.

A principal diferença entre os dois alunos surge ao nível da maior flexibilidade em mudar de representação, observada no caso do Francisco, muito embora, como já foi referido, habitualmente comece por efetuar o tratamento a partir da representação algébrica. Além disso, mostrou alguma predisposição para recorrer ao artefacto numa tentativa de conseguir extrair informação que lhe permitisse resolver determinada situação problemática. Em qualquer dos casos, o recurso à calculadora envolveu fundamentalmente a representação gráfica, não sendo a representação numérica praticamente utilizada.

A análise e reflexão acerca das diferenças evidenciadas pelos dois alunos alvo de estudo de caso, em termos do desenvolvimento do processo de génese instrumental para a calculadora gráfica, no âmbito do trabalho com funções, suscitaram-me a identificação de alguns níveis de desenvolvimento neste processo. Assim, tendo em conta o conhecimento respeitante ao modo de funcionamento da máquina, a capacidade de converter o artefacto num instrumento eficaz na atividade matemática com funções, e a fluência e flexibilidade representacionais neste tema, pareceu-me possível definir alguns níveis de modo a conseguir diferenciar os alunos no que diz respeito ao processo de génese instrumental. A Tabela 21 apresenta os descritores de cada um dos quatro níveis considerados. Estes níveis não são rígidos, podendo o aluno estar num nível perante uma situação matemática e noutro nível perante outra situação diferente, dependendo do grau de ativação cognitivo da tarefa, no entanto, tal escala poderá contribuir para caracterizar globalmente o nível a que o aluno se encontra no processo de génese instrumental, relativo à calculadora gráfica (CG).

Tabela 21 – Níveis de desenvolvimento em termos do processo de génese instrumental.

Nível I	O aluno não tem ideia clara do funcionamento da CG, no entanto, consegue utilizar algumas funcionalidades em situações *standard*, recorrendo usualmente a uma única representação, sem tentativa de estabelecimento de conexões com outras representações
Nível II	O aluno tem uma ideia vaga acerca do funcionamento da CG. Sabe, por exemplo, que necessita encontrar uma janela de visualização que lhe

	permita compreender as principais caraterísticas da representação gráfica de uma função, tentando relacionar essa representação com outras. Utiliza algumas funcionalidades de modo eficaz, conseguindo compreender procedimentos alternativos como, por exemplo, determinar os zeros de uma função ou a intersecção do gráfico com o eixo das abcissas. Nem sempre consegue converter a CG num instrumento eficaz devido a falta de conhecimentos matemáticos, lacunas no conhecimento ou falhas relativas ao domínio técnico do artefacto.
Nível III	O aluno recolhe informação proveniente de várias fontes (papel e lápis, CG, ou outras) estabelecendo conexões entre várias representações. Consegue utilizar procedimentos alternativos e compreender a sua equivalência em vários registos. Utiliza os esquemas de utilização desenvolvidos em sala de aula e, quando necessário, consegue adaptá-los a novas situações. Utiliza a CG não apenas para procedimentos usuais mas também como instrumento que permite testar conjeturas ou explorar situações problemáticas.
Nível IV	O aluno desenvolve esquemas de utilização que vão além dos que foram abordados em sala de aula. Conjuga a informação proveniente de várias fontes (papel e lápis, CG, ou outras) e em vários registos de representação. Consegue compreender e explicar as principais limitações da CG dominando alguns aspetos técnicos. Consegue utilizar flexivelmente várias funcionalidades da CG, no âmbito do trabalho com as funções, nomeadamente na resolução de problemas.

Esta classificação poderá ser útil para o professor em termos da gestão curricular (Ponte, 2005) ou, por outras palavras, tendo em atenção os vários instrumentos que são desenvolvidos na sala de aula de Matemática, em termos da *orquestração instrumental* (Drijvers & Trouche, 2008) a implementar. A análise do nível em que o aluno se encontra no processo de génese instrumental poderá contribuir para a definição de objetivos tendo em vista o seu desenvolvimento. Nesse sentido, esta classificação poderá trazer algum contributo quer para investigações futuras, quer para a prática profissional.

10.3.2. Reflexão pessoal

A apropriação do artefacto calculadora gráfica num instrumento vai acontecendo à medida que os alunos o vão integrando na atividade e será tanto mais eficaz quanto mais diversificadas forem as situações matemáticas com que estes se vão confrontando. O tipo de ensino e o modo como a calculadora gráfica é utilizada na sala de aula acaba por influenciar a forma como os alunos a usam a nível individual, mas existem outros fatores a ter em conta, como os conhecimentos matemáticos que possuem ou são evocados em determinado momento, e até o próprio método de trabalho. Este estudo veio mostrar que, mesmo num ambiente em que as normas para a utilização da calculadora gráfica são algo rígidas e bastante definidas, os alunos podem utilizá-la de um maneira muito mais rica, nomeadamente através da exploração de casos mais simples ou semelhantes, que lhes permitam tirar conclusões sobre a situação problemática que têm em mãos.

Permitir aos alunos explorar, refletir e relacionar conhecimentos em situações não familiares parece ter um enorme potencial para, por um lado, desenvolver esquemas de utilização respeitantes aos artefactos disponíveis, como é o caso da calculadora gráfica, e, por outro lado, desenvolver o próprio conhecimento conceptual. Além disso, fornecer oportunidades para os alunos explorarem situações problemáticas e relacionarem conhecimentos pode contribuir para o desenvolvimento do hábito de "olhar os símbolos" (Arcavi, 2006), não embarcando de imediato num processo de resolução que é "dado" nas aulas, e que é memorizado, por vezes sem compreensão.

Partilhando da convicção que os objetivos educacionais são mais amplos do que o desenvolvimento, a curto prazo, de competências de rotina, e que devem incluir "flexibilidade de estratégias; boa compreensão dos conceitos e princípios matemáticos; capacidade de reconhecimento de padrões; e crenças, atitudes e emoções apropriadas em relação à matemática" (Verschaffel *et al.*, 2009, p. 346), considero que a calculadora gráfica poderá ser utilizada numa abordagem educacional que envolva mais do que problemas rotineiros, contribuindo para o desenvolvimento desses objetivos. Parece-me inclusive que este artefacto poderia ser introduzido no ensino da matemática no terceiro ciclo, no âmbito do estudo das funções, facilitando o desenvolvimento de alguns esquemas de utilização antes do acesso ao ensino secundário e ampliando o *conceito* *imagem* de função. O estudo de Bardini *et al.* (2004) mostra que a integração desse artefacto nesse nível de ensino é possível e tem resultados positivos.

A integração da calculadora gráfica no ensino da matemática, na minha perspetiva, pode contribuir acima de tudo para o desenvolvimento de um conhecimento relacional, não tendo que conduzir a uma diminuição em termos da capacidade de cálculo algébrico, pelo menos no que diz respeito aos cálculos essenciais e necessários para uma compreensão dos conceitos. No entanto, também considero que persistir na manipulação de elaborados cálculos algébricos, quando existe a possibilidade de obter rapidamente resultados que, de outro modo, seriam obtidos através de cálculos fastidiosos, pode contribuir para o afastamento de alguns alunos em relação à matemática. Algumas vozes críticas relativas à integração da calculadora gráfica no ensino referem a dependência que pode ser criada em relação à máquina, no entanto, hoje em dia estamos cada vez mais dependentes do uso das mais diversas tecnologias na nossa vida diária e poucos de nós as dispensaríamos. Além disso, como foi possível perceber nesta investigação, uma utilização eficaz da calculadora gráfica não se consegue de forma acrítica, sendo necessário, por um lado compreender as limitações e constrangimentos do artefacto, e, por outro lado, recorrer à matemática para interpretar e conjugar a informação recolhida. Ou seja, mesmo recorrendo ao artefacto, a matemática não pode ser relegada para segundo plano.

Em relação ao meu desenvolvimento pessoal ao longo do desafio que foi a implementação deste estudo, posso por exemplo referir que fui compreendendo melhor o papel que deveria assumir enquanto investigadora, embora, pelo menos numa fase inicial da recolha de dados, o questionamento feito nas entrevistas revelasse mais a identidade professora. Simultaneamente, o papel de investigadora permitiu-me tomar consciência que, na minha atividade profissional também existem momentos em que posso assumir essa identidade com o objetivo de compreender melhor o modo de pensar dos meus alunos. A reflexão sobre as várias perspetivas analisadas no enquadramento teórico, e a análise e reflexão acerca dos resultados empíricos obtidos nesta investigação, contribuíram para estar mais atenta às questões da apropriação do artefacto calculadora gráfica e às dificuldades evidenciadas pelos alunos.

Esta investigação realizou-se num ambiente predominantemente naturalista, apesar de a recolha de dados também envolver a situação de entrevistas com os alunos. Não se põe assim o problema da *validade ecológica*, de certas experiências de ensino, em que o tempo e a atenção dedicados ao tema acabam por ser muito maiores do que usualmente seriam. No entanto, uma futura investigação, que me parecia ser interessante, seria a condução de um estudo, abordando a mesma problemática, mas em que o professor dedicasse uma maior atenção às questões de apropriação da calculadora gráfica por parte dos alunos, e que recorresse a esse artefacto com maior regularidade, propondo tarefas de natureza mais aberta e com cunho mais exploratório. Nesse caso, exigir-se-ia ao professor um interesse intrínseco por esta questão da apropriação dos artefactos, sendo talvez necessário uma maior interação entre o investigador e o professor, em termos da escolha das tarefas a propor aos alunos, proporcionando assim um maior conhecimento teórico acerca da questão da apropriação deste artefacto.

Em termos de outras sugestões para futuros estudos, parece-me também importante compreender a questão da apropriação da calculadora gráfica noutro tópico da matemática, por exemplo, a Estatística, tema em que a calculadora gráfica é também frequentemente utilizada. Poder-se-ia tentar perceber se a apropriação do artefacto pelo aluno, e a consequente construção de instrumentos, é influenciada pelo tema matemático relativamente ao qual o artefacto está a ser utilizado. E, atendendo à emergência de cada vez mais artefactos tecnológicos nas nossas vidas, que mais tarde ou mais cedo terão que ter entrada nas salas de aula das nossas escolas, devíamos já começar a pensar na questão da génese instrumental para outros artefactos que poderão contribuir para potenciar o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Referências

Abu-Naja, M. (2008). The effect of graphic calculators on Negev Arab pupils' learning of the concept of families of functions. *Research in Mathematics Education, 10 (2)*, 183-202.

Adler, P. A., & Adler, P. (1994). Observational techniques. In N. K. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 377-392). Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16 (3)*, 183-198.

Albuquerque, R. P. (1998). Opinião - cartas ao Diretor. *Boletim da SPM, 38*, 139-144.

Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica. *Quadrante, XVIII (1,2)*, 87-118.

Andrade, J., & Saraiva, M. (2012). Múltiplas representações: Um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15 (2)*, 137-169.

Andrade, M. J. (2007). *A calculadora gráfica na prática profissional de professores do ensino secundário: Três estudos de caso* (Tese de Mestrado não-publicada ed.). Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Angrosino, M. V. (2005). Recontextualizing observation: Ethnography, pedagogy, and the prospects for a progressive political agenda. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 729-745). Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

APM (1985). *Agenda para a Acção: Recomendações para o ensino da matemática nos anos 80.* Lisboa: APM.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Artigue, M. (2002a). *Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching.* Obtido em 28 de Dezembro de 2008, de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/.

Artigue, M. (2002b). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7 (3)*, 245-274.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33 (3)*, 301-317.

Bagni, G. T. (2005). Functions: Processes, properties, objects. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 42 (2)*, 205-230.

Bardini, C., Pierce, R. U., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphics calculators: Students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2 (3)*, 353-376.

Berry, J., & Graham, T. (2005). On high-school students' use of graphic calculators in mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 37 (3)*, 140-148.

Blanck, G. (1996). Vygotsky: O homem e a sua causa. In L. C. Moll (Ed.), *Vygotsky e a Educação* (F. A. Tesseler, Trad., pp. 31-55). Porto Alegre: Artes Médicas.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Borba, M., & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functios in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics, 31*, 319-337.

Burril, G. (2005). *Teaching and learning mathematics using handheld graphing technology*. Obtido de http://www.icme-organisers.dk/tsg15/Burrill.pdf.

Burril, G. (2008). *The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics.* Obtido em Dezembro de 2009, de http://tsg.icme11.org/tsg/show/23.

Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: Research findings and implications for classroom practice.* Obtido de http://ti-researchlibrary.com/Lists/TI%20Education%20Technology%20%20Research%20Library/Attachments/122/GC%20in%20secondary%20math%20-%20research%20findings%20and%20implications%20-%20Burrill%202002%20-%20(yellow%20book)%20CL2872,%20review.pdf.

Bussi, M., & Mariotti, M. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective*. Obtido em 2013, de http://www.dm.unito.it/semdidattica/2010/2008_BarMarFer.pdf.

Cardoso, A. P. (2003). *A receptividade à mudança e à inovação pedagógica: O professor e o contexto escolar*. Porto: ASA.

Carvalho, C. (2006). *A calculadora gráfica na trigonometria do 11.º ano: Uma análise de manuais escolares de matemática* (Tese de Mestrado não-publicada ed.). Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Cavanagh, M. (2006). *Enhancing teachers' knowledge of students' thinking: The case of graphics calculators graphs.* Obtido em 20 de Julho de 2008, de http://www.educ.mq.edu.au/staff_bio.aspx?sid=292.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: Teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development, 5*, 3-18.

Chinnappan, M., & Thomas, M. (2003). Teachers' function shemes and their role in modelling. *Mathematics Education Research Journal, 15 (2)*, 151-170.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education.* London and New York: Routledge/Falmer.

Consciência, M. M. (2003). Calculadoras gráficas: Algumas limitações. *Gazeta da Matemática, 145*, 34-42.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2009). *Espaço prático: Matemática 9.º ano.* Porto: Porto Editora.

Costa, B., Resende, L., & Rodrigues, E. (2004). *Espaço 11*. Porto: Edições ASA.

Damásio, A. (2008). *O Sentimento de Si.* Publicações Europa-América.

Damásio, A. (2011). *O erro de Descartes.* Lisboa: Círculo de leitores.

Davis, J. D. (2007). Real-word contexts, multiple representations, student-invented terminology, and y-intercept. *Mathematical Thinking and Learning, 9 (4)*, 387-418.

DeMarois, P., & Tall, D. O. (1996). Facets and layers of the function concept. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of PME 20* (Vol. 2, pp. 297-309). Valencia, Spain: PME.

DES (2001). *Programa de Matemática A, 10.º ano.* Lisboa: ME, Departamento do Ensino secundário.

Dick, T. P., & Edwards, B. S. (2008). Multiple representations and local linearity. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (Vol. 2, pp. 255-275). New York: NCTM & Information Age Publishing, Inc.

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41 (2)*, 143-163.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no ínicio do superior.* (Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa).

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Heuvel-Panhuizen, M., Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*, 405-418.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5 (3)*, 189-209.

Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 15 (4)*, 425-440.

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as instrument: Examples of algebraic schemes. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculator: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 163-196). New York: Springer.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of*

Mathematics: Cases and Perspectives (Vol. 2, pp. 363 - 448). New York: NCTM & Information Age Publishing, Inc.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Gisbergen, S. V., & Reed, H. (2009). Teachers using technology: Orchestrations and profiles. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of PME 33* (Vol. 2, pp. 481-488). Thessaloniki, Greece: PME.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations . In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, pp. 45-68). Providence, RI: American Mathematical Society.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14 (1)*, 133-156.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). London: MacMillan Publishing Company.

Estrela, A. (1994). *Teoria e prática de observação de classes: Uma estratégia de formação de professores.* Porto: Porto Editora.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (1)*, 105-121.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66 (3)*, 317-333.

Finzer, W. (2012). Data games - students learning mathematics through data modeling of video game play in a web application data analysis environment. In *The 12th International Congress on Mathematical Education, TSG 19* (pp. 3805-3812). Seoul, Korea.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: Percursos teóricos e metodológicos.* Campinas, S.P.: Autores Associados.

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica.* Lisboa: Monitor.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). A review os some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece. In M. Bosh (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (pp. 102-111). Sant Feliu de Guixols, Spain.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes compartimentalized in students' thinking. *Revista Latinoamericana de Investigatión en Matemática Educativa, Número especial*, 197-224.

Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces, 36*, 217-223.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Second ed., pp. 176-201). New York and London: Routledge.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (2)*, 137-165.

Graham, A. T., Pfannkuch, M., & Thomas, M. O. (2009). Versatile thinking and the learning of statistical concepts. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 41*, 681-695.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2)*, 115-141.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of sucess and failure in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME 25* (Vol. 3, pp. 65-72). Utrecht, Netherlands: PME.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (Tese de Doutoramento não-publicada). Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3 (3)*, 195-227.

Harskamp, E., Suhre, C., & Streun, A. (2000). The graphics calculator and students' solution strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12 (1)*, 37-52.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Algebra and function development. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Research Syntheses* (Vol. 1, pp. 55-108). New York: NCTM & Information Age Publishing, Inc.

Heid, M. K., Blume, G. W., Zbiek, R. M., & Edwards, B. S. (1999). Factors that influence teachers learning to do interviews to understand students mathematical understandings. *Educational Studies in Mathematics, 37 (3)*, 223-249.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 41*, 535-540.

Hennessy, S., Fung, P., & Scanlon, E. (2001). The role of the graphic calculator in mediating graphing activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32 (2)*, 267-290.

Herman, M. (2007). What students choose to do and have to say about use of multiple representations in college algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26 (1)*, 27-54.

Hershkowitz, R., & Kieran, C. (2001). Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: An experience with graphing calculators. In M. V. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME 25* (Vol. 1, pp. 96-107). Utrecht, The Netherlands: PME.

Hershkowitz, R., & Kieran, C. (2003). *Potential and pitfalls of joining together computer artifacts (representatives) towards a construction of meaning in secondary school algebra.* Obtido em 20 de Julho de 2008, de http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (1)*, 123-134.

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6), WG7,* pp. 227-236. Lyon, France.

Hollar, J. C., & Norwood, K. (1999). The effects of a graphing-approach intermediate algebra curriculum on students' understanding of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 30 (2)*, 220-226.

Hunter, J. (2011). *The effects of graphing calculator use on high-school students' reasoning in integral calculus.* PhD thesis (University of New Orleans Theses and Dissertations. Paper 1346).

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practices. *Journal of Mathematical Behavior, 16 (2)*, 145-165.

Igea, D. R., Agustín, J. A., Beltrán, A. L., & Martín, A. S. (1995). *Tecnicas de investigacion en ciencias sociales.* Madrid: Dykinson.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (1)*, 79-103.

Jesberg, J., & Ludwig, M. (2012). MathCityMap - Make mathematical experiences in out-of-school activities using mobile technology. In *The 12th International Congress on Mathematical Education, TSG 19* (pp. 3831-3838). Seoul, Korea.

Jones, M. (2006). *Demystifying functions:The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function.* Obtido em 15 de Junho de 2011, de http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2006/vol7-n2/paper5/v7n2-5pd.pdf.

Jorge, A. M., Alves, C. B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (2007). *+ Infinito 10 A* (Vol. 2). Perafita: Areal Editores.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies.* Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Jorgensen, R., & Lowrie, T. (2012). Digital game and mathematics learning: A summary paper. In *The 12th International Congress on Mathematical Education, TSG 19* (pp. 3839-3847). Seoul, Korea.

Kendal, M., & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 143-165.

Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: The complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics, 69 (3)*, 197-216.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11 (2),* 205-263.

Kilpatrick, J. (1999). Investigação em educação matemática e desenvolvimento curricular em Portugal: 1986-1996. In Pires, Morais, Ponte, Fernandes, Leitão, & Serrazina (Eds.), *Caminhos para a Investigação em Educação Matemática em Portugal* (pp. 9-25). Bragança: SPCE.

Kissane, B. (1995). The importance of being accessible: The graphics calculators in mathematics education. In H. K. Fong (Ed.), *Proceedings of the First Asian Technology Conference on Mathematics, Singapore* (pp. 161-170). Singapore: Association of Mathematics Educators.

Kissane, B., & Kemp, M. (2008). Some calculus affordances of a graphics calculator. *Australian Senior Mathematics Journal, 22 (2),* 15-26.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: a brief survey. *The College Mathematics Journal, 20 (4),* 282-300.

Kozma, R. (2003). The material features of multiple representations and their cognitive and social affordances for science understanding. *Learning and Instruction, 13,* 205-226.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leontiev, A. N. (1979). The problem of activity in Psychology. In J. V. wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (J. V. Wertsch, Trad., pp. 37-71). Armonk, New York: M. E. Sharpe, Inc.

Leontiev, A. N. (1981). *The Development of Mind* . Obtido de http://www.marxists.org/archive/leontev/index.htm.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas.* Lisboa: Intituto Piaget.

Lobato, G. (1991). Novos programas de Matemática no ensino básico e secundário - que mudança? *Educação e Matemática, 19/20,* 3-6.

Long, M., & Ben-Hur, M. (1991). Informing learning through the clinical interview. *Arithmetic Teacher, 38 (6),* 157-167.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitatvas.* São Paulo: EPU.

Marshall, C., & Rossman, G. B. (2006). *Designing qualitative research.* Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Matos, J. F. (2004). *Aprender matemática hoje: A educação matemática como fenómeno emergente.* Realmat - Encontro regional da Associação de Professores de Matemática, Vila Real.

McCulloch, A., & Keene, K. (2013). What to trust: Reconciling mathematical work done by hand with conflicting graphing calculator solutions. *School Science and Mathematics, 113 (4),* 201-210.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Mesa, V. (2008). Solving problems on functions: Role of the graphing calculator. *PNA, 2 (3),* 109-135.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis.* London: Sage Publications.

Monaghan, J., & Ozmantar, M. F. (2006). Abstraction and consolidation. *Educational Studies in Mathematics, 62 (3),* 233-258.

Monoyiou , A., Deliyianni, E., Gagatsis, A., & Philippou, A. (2010). Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 10,* 51-67.

Mourão, A. P. (2002). *A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções.* Obtido em 2008, de http://www.spce.org.pt/sem/18paula-mourão.pdf.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemáica escolar.* Lisboa: APM.

Nistal, A. A., Dooren, W. V., & Verschaffel, L. (2012). Students' reported justifications for their representational choices in linear function problems: An interview study. *Educational Studies,* 1-14.

Ocak, M. A. (2008). The effect of using graphing calculators in complex functions graphs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4 (4),* 337-346.

Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de matemática. *Actas do SIEM VII* (pp. 3-23). Lisboa: APM.

Patterson, N. D., & Norwood, K. S. (2004). A case study of teacher beliefs on students' beliefs about multiple representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2 (1),* 5-23.

Pierce, R., Stacey, K., Wander, R., & Ball, L. (2011). The design of lessons using mathematics analysis software to support multiple representations in secondary school mathematics. *Technology, Pedagogy and Education, 20 (1),* 95-112.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3 (2),* 3-8.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3 (1),* 3-18.

Ponte, J. P. (2003). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* Obtido em 2008, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(CNE).pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, A. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário.

Quesada, A., & Maxwell, M. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 205-215.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), *Actes de la dixième université d'éte de didactique des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Caen: ARDM.

Rabardel, P. (2002). *People and technology: A cognitive approach to contemporary instruments.* Obtido em 10 de Novembro de 2008, de http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/.

Ramalho, G. (2002). *Contributo para uma melhor compreensão do desempenho dos alunos no exame do 12º ano.* Lisboa: GAVE, ME.

Rivera, F. D. (2007). Accounting for students' schemes in the development of a graphical process for solving polynomial inequalities in instrumented activity. *Educational Studies in Mathematics, 65 (3)*, 281-307.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2001). Calculadoras gráficas: Que utilização? In L. Serrazina, & I. Oliveira (Ed.), *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 233-251). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2012). *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: Estudo sobre as práticas curriculares de professores do ensino secundário.* (Tese de Doutoramento, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa).

Rogers, Y., & Scaife, M. (1997). *Activity Theory.* University of Sussex: COGS.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 431-450.

Ruthven, K. (2002). Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7 (3)*, 275-291.

Ruthven, K., Deaney, R., & Hennessy, S. (2009). Using graphing software to teach about algebraic forms: A study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 279-297.

Sajka, M. (2003). A secondary school students' understanding of the concept of function - A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53 (3)*, 229-254.

Santos, L., Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2000). O currículo de Matemática: Que problemas? Que mudanças? *Actas do Profmat 2000.* Lisboa: APM.

Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in education and social sciences.* New York and London: Teachers College, Columbia University.

Semião, M. J. (2007). *A utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática: Um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das funções* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Seufert, T., Janen, I., & Brunken, R. (2006). The impact of intrinsic cognitive load on the effectiveness of graphical help for coherence formation. *Computers in Human Behavior, 23*, 1055-1071.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22 (1)*, 1-36.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33 (3)*, 259-281.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stewart, S., & Thomas, M. (2009). A framework for mathematical thinking: The case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40 (7)*, 951-961.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 125-147.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12 (2)*, 151-169.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18 (2)*, 223-241.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997a). *Funções 10.º ano.* Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997b). *Funções 11.º ano.* Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário.

Thomas, M., Wilson, A., Corballis, M., Lim, V., & Yoon, C. (2010). Evidence from cognitive neuroscience for the role of graphical and algebraic representations in understanding function. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 42*, 607-619.

Trouche, L. (2003). From artifact to instrument: Mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with Computers, 15 (6)*, 783-800.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9 (3)*, 281-307.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculator: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 137-162). New York: Springer.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 42*, 667-681.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (2)*, 167-181.

Vergnaud, G. (2007). En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede aydarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em Ensino das Ciências, 12 (2)*, 285-302.

Vérillon, P., & Andreucci, C. (2005). *Artefacts and cognitive development: How do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments on the development of thought?* Obtido de http://www.iteaconnect.org/Conference/PATT/PATT15/PATT15.htm.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefact: A contribution to the study of tought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education, 9 (3)*, 77-101.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, XXIV, 3*, 335-359.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14 (3)*, 293-305.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher Psychological Process.* Cambrigde, Massachusetts: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1979a). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (J. V. Wertsch, Trad., pp. 144-188). Armonk, New York: M. E. Sharpe, Inc.

Vygotsky, L. S. (1979b). The instrumental method in Psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (J. V. Wertsch, Trad., pp. 134-143). Armonk, New York: M. E. Sharpe, Inc.

Weigand, H., & Bichler, E. (2009). The long term project "Integration of symbolic calculator in mathematics lessons" - The case of calculus. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6), WG7*, pp. 451-460. Lyon, France.

Weisstein, E. W. (1999). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.* Boca Raton, London, New York, Washington, D. C.: Chapman & Hall/CRC.

Wengraf, T. (2001). *Qualitative research interviewing.* London, Thousand Oaks and New Delhi: Sage Publications.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentations and design in the technology-rich learning environments. *International Journal for Computers and Mathematical Learning, 13 (1)*, 1-26.

Willoughby, S. (2000). Functions from kindergarten through sixth grade. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 197-201). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yerushalmy, M. (2012). Designing a setting for mobile mathematical inquiry. In *The 12th International Congress on Mathematical Education, TSG 19* (pp. 4008-4014). Seoul, Korea.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods.* London: Sage Publications.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49 (1)*, 119-140.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: obstacles, intuitions, and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 437-450.

Zbiek, R. M., & Hollebrands, K. (2008). A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by in-service and prospective teachers. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematic: Research Syntheses* (Vol. 1, pp. 287-342). New York: NCTM & Information Age Publishing, Inc.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1202). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Anexos

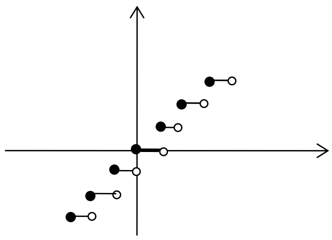
Anexo 1

Entrevista 1 – 10.º ano

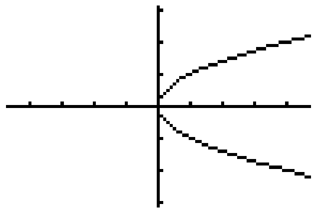
Entrevista 1
(Tarefa 1)

1. Observe as seguintes representações gráficas.

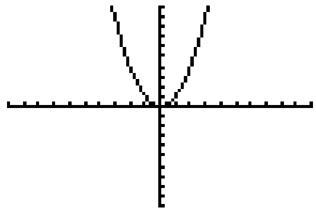
i)



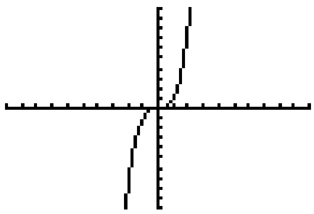
ii)



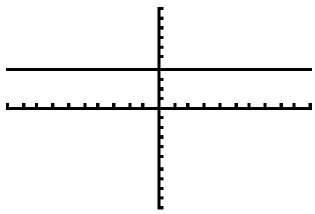
iii)



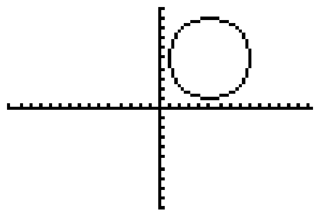
iv)



v)



vi)



Quais destas representam funções? Justifique.

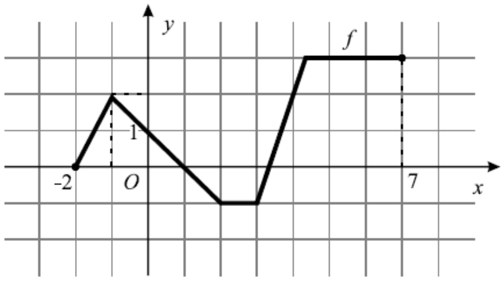
2. Considere as seguintes relações, onde $x \in \mathbb{R}$:

i) $x = y$ ii) $x^2 + y^2 = 9$ iii) $yx = 3$

iv) $2x + 3 = 0$ v) $2x - 3y = 4$ vi) $y^2 = x$

Quais destas representam funções? Justifique.

3. Na figura está representado o gráfico de uma função *f*, de domínio $[-2,7]$.



3.1. Qual é o contradomínio de *f*?

3.2. Indique $f(0)$ e $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

3.3. A proposição $f(5)=f(7)$ é verdadeira ou falsa?

3.4. Qual é o valor de $f\left(f(0)\right)$?

3.5. Indique o conjunto solução das seguintes condições:

3.5.1. $f(x)=-3$;

3.5.2. $f(x)+1=0$;

3.5.3. $f(x)<2$.

Adaptado do Teste Intermédio do 10.º ano
Janeiro 2009

4. O Diretor de Marketing de uma empresa decidiu colocar à venda leitores de *Blu-ray*. Depois de alguns estudos verificou que se colocasse à venda ao preço de custo conseguiria vender 100 unidades por semana, mas não teria qualquer lucro. Aumentando o preço conseguiria lucro mas o número de aparelhos vendidos diminuía. Quanto maior for o preço menos aparelhos vende e, se este for 100 € superior ao preço de custo já não consegue vender nenhum aparelho. Os resultados do estudo que o Diretor de Marketing efetuou estão representados na tabela seguinte:

Lucro por *Blu-ray* (€)	0	10	40	60	80	100
Número de aparelhos vendidos (por semana)	100	90	60	40	20	0

4.1. Complete a tabela:

Lucro por *Blu-ray* (€)	0	10	40	60	80	100
Número de aparelhos vendidos (por semana)	100	90	60	40	20	0
Lucro Total em *Blu-rays* (€ /semana)						

4.2. Investigue qual deve ser a margem de lucro por *Blu-ray* que o Diretor de Marketing deve escolher.

4.3. Suponha agora que o lucro por cada leitor é *L*. Escreva uma expressão analítica para as funções *f* e *g* que relacionam, respetivamente:

- O número de aparelhos vendidos por semana em função de *L*;
- O lucro total, obtido em *Blu-rays* por semana, em função de *L*.

Adaptado de Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1997a)

5. Considere todos os triângulos retângulos com 15 cm^2 de área, em que os catetos são representados por c_1 e c_2 e os seus comprimentos são dados em centímetros. Seja *g* a função que relaciona os comprimentos dos catetos.

5.1. Justifique que *g* é uma função de proporcionalidade inversa e indique o que representa a constante de proporcionalidade no contexto da situação apresentada.

5.2. Indique as coordenadas de dois pontos pertencentes ao gráfico da função.

5.3. Represente graficamente a função *g*.

5.4. Determine o perímetro do triângulo em que $c_1 = 7,5$.

Adaptado de Costa e Rodrigues (2009)

Anexo 2

Entrevista 2 – 10.º ano

Entrevista 2
(Tarefa 2)

1. Classificações Corrigidas

Um aluno regressou a casa e contou aos pais que a professora de Matemática estava descontente com as classificações dos alunos da sua turma no teste sobre funções mas que esta, considerando que talvez isso se devesse à dificuldade das questões, decidiu "ajustar" as classificações usando um fator de correção, procedendo do seguinte modo: Sendo x a classificação original (0-200 pontos), o aluno passaria a ter a classificação de $20\sqrt{\frac{1}{2}x}$.

1.1. Qual a classificação corrigida de um aluno que obteve inicialmente 162 pontos?

1.2. Aplicando este fator de correção, todas as classificações aumentam? Porquê?

1.3. Há alunos que não sejam afetados pela correção?

1.4. Qual é a classificação que recebe um aumento maior?

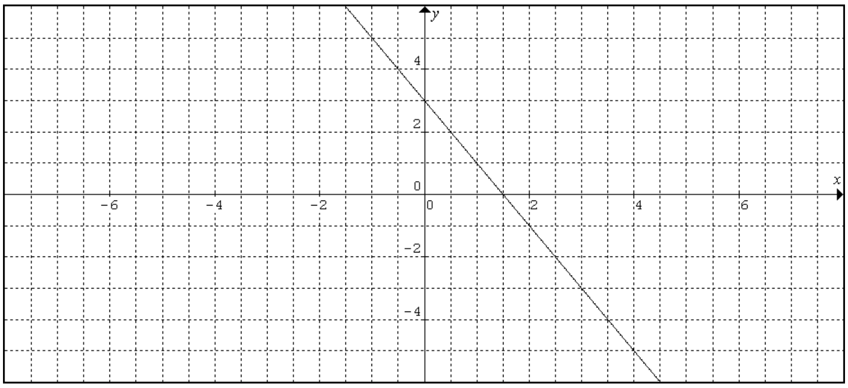
1.5. Considera que este é um fator de correção justo? Justifique.

1.6. Compare este fator com outros, por exemplo, um aumento de 20 pontos na classificação inicial. E se o aumento for de 20%?

Adaptado de Arcavi (2006)

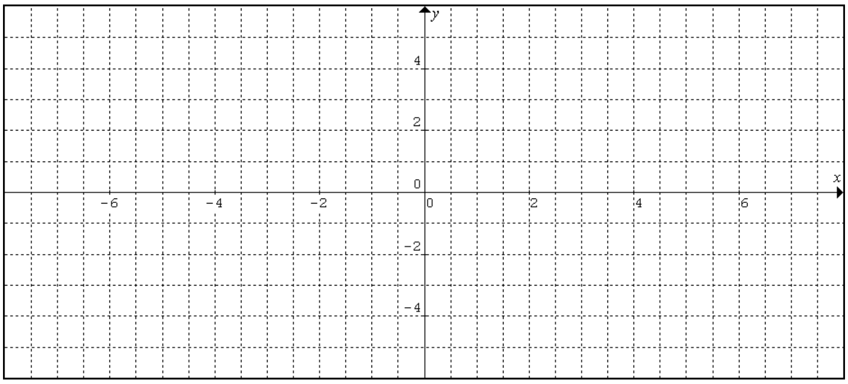
2. Às Voltas com o Módulo

2.1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente no referencial abaixo

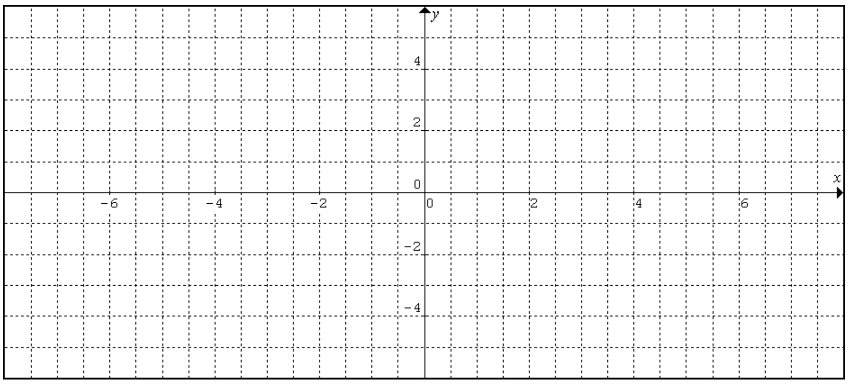


Represente graficamente as funções definidas por:

2.1.1. $h(x) = |\, g(x) \,|$;



2.1.2. $i(x) = g\left(|\, x \,|\right)$.



2.2. Três amigos estão a conversar sobre como é que o gráfico de $f(|x|)$ pode ser obtido através do gráfico de *f*, sendo *f* uma função afim.

A **Ana** diz: “o gráfico de $f(|x|)$ deve estar acima do eixo Ox. Para obter o gráfico de $f(|x|)$, precisamos de efetuar uma simetria dos valores negativos de $f(x)$ em relação ao eixo das abcissas, porque esta função envolve o módulo que faz com que cada valor $f(x)$ negativo fique positivo e os valores positivos têm que estar acima do eixo Ox”.

O **Francisco** discorda e afirma: “Não existe diferença entre os gráficos de $f(x)$ e de $f(|x|)$ para os valores de *x* positivos mas não podemos dizer nada para os valores de *x* negativos, pois dependem da equação $f(x)$”.

O **João** não concorda com nenhum e argumenta: “Para obter o gráfico de $f(|x|)$, não devemos mudar a parte do gráfico de $f(x)$ para valores negativos de *x* e, simultaneamente, devemos fazer uma simetria dessa parte relativamente ao eixo Oy”.

Como é possível verificar os três amigos estão com alguma dificuldade acerca do gráfico de $f(|x|)$. O que pode dizer acerca das afirmações e explicações de cada um deles? Como é que os convencia de que a sua sugestão é correta?

Adaptado de Monaghan e Ozmantar (2006)

Anexo 3

Entrevista 3 – 10.º ano

Entrevista 3
(Tarefa 3)

1. Considere a função, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \left| x^2 + 50x - 80 \right|$.

1.2. Represente-a graficamente.

1.3. Indique o domínio, contradomínio, zeros e monotonia da função *f*.

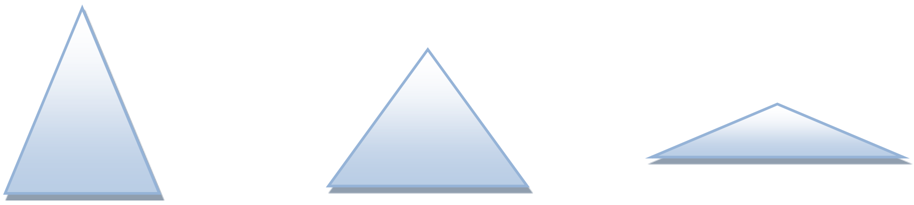
2. Substituindo x por 1 na expressão $ax^2 + bx + c$ (sendo *a*, *b*, e *c* números reais, com $a \neq 0$) obtemos um número negativo e substituindo por 5 dá um número positivo.

2.2. Quantas soluções reais tem a equação $ax^2 + bx + c = 0$? Explique o seu raciocínio.

2.3. Dê um exemplo de uma função que satisfaça as condições enunciadas.

Adaptado de Even (1998)

3. Considere todos os triângulos isósceles com 50 cm de perímetro.



3.1. Escreva a medida do lado diferente em função da medida de qualquer um dos lados iguais *x*.

3.2. Entre que valores varia o lado diferente? E os lados iguais?

3.3. Quais são as medidas do triângulo de área máxima? Interprete geometricamente.

Adaptado de Teixeira *et al.* (1997a)

Anexo 4

Entrevista 4 – 10.º ano

Entrevista 4
(Tarefa 4)

Parte Individual

1. Considere o polinómio $p(x) = x^3 - 16x^2 - 2037x - 5940$.

1.1. Represente-o graficamente.

1.2. Indique dois valores possíveis para *k*, de sinais contrários, de modo que $p(x) + k$ tenha apenas um zero.

1.3. Indique o número de soluções da equação $p(x) = -5940$ e determine-as com erro inferior a uma milésima.

1.4. Determine o conjunto dos números reais que são solução da inequação $p\left(x+7\right)\cdot\left(100-x^2\right) \leq 0$.

Parte Conjunta

1. Considere a seguinte família de funções $y = x^2 + bx + 1$.

1.1. Estude a influência do parâmetro b nas representações gráficas dos elementos da família.

1.2. Dê especial atenção aos vértices das parábolas representativas de elementos daquela família. Se os unisse que tipo de curva esperaria obter?

1.3. Efectue uma conjectura sobre a equação da curva que contém os vértices das parábolas que representam os elementos daquela família de funções. Justifique a sua conjectura.

2. Considere as seguintes funções polinomiais

$f(x) = -(x+2)^2(x-1)$; $\quad g(x) = (x-2)^2(x+3)^2$; $\quad m(x) = -(x-2)^3(x+1)$;

$n(x) = \left(x^2+2\right)\left(x+1\right)^2(x-2)$.

Sem recorrer à calculadora gráfica e sem efetuar cálculos faça um esboço da forma do gráfico de cada uma, indicando os zeros e o grau. Confirme a sua previsão recorrendo à máquina e, caso não tenha acertado, volte a tentar. Registe cada tentativa procurando encontrar uma explicação.

3. As seguintes representações gráficas correspondem a funções polinomiais de grau inferior a seis cujos coeficientes são todos números inteiros. Indique uma expressão analítica que possa corresponder a cada uma delas. Explique em cada caso o seu raciocínio, registando cada tentativa e procurando encontrar uma justificação caso a representação gráfica não coincida.

Anexo 5

Entrevista 5 – 11.º ano

Entrevista 5
(Tarefa 5)

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \text{sen}\, x$.

1.1. Determine uma expressão geral dos zeros, dos maximizantes e dos minimizantes de *f*.

1.2. Escreva, justificando, uma expressão geral:

1.2.1. dos zeros da função $g(x) = f(x-1)$;

1.2.2. dos maximizantes e minimizantes da função $h(x) = -f(x) + 3$.

1.3. Considere as famílias de funções definidas por:

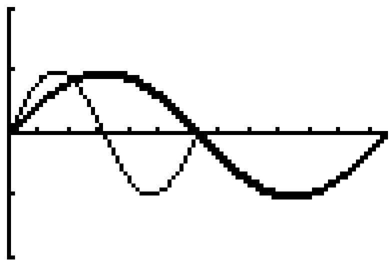
- $y = f(cx);\ c \neq 0$;
- $y = d\ f(x);\ d \neq 0$

Quais os efeitos dos parâmetros *c* e *d* na representação gráfica das funções de cada família?

2. Considere agora a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}\, x$.

2.1. Represente graficamente a função g, definida por $g(x) = f(-x)$.

2.2. A figura abaixo mostra, no rectângulo de visualização $[0, 4\pi] \times [-2, 2]$, a representação gráfica da função *f* e da função *h* que resulta de uma transformação geométrica no gráfico de *f*:



Identifique a transformação geométrica que transforma a representação gráfica de *f* na representação gráfica de *h* e escreva uma expressão que defina a função *h*.

3. A equação $1+x^2=\cos x$ tem solução? Justifique a sua resposta. E a equação $1+x^2=\operatorname{sen} x$?

Adaptado de Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1997b)

Anexo 6

Entrevista 6 – 11.º ano

Entrevista 6
(Tarefa 6)

1. Num tecido branco, no mesmo instante, caíram duas pequenas gotas de tinta, uma preta e outra vermelha, em dois pontos que distam 10 cm um do outro. Ambas as gotas deram origem a manchas circulares em que os raios r_p e r_v, em centímetros, são dados em função do tempo t, em segundos, que decorreu após as gotas terem caído no tecido pelos seguintes modelos matemáticos:

$$r_p(t) = \frac{4t+5}{t+2}, \quad t \geq 0; \qquad\qquad r(t)_v = \frac{5t+1}{t+3}, \quad t \geq 0.$$

1.1. Determine o raio da mancha preta no instante em que a gota caiu no tecido.

1.2. Determine a área da mancha vermelha dois segundos após a gota ter caído no tecido.

1.3. Quanto tempo decorreu até que o perímetro da mancha preta fosse $6{,}8\pi$ cm.

1.4. Determine ao fim de quanto tempo as manchas atingiram a mesma dimensão. Apresente o resultado arredondado às décimas.

1.5. Com o decorrer do tempo será que as duas manchas se intersectam? Justifique a sua resposta.

2. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = \frac{8-4x}{2x-4} \qquad\qquad g(x) = \frac{-x^3+2x^2+x-2}{x+1} \qquad\qquad h(x) = \frac{20-9x-2x^2}{x-3}$$

2.1. Indique o domínio e o contradomínio das funções f e g.

2.2. Tendo em conta o gráfico da função g faça uma previsão (sem recorrer à funcionalidade gráfica da calculadora) acerca da forma do gráfico da função $\frac{1}{g}$. Confirme a sua previsão recorrendo à calculadora gráfica e procure encontrar uma justificação caso esta não esteja correta.

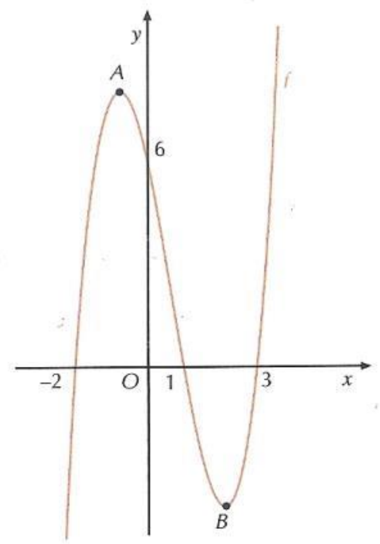
2.3. Investigue para que valores inteiros de k a equação $h(x)=k$ é impossível.

Anexo 7

Entrevista 7 – 11.º ano

Entrevista 7
(Tarefa 7)

1. Observe a figura onde está representada graficamente uma função *f* polinomial do terceiro grau:



1.1. Indique o domínio da função g definida por $g(x) = \sqrt{f(x+2)}$.

1.2. Determine os valores de *x* que satisfazem a condição

$$\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{-x^2+2x} \geq 0 .$$

1.3. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa zero.

1.4. Determine, com aproximação às centésimas, os valores das abcissas dos pontos A e B, correspondentes a extremos relativos da função *f*.

2. Considere a função cuja expressão analítica é $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

2.1. Qual é o domínio e o contradomínio da função?

2.2. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de *f* com os eixos coordenados?

2.3. Seja *h* a função definida por $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.3.1. Qual é o domínio e o contradomínio da função *h*?

2.3.2. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de *h* com os eixos coordenados?

2.3.3. Quais são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de *f* e *h*?

Adaptado de Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1997b)

3. Há alguns anos não era permitido o uso de calculadoras gráficas na aula de Matemática. Se fizesse uma viagem ao passado que indicações gerais daria aos estudantes para que eles representassem graficamente as funções do tipo:

$$y = \frac{a}{x-b} \qquad\qquad y = ax + b + \frac{c}{x}$$

Apresente os seus argumentos.

Adaptado de Teixeira *et al.* (1997b)

Anexo 8

Entrevista 8 – 11.º ano

Entrevista 8
(Tarefa 8)

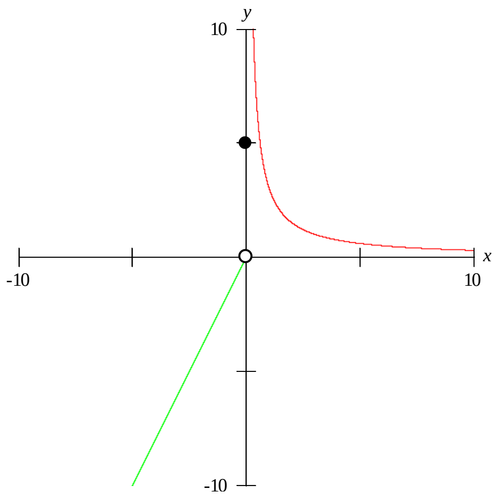
1. Quais das seguintes relações representam funções? No caso das relações que representam funções indique o domínio e o contradomínio (quando não houver indicação em contrário considere o domínio o conjunto de todos os valores que é possível atribuir à variável independente):

(i) $\operatorname{sen}^4 x + y^2 = 1$; (ii) $xy = -3$; (iii) $y = \begin{cases} 4, & x \leq 1 \\ -2x+5, & x > 4 \end{cases}$

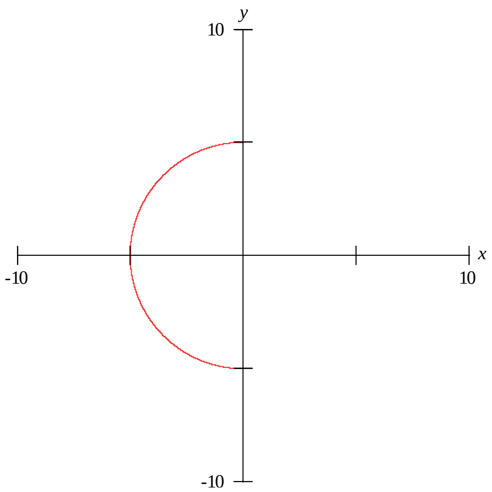
(iv) $x^3 - 2x + xy = 0$; (v) $\dfrac{x}{x-3} = 6,\ x \neq 3$ (vi) $x^2 = \dfrac{y}{\pi}$

2. Quais das seguintes representações gráficas representam funções?

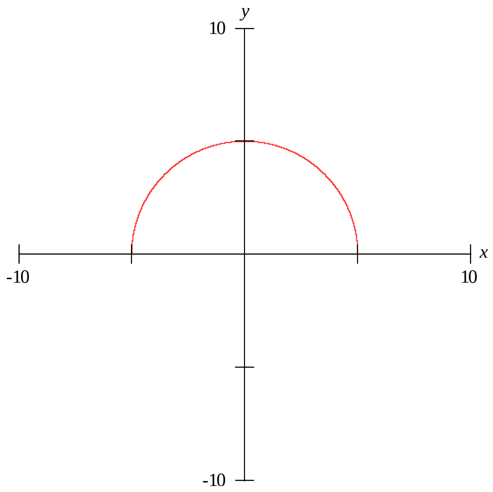
(i)



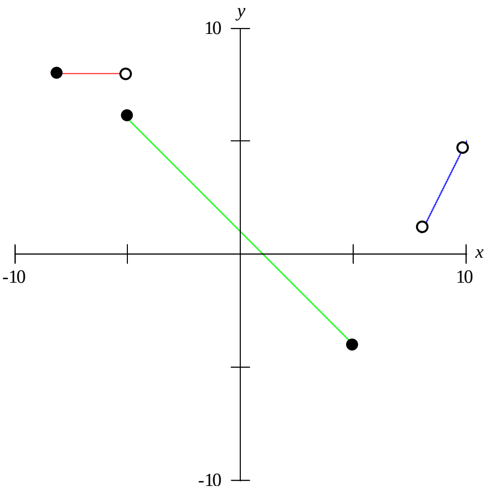
(ii)



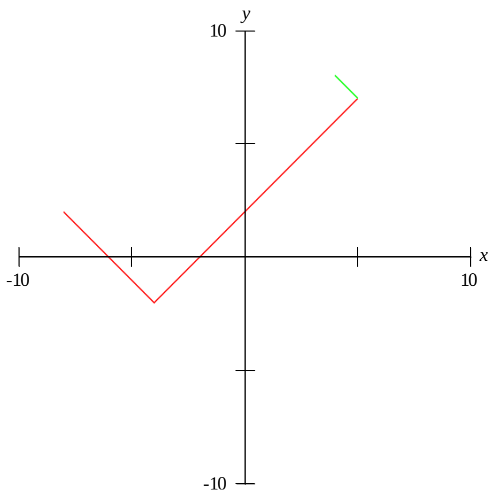
(iii)



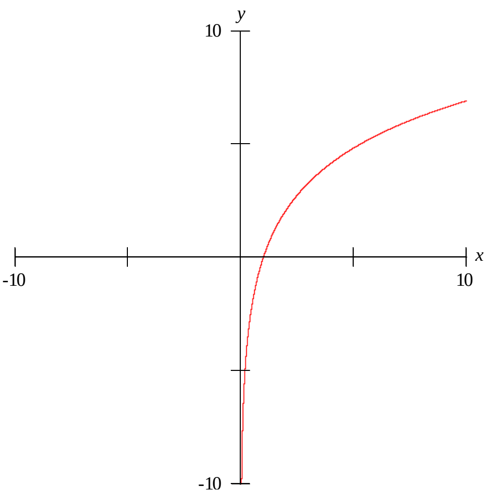
(iv)



(v)



(vi)



3.

3.1. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: Para qualquer x real, $x^2 + 1$ é maior que x.

3.2. Determine os valores que a pode tomar de modo que, para qualquer x real, $x^2 + a$ seja maior que x.

4. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \sqrt{x^2}, \qquad h(x) = \frac{x^2}{x}, \qquad p(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2.$$

Algumas das funções são idênticas? Justifique a sua resposta.

5. Resolva a inequação $x > \frac{1}{x}$.

6. Uma empresa de alumínio pretende fabricar uma peça de forma cilíndrica, com a capacidade de meio litro. As tampas superiores e inferiores são feitas de alumínio especial que custa 5 cêntimos por centímetro quadrado. A superfície lateral é feita de material mais barato que custa 2 cêntimos por centímetro quadrado.

6.1. Exprima o custo *C* da peça em função do raio da base.

6.2. Qual é o valor de r para o qual a peça é mais barata? Indique o valor aproximado ao milímetro. Qual é o custo mínimo da peça?

Anexo 9

Testes do 10.º Ano

Teste I
(5 março 2010)

ESCOLA SECUNDÁRIA ___________
Teste de Avaliação de Matemática A
10º Ano Turma ____ 5 de Março de 2010

I PARTE – ESCOLHA MÚLTIPLA

As questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão, justificando a sua resposta.

1. Seja g uma função contínua de domínio IR com a seguinte tabela de variação:

x	$-\infty$	-5		-3		1	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↗	1	↘	0,5	↗

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) A função g tem dois zeros;

(B) A função g tem um mínimo absoluto;

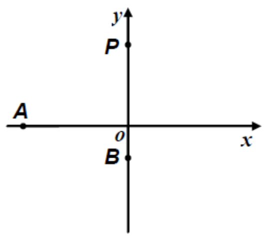
(C) O contradomínio de g é IR;

(D) **A** equação $g(x)=1$ tem apenas uma solução;

2. Seja g uma função ***afim*** e r a recta representativa do seu gráfico. No referencial, o.n. ao lado:

- O ponto P pertence ao eixo Oy, à recta r e tem ordenada 3;
- O ponto A pertence ao eixo Ox, e tem abcissa -3:
- O ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada -1;
- A recta AB é paralela à recta r.

Qual é o zero de $\boldsymbol{g}$?



(A) 7 **(B)** 8

(C) 9 **(D)** 10

3. Considere a esfera definida pela condição $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 14$.

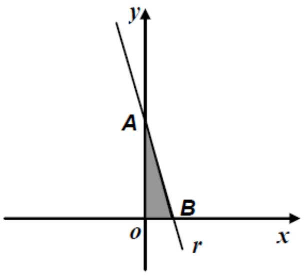
Sabendo que $[AB]$ é um diâmetro dessa esfera e que A tem como coordenadas $(1, 1, 1)$, as coordenadas de B são:

(A) $(2, 4, 8)$ (B) $(3, 5,7)$

(C) $(4, 6, 5)$ (D) $(5, 3, 6)$

4. Na figura ao lado está representada num referencial o.n. xOy, a recta r de equação $y=-6x+2$. Os pontos A e B pertencem à recta e, tal como a figura sugere, A pertence também ao eixo Oy.

Qual é o valor da área do triângulo $[ABO]$?



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$

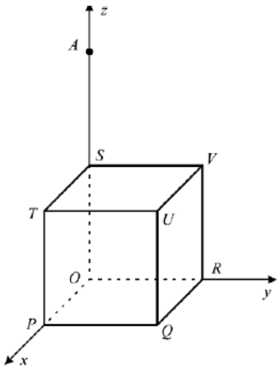
(C) $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

II Parte

Indique todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias.
Sempre que não se refere a aproximação pretendida para um resultado, pretende-se o valor exacto.

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPRSTUV]$.

A aresta $[OP]$ está contida no semieixo positivo Ox, a aresta $[OR]$ no semieixo positivo Oy e a aresta $[OS]$ está contida no semieixo positivo Oz.



O ponto U tem coordenadas $(2, 2, 2)$.

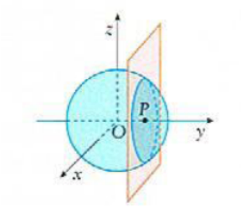
1.1. Defina por uma condição a recta paralela ao eixo Ox e que contém Q.

1.2. Averigúe analiticamente se o ponto B (1, -2,0) pertence à superfície esférica com centro no ponto médio de $[TR]$ e que contém P.

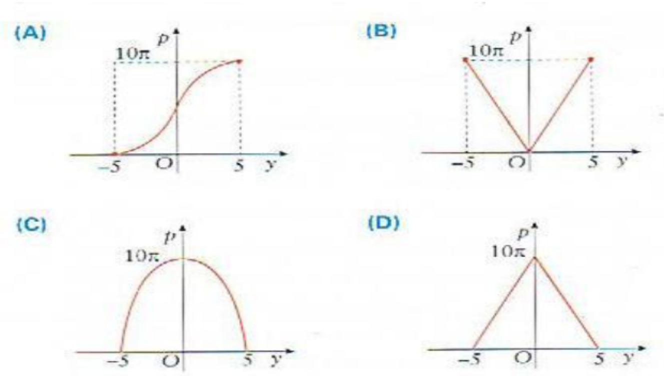
2. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma esfera de raio 5 cm. O centro da esfera coincide com a origem do referencial. Um ponto P desloca-se ao longo do diâmetro que está contido no eixo Oy.

Para cada posição do ponto P , um plano que o contém e é perpendicular ao eixo Oy, produz na esfera uma secção de **perímetro *p***.

Seja ***s*** a função que à ordenada y do ponto P faz corresponder o ***perímetro p*** da secção produzida na esfera pelo referido plano.

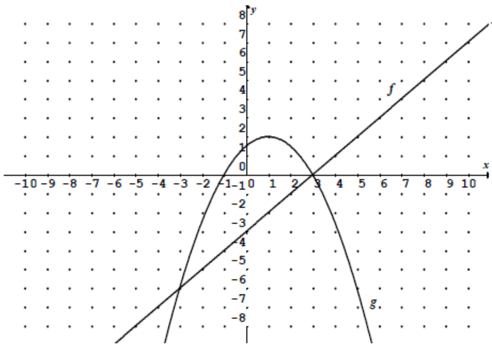


Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função ***s***?



Note bem: não necessita de explicar por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar o que o leva a afirmar que os outros estão incorrectos, indicando para cada um deles, uma razão pelo qual os rejeita.

3. Observe a figura que representa os gráficos das funções continuas, ambas de domínio IR, ***f*** (afim) e ***g***.



3.1. Determine $g(1)\times f(7)$.

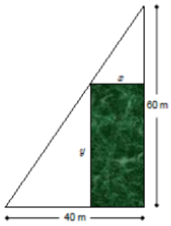
3.2. Determine o conjunto-solução de cada uma das condições:

3.2.1. $f(x)=4$ **3.2.2.** $g(x)-f(x)\leq 0$

3.2.3. $f(x)-1>0$ **3.2.4.** $-g(x)-6>0$

3.3. Indique os intervalos de monotonia da função **g.**

4. Os condóminos de um conjunto de apartamentos pretendem construir um jardim rectangular, dispondo para isso de uma zona em forma de triângulo rectângulo. Tal como se vê na figura, os lados do triângulo medem 60 metros e 40 metros.



Os condóminos pretendem saber as dimensões ***x*** e y do jardim de modo a maximizar a área.

4.1. Sem utilizar a calculadora, resolva as duas questões seguintes:

4.1.1. Usando a semelhança de triângulos, justifique que $y = 60 - 1,5x$.

4.1.2. Mostre que a área do jardim em metros quadrados é dada, em função de $a(x) = 60x - 1,5x^2$.

4.2. Recorrendo ás capacidades da calculadora gráfica determine, na forma de intervalo de números reais, os valores de ***x*** de modo a que a área seja inferior a 114 metros quadrados.

Nota: apresente todos os dados recolhidos com a utilização da calculadora e apresente o gráfico(ou gráficos) que lhe permitiram responder á questão.

5. Considere a função real de variável real definida por: $p(x) = |x+3| - 4$.

5.1. Explique como obter o gráfico de ***p*** a partir do gráfico da função $a(x) = |x|$.

5.2. Resolva analiticamente a condição: $p(x) > 6$.

Fim

1.	2.	3.	4.	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.1.	3.2.2.	3.2.3.	3.2.4.	3.3.	4.1.1	4.1.2.	4.2.	5.1.	5.2.
10	10	10	10	13	13	13	11	8	10	8	12	10	11	12	13	13	13

Teste II
(Teste Intermédio 5 maio 2010)

Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 1

Teste Intermédio
Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 5.05.2010

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Considere, num referencial o.n. xOy, a recta r que intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2 e que intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 8

Qual é a equação reduzida da recta r ?

(A) $y = -4x + 8$ **(B)** $y = 4x + 8$

(C) $y = -2x + 4$ **(D)** $y = 2x + 4$

2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x| + 3$

Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

(A) $g(x) = 1$ **(B)** $g(x) = 2$ **(C)** $g(x) = 3$ **(D)** $g(x) = 4$

3. Sejam a, b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sabe-se que:

- $a > 0$
- a função f tem um único zero, que é o número real 5

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $]-\infty, 0]$ **(B)** $[0, +\infty[$ **(C)** $]-\infty, 5]$ **(D)** $[5, +\infty[$

Teste Intermédio de Matemática A - 10.º Ano - Versão 1 - Página 2

4. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 1.

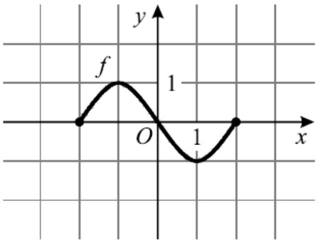
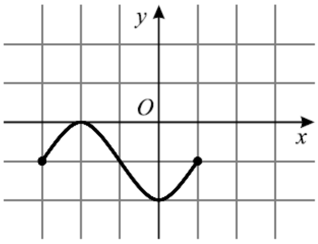


Figura 1

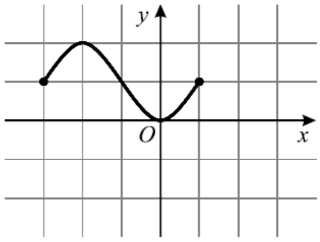
Seja h a função definida por $h(x) = f(x-1)+1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função h ?

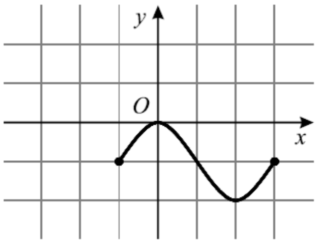
(A)



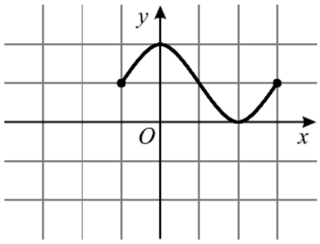
(B)



(C)



(D)



5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{6} & se \;\; x \leq 1 \\ x + \frac{1}{2} & se \;\; x > 1 \end{cases}$

Qual é o valor de $g\left(\frac{2}{3}\right)$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{3}{5}$ **(C)** $\frac{5}{6}$ **(D)** $\frac{7}{6}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura 2, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

A base da pirâmide, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto W, vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, $[STUV]$, do prisma.

O ponto P tem coordenadas $(5, 0, 0)$

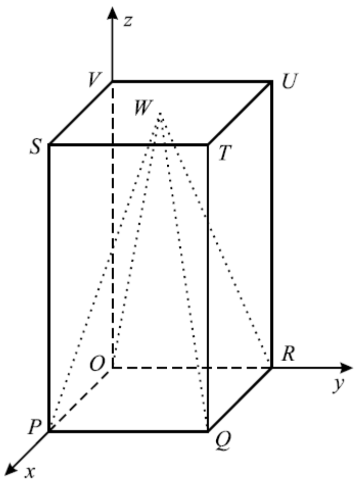


Figura 2

1.1. Defina, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O

1.2. Sabe-se que o volume da **pirâmide** é igual a 75

Determine as coordenadas do ponto W, vértice da pirâmide.

2. A Fernanda e a Gabriela são duas irmãs que frequentam a mesma escola. Certo dia, a Fernanda está em casa e a Gabriela está na escola. Num certo instante, a Fernanda sai de casa e vai para a escola e, no mesmo instante, a Gabriela sai da escola e vai para casa. Há um único caminho que liga a casa e a escola. Ambas fazem o percurso a pé e cada uma delas caminha a uma velocidade constante.

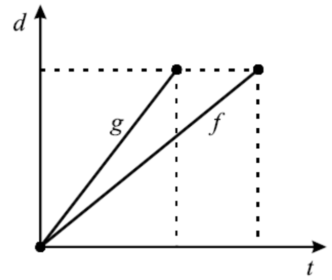
Seja f a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Fernanda, t minutos depois de ter saído de casa (a contagem do tempo tem início quando a Fernanda sai de casa e termina quando ela chega à escola).

Seja g a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Gabriela, t minutos depois de ter saído da escola (a contagem do tempo tem início quando a Gabriela sai da escola e termina quando ela chega a casa).

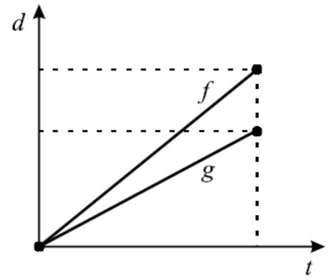
Indique em qual das opções seguintes podem estar representadas graficamente as funções f e g

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras duas opções, uma razão pela qual a rejeita.

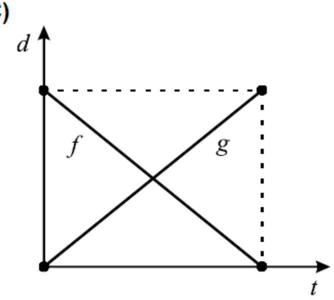
(A)



(B)



(C)



3. A figura 3 representa o projecto de um canteiro com a forma de um triângulo isósceles $\left(\overline{AC} = \overline{BC}\right)$

Nesse triângulo, a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 12 metros.

O canteiro vai ter uma zona rectangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

O lado $[DG]$ do rectângulo está contido em $[AB]$ e os vértices E e F pertencem, respectivamente, a $[AC]$ e a $[BC]$

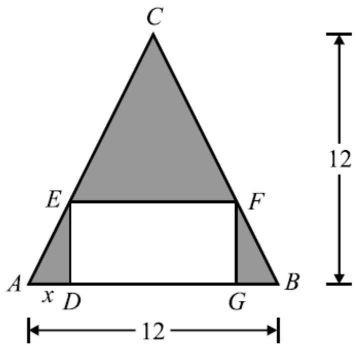


Figura 3

Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D $(x \in]0, 6[)$

Resolva os três itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

3.1. Mostre que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x, por

$$S(x) = 4x^2 - 24x + 72$$

3.2. Determine o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

3.3. Determine o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a $40\,m^2$

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

Teste Intermédio de Matemática A - 10.º Ano - Versão 1 - Página 6

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

4.1. O gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos.

Designemos esses quatro pontos por A, B, C e D, sendo A o que tem menor abcissa e sendo D o que tem maior abcissa.

O ponto A tem abcissa -3 e o ponto C tem abcissa 1

Seja E o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas.

Determine a área do triângulo $[BED]$, **sem recorrer à calculadora**.

4.2. O contradomínio de f é um intervalo da forma $[a, +\infty[$

Determine o valor de a, arredondado às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.

Obtenha o gráfico de f numa janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema. Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico visualizado e assinale, nesse gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema.

FIM

Teste III

(4 junho 2010)

ESCOLA SECUNDÁRIA _____________
Teste de Avaliação de Matemática A
10º Ano 4 de Junho de 2010

I PARTE – ESCOLHA MÚLTIPLA

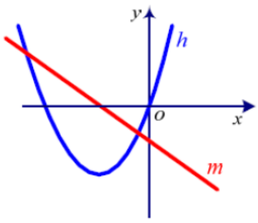
As questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão, justificando a sua resposta.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio [- 5 , 4] . Qual o contradomínio de $|f|$?

(A) [0,4]
(B) [0,5]
(C) [4,5]
(D) [- 4, 5]

2. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função quadrática h;
- parte do gráfico de uma função afim m.

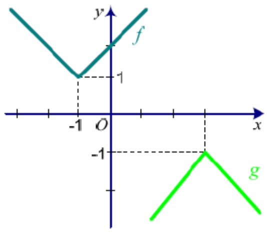


Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $h(x)\times m(x)\leq 0$?

(A) $]-\infty,-6]\cup[-3,0]$ (B) $[-6,-3]\cup[0,+\infty[$

(C) $[-3,+\infty[$ (D) $[0,+\infty[$

3. Na figura estão representadas graficamente as funções f e g.



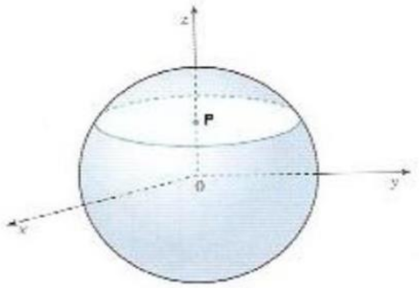
Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x)=-f(x-4)-2$ (B) $g(x)=-f(x+4)-2$
(C) $g(x)=-f(x+3)-1$ (D) $g(x)=-f(x-3)-1$

4. No referencial o.n. Oxyz está representada uma esfera de centro na origem do referencial e raio 1 .

O ponto P desloca-se sobre o eixo Oz.

Seja g a função que faz corresponder à cota z , do ponto P, a área da secção produzida na esfera pelo plano que passa por P e é perpendicular ao eixo Oz .



Seleccione a única alternativa verdadeira:

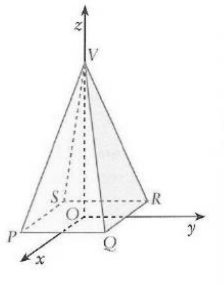
(A) A função g tem um e um só zero;
(B) A função g tem mínimo igual a $g(0)$.
(C) O máximo de g é π:
(D) A função g tem domínio $[0, 1]$.

II Parte

Indique todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias. **Sempre que não se refere a aproximação pretendida para um resultado, pretende-se o valor exacto.**

1. Considera num referencial o. n. Oxyz, uma pirâmide regular de base quadrada.

Sabe-se que:



- A base da pirâmide está contida no plano xOy.
- O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz.
- A aresta [QR] é paralela ao eixo Ox.
- O ponto Q tem coordenadas (5 , 5 , 0).
- O volume da pirâmide é de 200 cm³.

1.1. Mostra que o vértice V tem coordenadas (0, 0, 6).

1.2. Escreve uma equação vectorial da recta PQ.

(Nota: Volume da pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *área da base* $\times$ *altura*)

2. Uma agência imobiliária possui 40 apartamentos para alugar, sendo que o valor mensal da renda apresenta - se na tabela seguinte:

Renda mensal (em euros)	Nº de Apart.
$[250, 300[$	8
$[300, 350[$	12
$[350, 400[$	9
$[400, 450[$	6
$[450, 500[$	5

2.1. Calcule o valor médio da renda mensal por apartamento e o desvio padrão.
Nota: Apresente a resposta do desvio padrão com 3 casas decimais.

2.2. Se o valor da renda de cada um dos apartamentos sofre um aumento de 8%, que valor passam a ter a média e o desvio padrão da distribuição das rendas?

2.3. Construa o polígono das frequências relativas acumuladas das rendas e localize graficamente a mediana e os quartis.

3. No dia 20 de Junho, no escritório onde trabalha a Joana, foi ligado um purificador do ar e desligado algum tempo depois.
Admita que o purificador foi ligado às zero horas e que a poluição do ar diminuiu enquanto o purificador esteve ligado e que começou a aumentar logo que aquele foi desligado.

O modelo matemático que descreve a poluição, P, do ar, em mg/L, às t horas desses dia, é dado por:

$P(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}06t + 0{,}5$, $t \in [0, 24]$

3.1. Indique qual o nível de poluição às 15h e 15 m. Apresente o resultado em mg/l com três casas decimais.

3.2. Indique, recorrendo exclusivamente a processos analíticos, a hora do dia em que a poluição foi mínima.

4. Considere o polinómio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$

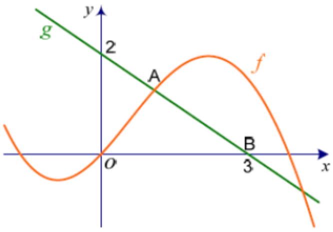
4.1 Sabendo que 2 é raiz dupla do polinómio, determine as outras raízes.

4.2 Decomponha $P(x)$ num produto de factores do primeiro grau.

4.3 Determine, na forma de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição

$$P(x) \leq 4(x-3)$$

5. . Recorrendo à calculadora obtém um valor aproximado com três casas decimais para a área do triângulo $[OAB]$, sabendo que a curva que passa na origem é parte do gráfico de $f(x) = -\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} + x$.



I Parte				II Parte										
1.	2.	3.	4.	1.1	1.2.	2.1	2.2.	2.3.	3.1.	3.2	4.1.	4.2.	4.3	5.
10	10	10	10	15	15	15	15	15	10	15	13	10	15	22

Fim

Anexo 10

Fichas de trabalho 10.º ano

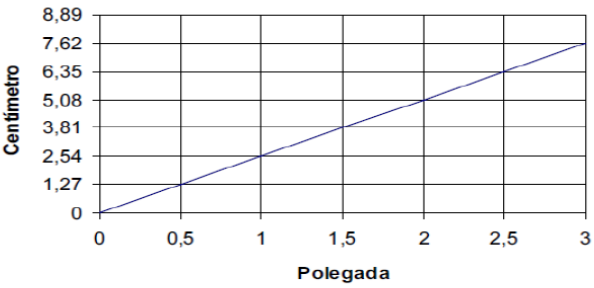
Funções e Gráficos: Generalidades

ESCOLA SECUNDÁRIA ______________
Ficha de trabalho de Matemática A – *Funções e Gráficos: Generalidades*
10 º Ano **Fevereiro de 2010**

Funções e gráficos: Generalidades

Leitura e interpretação de gráficos

1. Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã de um televisor é indicado em polegadas. No gráfico que se segue, podes ver a relação aproximada existente entre esta unidade de comprimento e o centímetro.

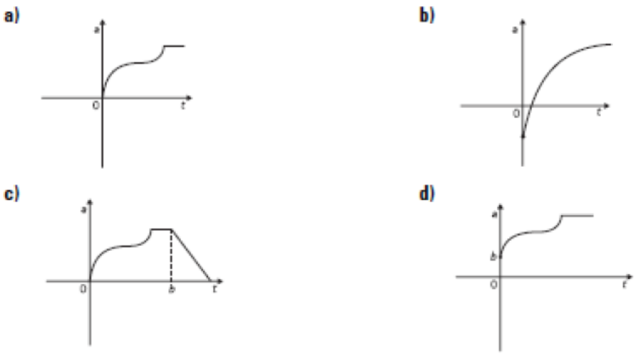


Qual das quatro igualdades que se seguem permite calcular a diagonal do ecrã de um televisor, em centímetros (c), dado o seu comprimento em polegadas (p)?

☐ $c = 1{,}27\ p$ ☐ $c = 2{,}54\ p$

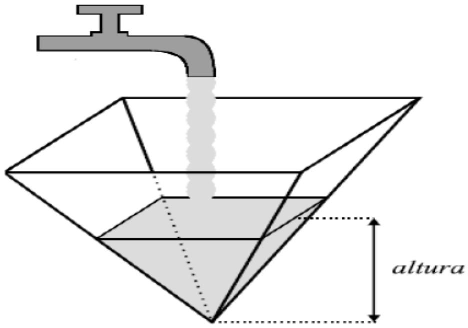
☐ $c = \frac{1}{1{,}27}\ p$ ☐ $c = \frac{1}{2{,}54}\ p$

2. Considere o recipiente representado na figura ao lado.
Qual das representações gráficas seguintes pode representar a variação da altura do líquido no recipiente em função do tempo, supondo que estava vazio no instante $t = 0$ e que o enchemos com um caudal constante?
Indique um motivo pelo qual rejeitou cada uma das outras representações.



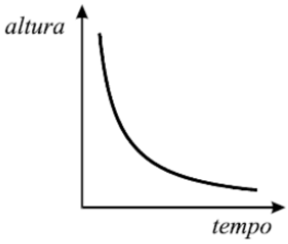
1

3. Imagina que um recipiente com a forma da pirâmide, **inicialmente vazio**, se vai encher com água.
A quantidade de água que sai da torneira, por unidade de tempo, até o recipiente ficar cheio, é constante.

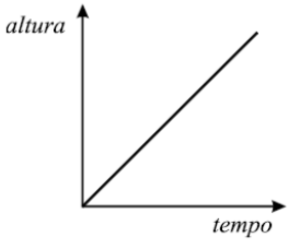


Qual dos seguintes gráficos poderá traduzir a variação da altura da água, no recipiente, com o tempo que decorre desde o início do seu enchimento?

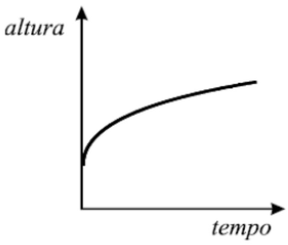
☐ Gráfico **A**



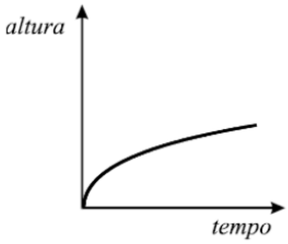
☐ Gráfico **B**



☐ Gráfico **C**



☐ Gráfico **D**



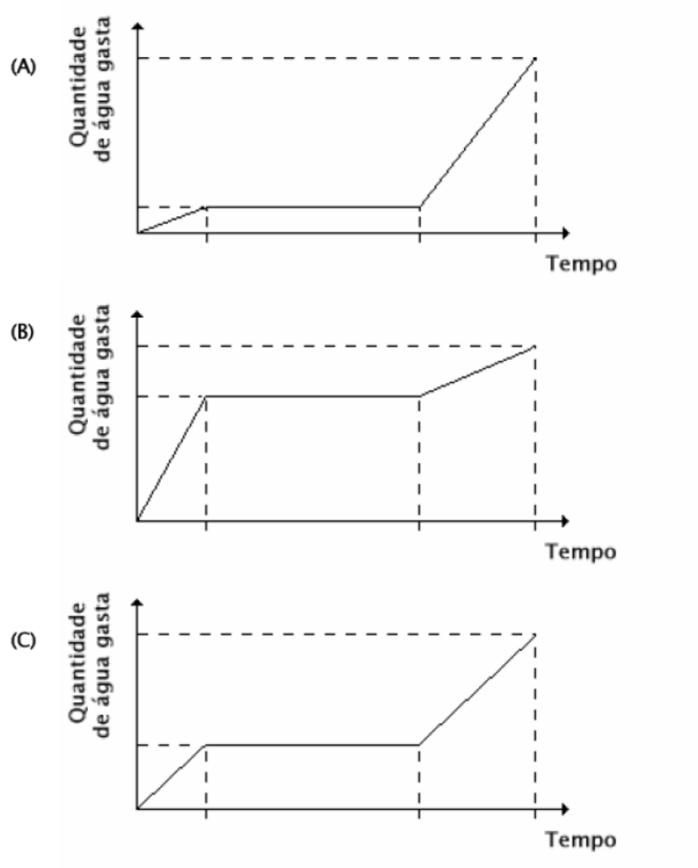
4. **ÁGUA GASTA NO DUCHE**

O João cronometrou o tempo que o irmão demorou a tomar um duche e reparou que:

- demorou 1 minuto e 33 segundos a molhar-se;
- ensaboou-se com a torneira fechada e voltou a abrir a torneira 4 minutos e 4 segundos após o início do duche;
- terminou o duche, quando tinham decorrido 6 minutos e 33 segundos.

O João verificou que a torneira do duche tem um débito de água de 500 ml em 2,42 segundos.

Qual dos seguintes gráficos descreve o banho do José? Explica a tua resposta.

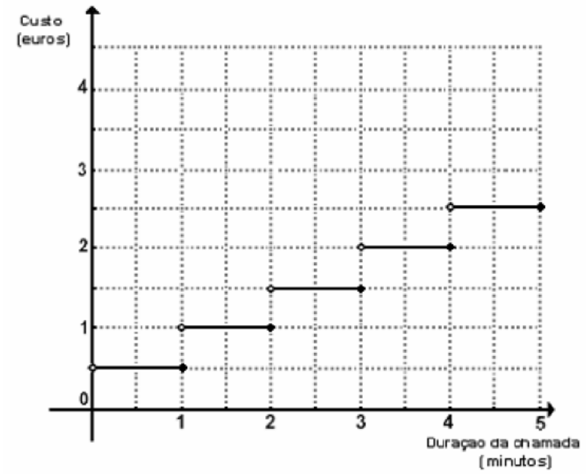


3

5.

CUSTO DE UMA CHAMADA

O gráfico seguinte representa a relação entre a duração e o custo de uma chamada realizada num determinado telemóvel.



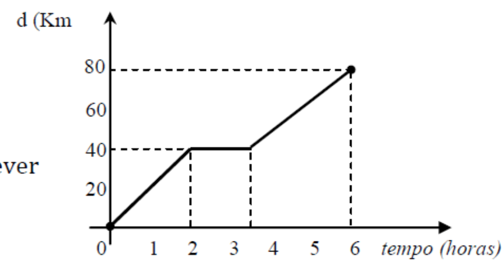
1. Calcula o custo de uma chamada do mesmo telemóvel com duração de:
   1.1. 3,5 minutos.
   1.2. 3 minutos e 59 segundos.
   1.3. 4 minutos e 05 segundos.

2. Analisa o gráfico e preenche a tabela, relacionando a duração de uma chamada com o seu custo.

Duração da chamada – d (minutos)	Custo da chamada (euros)
$0 < d \leq 1$	
$1 < d \leq < 2$	
$2 < d \leq 3$	
$3 < d \leq 4$	
	2,50

3. Se para chamadas mais longas o custo continuar a variar de acordo com o gráfico, quanto custará uma chamada de 10 minutos? Justifica a tua resposta.

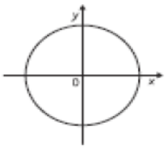
6. O gráfico seguinte representa um passeio de bicicleta do Miguel, dando a distância percorrida em função do tempo gasto. Elabore uma curta composição para descrever o passeio do Miguel.



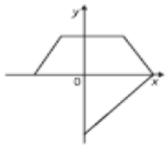
Noção de Função - Propriedades das funções

1. Das opções a seguir apresentadas, indique qual pode ser a representação gráfica de uma função, indicando um motivo pelo qual rejeitou cada uma das outras representações.

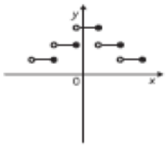
a)



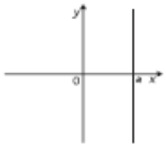
b)



c)



d)



Sempre que ligamos o computador, a televisão ou uma consola, estamos a consumir energia.

O cálculo do consumo de energia de um aparelho eléctrico é dado pela fórmula $E = P \times t$,

em que: **E** é a energia consumida em watts-hora (Wh);

P é a potência do aparelho considerado em watts (W);

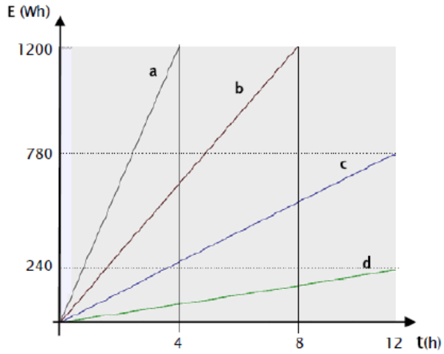
t é o tempo de utilização do aparelho em horas.

1. Completa a tabela seguinte, indicando, em watts, a potência (**P**) e, em horas, o tempo (**t**) de diferentes aparelhos eléctricos com um consumo de 420 Wh.

	Aparelho A	Aparelho B	Aparelho C
Potência (P em W)	20		
Tempo (t em h)		105	

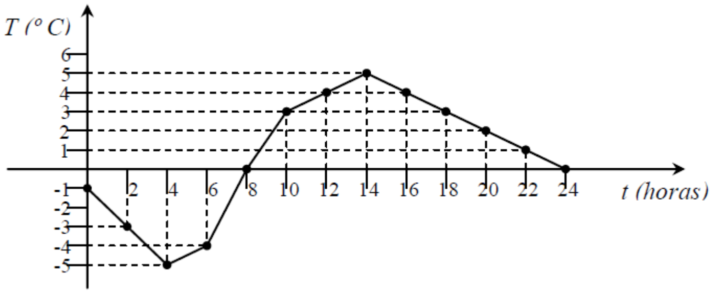
2. Analisa os dados da tabela e dos gráficos, representados no referencial, que relacionam a energia consumida com o tempo de utilização de vários aparelhos eléctricos. Identifica o aparelho que corresponde a cada um dos gráficos e justifica as tuas respostas.

Aparelho eléctrico	Potência (em W)
Rádio	15
Lâmpada económica	20
Computador	65
Televisor	150
Secador de Cabelo	300
Torradeira	850



5

3. O gráfico seguinte representa a variação da temperatura numa cidade do interior num dia de Inverno.



Observe o gráfico e responda às seguintes questões:

1. O gráfico representa uma função?

2. Qual é a variável independente e a variável dependente?

3. Indique o domínio e o contradomínio da função.

4. Em que momentos a temperatura foi de 0 ºC?

5. Em que intervalo de tempo a temperatura foi negativa?

6. Em que intervalos de tempo a temperatura aumentou? E em que intervalos diminuiu?

7. Indique a temperatura máxima e a temperatura mínima.

8. Qual foi a variação da temperatura entre as 6h e 8h? E entre as 8h e 10 h?
Em qual dos intervalos de tempo a temperatura aumentou mais rapidamente?

9. A temperatura variou mais rapidamente no intervalo de $[6,8]$ ou no intervalo $[8,12]$?

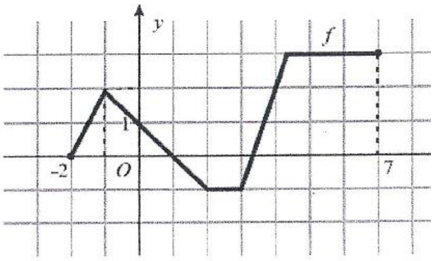
Propriedades das Funções e Função Quadrática

ESCOLA SECUNDÁRIA

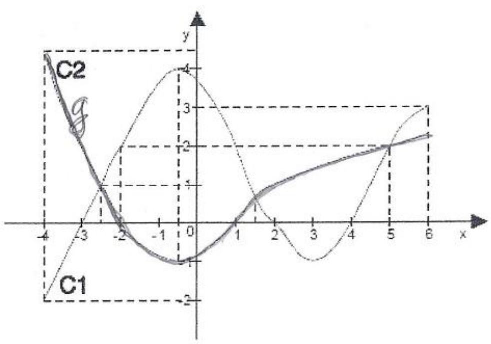
Ficha de Trabalho de Matemática A

10ºAno **Fevereiro 2010**

Apresente o seu raciocínio de forma clara, apresentando todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias



1. Na figura está representada graficamente uma função *f*.
   1.1. Escreva o domínio e o contradomínio da função *f*.
   1.2. Escreva os intervalos nos quais a função é estritamente crescente e o intervalo no qual é estritamente decrescente.
   1.3. Indique o conjunto solução de cada uma das condições:
      1.3.1. $f(x) > 0$,
      1.3.2. $f(x) \times f(2) < 0$,
      1.3.3. $2 - f(x) < 0$.
   1.4. Indique para que valores de **k** (reais), a equação $f(x) = k$ tem apenas uma solução.



2. As curvas C1 e C2 representam, respectivamente, duas funções f e g definidas no intervalo $[-4, 6]$.

2.1 Para que valores de x se verificam as condições:

2.1.1 $f(x) = 0$;

2.1.2 $g(x) = 0$;

2.1.3 $f(x) > 2$?

2.2 Completa o quadro seguinte:

x	-4	-3		-2		1		2		4	6
Sinal de $f(x)$	-	0						0		0	
Sinal de $g(x)$				0		0	+	-			+
Sinal de $f(x).g(x)$		0		0							

2.3 Indica, sob a forma de intervalo de números reais, o conjunto solução de $f(x).g(x) > 0$.

2.4 Completa, com os símbolos $>$, $<$ ou $=$, de forma a obter proposições verdadeiras:

$f(-4)\ldots..g(-4)$; $f(0)\ldots..g(0)$; $f(2)\ldots..g(2)$; $f(-2{,}5)\ldots..g(-2{,}5)$.

2.5 Indica os valores de x que verificam cada uma das seguintes condições.

$f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; $f(x) > g(x)$.

1/2

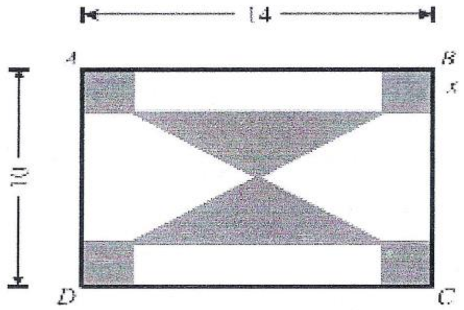
3. Considere uma função contínua h, representada pelo seu quadro de variação

x	-5		-2		0		4
$h(x)$	-2	↘	-4	↗	1	↘	0

3.1 Indique o domínio, o contradomínio, os intervalos de monotonia e os extremos da função h.

3.2 Indique o número de soluções da equação $h(x) = 0$.

4 **Na figura está representado um rectângulo [ABCD]**



Este rectângulo é o esboço de uma placa decorativa de 14 cm de comprimento por 10 cm de largura e que será constituida por uma parte em metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco).

A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais.

Cada triângulo tem um vértice no centro do rectângulo $[ABCD]$

Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm $(x \in]0, 5[)$

4.1 Mostre que a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por

$A(x) = 6x^2 - 24x + 70$.

4.2 Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determinar o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcule essa área.

4.3 Determine o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira

2/2

Investigações com a Função Afim

Escola Secundária ____________
T.P.C de Matemática A
10 º Ano **Fevereiro de 2010**

INVESTIGAÇÕES COM A FUNÇÃO AFIM

1. Todas as rectas de equação $y = ax + a$, com $a \neq 0$, passam por um mesmo ponto. Investigue quais são as coordenadas desse ponto. Registe as suas observações.

Como encontrar as coordenadas do ponto recorrendo a um processo algébrico?

2. Considere a família de funções do tipo $y = mx + b$.

2.1. Escreva um elemento dessa família e compare-o graficamente com os elementos da família que se obtém somando uma mesma constante a cada um dos seus parâmetros (m e b). O que observa?

2.2. Acontecerá o mesmo se considerar outros elementos da família de funções $y = mx + b$? Elabore um pequeno relatório com o registo das representações gráficas e as conclusões a que chegou.

Procure encontrar uma justificação recorrendo a processos algébricos.

Investigando a Função Módulo

ESCOLA SECUNDÁRIA ___________
Ficha de trabalho de Matemática A
10º Ano Fev 2010

INVESTIGANDO A FUNÇÃO MÓDULO

1. Represente graficamente as seguintes funções, identifique e registe as semelhanças e as diferenças que encontra

$y = |x|$; $y = 2|x|$; $y = 0{,}6|x|$; $y = -3|x|$; $y = -\frac{1}{2}|x|$.

Como é que a variação do parâmetro a afecta o gráfico das funções da família $y = a|x|$.

2. Realize o mesmo tipo de investigação para funções do tipo $y = a|x| + k$.

Como é que a variação de cada um dos parâmetros a e k afecta o gráfico das funções da família $y = a|x| + k$?

3. Investigue agora como é que a variação dos parâmetros a e h afecta o gráfico das funções da família $y = a|x - h|$.

4. Tendo em conta as investigações feitas nas tarefas anteriores como caracteriza o gráfico das funções da família $y = a|x - h| + k$ de acordo com cada um dos parâmetros?

5. Tendo em conta as investigações feitas nas alíneas anteriores, descreva como pode obter o gráfico de cada uma das funções seguintes a partir do gráfico da função $f(x) = |x|$:

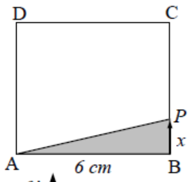
$y = -|x|$; $y = |x + 4|$; $y = 3|x - 1| + 2$.

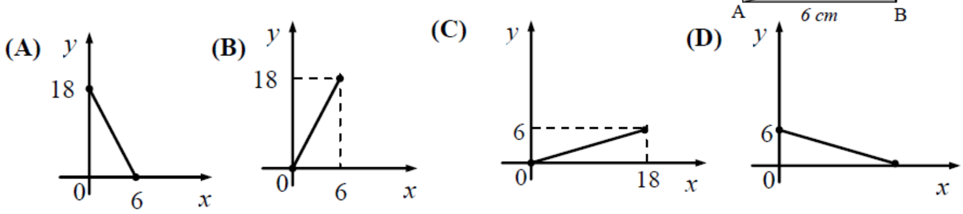
Composições

ESCOLA SECUNDÁRIA ___________
Ficha de trabalho de Matemática A
10º Ano Fev 2010

Composições

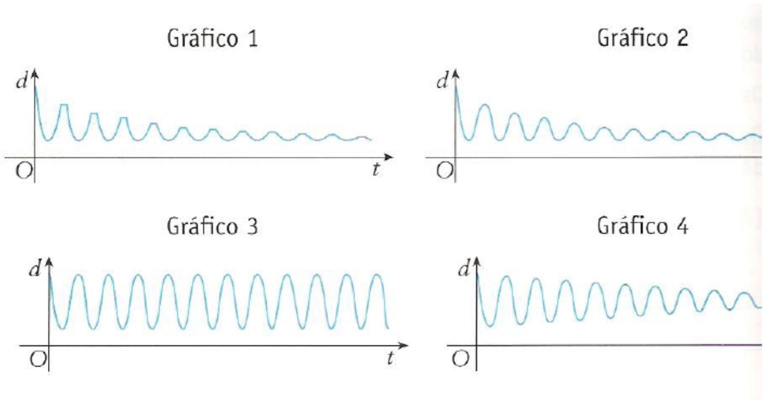
1. Na figura está representado um quadrado [ABCD], sendo P um ponto móvel pertencente ao lado [BC] e $\overline{BP} = x$.
Uma representação gráfica da função que a cada x faz corresponder a área do triângulo [ABP] é:





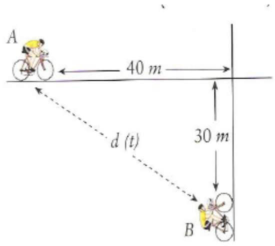
Numa pequena composição, justifique a sua resposta.
Note bem: não necessita de explicar por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar o que o leva a afirmar que os outros estão incorrectos, indicando para cada um deles, uma razão pelo qual os rejeita.

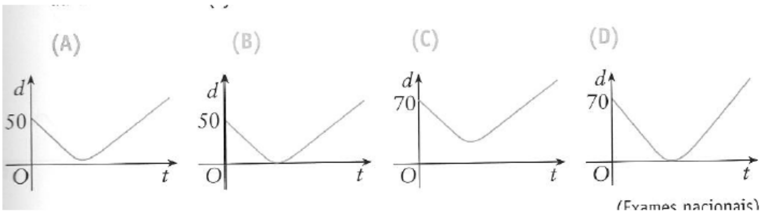
2. Uma criança, sentada num baloiço, é largada de uma certa altura. Suponha que a criança não dá balanço, apenas aguarda que o baloiço pare.
De entre os gráficos seguintes apenas um deles corresponde á função que dá a distância do baloiço ao chão, t segundos após o inicio do movimento.



Qual o gráfico correcto? Numa pequena composição, explique as razões que o levaram a rejeitar os outros três.
Note bem: não necessita de explicar por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar o que o leva a afirmar que os outros estão incorrectos, indicando para cada um deles, uma razão pelo qual os rejeita.

3. Na figura estão representados dois ciclistas A e B, pedalando a caminho de um cruzamento.
Ao Chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente.
No instante, $t = 0$, os ciclistas A e B, encontram-se respectivamente, a 40 metros e a 30 metros, do cruzamento. Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de t, dá a distância d(t) entre os dois ciclistas, no instante t?

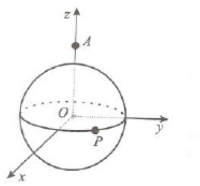




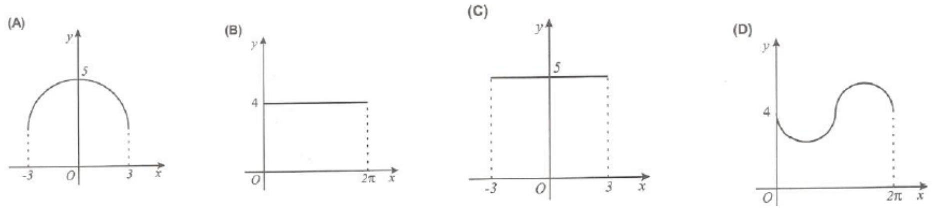
Numa pequena composição, justifique a sua resposta.
Note bem: não necessita de explicar por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar o que o leva a afirmar que os outros estão incorrectos, indicando para cada um deles, uma razão pelo qual os rejeita.

4. Na figura estão representados, em referencial o. n. *Oxyz*:

- o ponto A, de coordenadas (0,0,4)
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano *xOy*.



Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.
Considere a função f que faz corresponder, à abcissa do ponto *P*, a distância de *P* a *A*.
Qual dos seguintes é o gráfico da função f? Justifique a sua resposta.



Ficha de Preparação para o Teste

ESCOLA SECUNDÁRIA ___________
Ficha de Preparação para o Teste
10º Ano Matemática A

As questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.

I Parte

1. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$:

- A esfera ε definida pela condição: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\leq 36$
- A recta de equação $t:(x,y,z)=(1,2,3)+k(-2,0,1),\quad k\in\mathbb{R}$

A intersecção da recta t com a esfera ε é um segmento de recta.
Qual é o comprimento desse segmento de recta?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 14

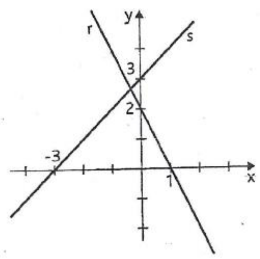
2. Considere as rectas s e r representadas no referencial.
As rectas s e r podem ser definidas por:

(A) $s:(x,y)=(-3,0)+k(0,3), k\in\mathbb{R}$ e $r: y=-2x+2$

(B) $s: y=x+3$ e $r: y=-\frac{1}{2}x+2$

(C) $s:(x,y)=(0,3)+k(-3,0), k\in\mathbb{R}$ e $r: y=-\frac{1}{2}x+2$

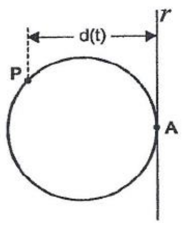
(D) $s: y=x+3$ e $r: y=-2x+2$



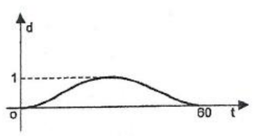
3. Na figura estão representadas:

- uma circunferência de raio 1
- uma recta ***r***, tangente à circunferência no ponto A

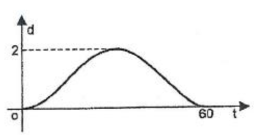
Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos. Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta ***r***, t segundos após o início do movimento.
Qual dos gráficos pode ser o gráfico da função d?



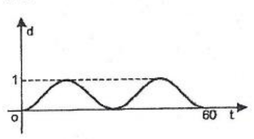
(A)



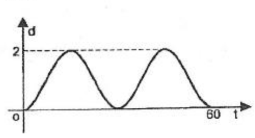
(B)



(C)



(D)



II Parte

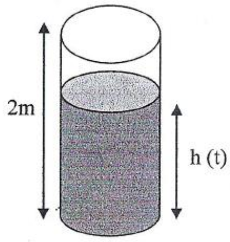
Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

1. Considere a recta ***r*** de equação $2y+6x=8$.

1.1. Escreva a equação reduzida da recta **t**, paralela à recta **r** e a que pertence o ponto *I (3, -4)*.

1.2. Determine **a** (real) de forma que a recta ***s*** seja paralela ao eixo *Ox*, sendo s: $(x,y)=(5,-2)+k(3,\ 5-2a)\ \wedge k\in IR$.

2. A figura representa um reservatório com 2 metros de altura. Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que num certo instante se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.
O reservatório demora 4 horas a ser despejado. Admita que a altura, em metros, de água no reservatório, ***t*** horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t)=a\,(4-bt)$.
Determine o valor de ***a*** e de ***b***.

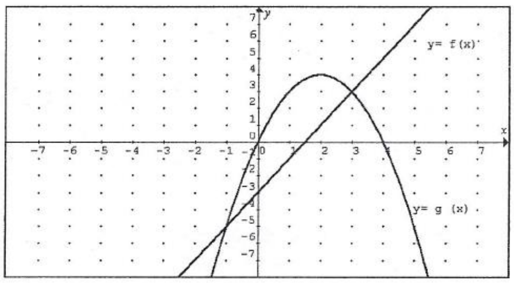


3. Considere as funções ***f*** e ***g*** (quadrática) ambas continuas, de domínio *IR* e representadas na figura seguinte:
Observando os gráficos, indique o conjunto solução de cada uma das condições:

3.1. $f(x)=3$

3.2. $g(x)-f(x)\geq 0$

3.3. $-g(x)-5>0$



4. Dada a função $g(x)=-2+|x-5|$.

4.1. Esboce o gráfico da função g e explique como obter o gráfico de $y=g(x)$ a partir do gráfico de $y=|x|$.

4.2. Qual é o contradomínio desta função?

4.3. Determine analiticamente os zeros da função.

4.4. Indique os intervalos de monotonia da função.

4.5. Defina a função por ramos.

4.6. Resolva analiticamente a condição $g(x)\leq 4$.

FIM

I Parte			II Parte											
1.	2.	3.	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	4.5.	4.6.
15	15	15	15	15	15	10	15	15	15	10	10	10	13	12

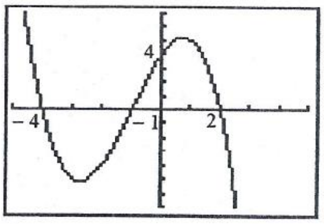
Funções Polinomiais

MATEMÁTICA 10º ANO

FUNÇÕES POLINOMIAIS – ACTIVIDADES

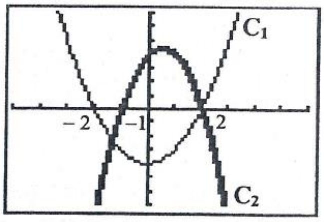
1. Observe a representação gráfica da função f, polinomial de grau três. Escreva, sob a forma de polinómio reduzido, a expressão designatória f(x) que a define.

$[-5,5]\times[-7,7]$



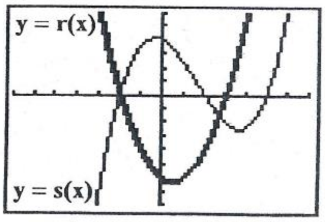
2. As curvas C_1 e C_2 representadas na figura são gráficos das funções quadráticas f e g, respectivamente. Atendendo aos dados da figura e sabendo que **h(x)=f(x)×g(x)**, indique, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de x que verificam a condição **h(x)≥0**.

$[-5,6]\times[-7,7]$



3. Observe com atenção o gráfico e construa o quadro de sinal da função definida por r(x)×s(x).

$[-7,7]\times[-8,6]$



4. Determine os zeros da função $f(x) = 0,5x^3 + 2x^2 - 7x - 6$.

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação $6x^3 + 25x^2 + 2x - 8 \geq 0$.

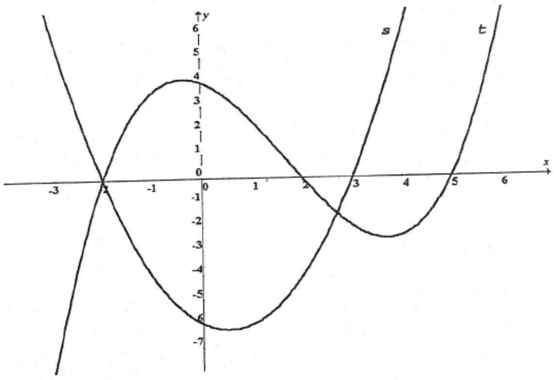
6. Seja $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$

a) Qual é a imagem de 2 por f?
b) Determine os zeros de f.
c) Determine os valores de x para os quais a função é negativa.

7. Considere a função $g(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

a) Prove que –1 e 1 são raízes de g(x).
b) Determine os valores de x que satisfazem a condição g(x)=0.

8. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação $x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x \leq 0$.



9. Considere as funções ***s*** e ***t*** representadas graficamente.

9.1. Determine o conjunto solução das condições:

9.1.1. $s(x)\ t(x-2)>0$

9.1.2. $s(x)\ (9-x^2)\leq 0$

9.2. Determine os valores de ***h*** de modo que $t(x-h)$, tenha:

9.2.1. três zeros positivos

9.2.2. dois zeros negativos e um positivo

9.3. Sabendo que ***t*** é uma função polinomial de grau 3 e que passa no ponto $A(0,4)$, escreva uma expressão que possa definir ***t***.

9.4. Indique, justificando, o número de zeros da função $y=t(|x|)$.

9.5. Represente graficamente a função $f(x)$, tal que $f(x)=|t(x)|$.

10. Considere a família de funções $h(x)=x^3+mx^2-5x+6$.

10.1. Sabendo que 1 é zero ou raiz de ***h***, calcule ***m*** e em seguida determine os restantes zeros.

10.2. Faça $m=-2$. Decomponha $h(x)$ num produto de factores.

10.3. Resolva analiticamente a condição $h(x)(x^2-4)\geq 0$

11. Comente a afirmação:

"Uma função polinomial com quatro zeros reais não é necessariamente de grau quatro".

Anexo 11

Fichas Pares 10.º Ano

O Concerto

Escola Secundária ____________
Ficha Pares de Matemática A
10 º Ano **Março de 2010**

O CONCERTO DE ROCK

O lucro (L), em euros, de um concerto com uma banda rock, organizado por uma associação de estudantes, é função do preço (p) dos bilhetes vendidos, também em euros, e é dado por:

$$L(p) = -25p^2 + 1250p - 13125.$$

Para facilitar a elaboração deste modelo apenas foram tidos em conta os seguintes aspectos: encargos fixos com a banda, preço dos bilhetes e o número de bilhetes vendidos (que é função do preço). Note que quanto mais caros forem os bilhetes vendidos menos bilhetes se vendem e vice-versa.

1. Com o auxílio da calculadora faça uma representação gráfica da função.

2. Leia o gráfico e registe todas as informações que ele lhe fornece acerca da situação.

3. Mostre que são equivalentes as seguintes expressões:

(A) $-25p^2 + 1250p - 13125$ (B) $p(-25p + 1250) - 13125$

(C) $-25(p-25)^2 + 2500$ (D) $-25(p-15)(p-35)$

Para cada uma das questões seguintes justifique a sua resposta:

- Qual das expressões anteriores lhe dá uma ideia mais clara do preço aconselhado para os bilhetes?
- Qual a expressão que mostra qual deve ser o preço mínimo do bilhete para que não haja prejuízo?
- Qual mostra mais claramente o custo fixo com a banda?
- O que significa a expressão $p(-25p+1250)$ na situação do concerto? E a expressão $(-25p+1250)$?
- Quantos bilhetes é previsto vender se o preço de cada bilhete for 10 €? E se for 25€?

4. Qual deverá ser o preço do bilhete de modo que o lucro obtido seja superior a 2100 euros? Apresente as justificações consideradas convenientes.

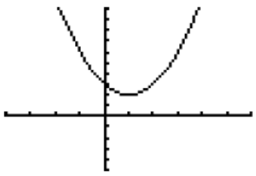
Relacionando a Função Quadrática e a Afim

Escola Secundária ___________
Ficha Pares de Matemática A
10 º Ano Abril de 2010

RELACIONANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA E A AFIM

Considere as funções quadráticas representadas pelas seguintes parábolas:

I.

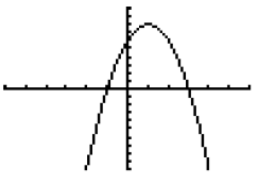


Vértice: $(1,2)$

Pontos de intersecção com o eixo Ox: não tem

Ponto de intersecção com o eixo Oy: $(0,3)$

II.

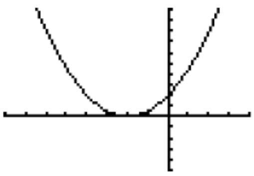


Vértice: $(1,8)$

Pontos de intersecção com o eixo Ox: $(-1,0)$ e $(3,0)$

Ponto de intersecção com o eixo Oy: $(0,6)$

III.



Vértice: $(-2,0)$

Ponto de intersecção com o eixo Ox: $(-2,0)$

Ponto de intersecção com o eixo Oy: $(0,2)$

Para cada um dos casos investigue:

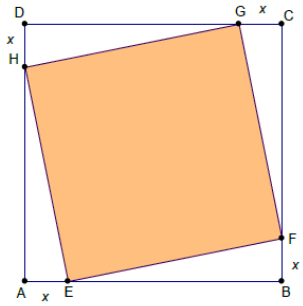
- Será possível encontrar duas funções afins cujo produto seja igual à função quadrática representada graficamente? Explique o seu raciocínio.
- A solução será única?

Prismas Partindo de Quadrados Inscritos em Quadrados

Escola Secundária ____________
Ficha Pares de Matemática A
10 º Ano **Março de 2010**

PRISMAS PARTINDO DE QUADRADOS INSCRITOS EM QUADRADOS

Dado um quadrado [ABCD] com 6 cm de lado, considere todos os quadrados [EFGH] inscritos nesse quadrado, como é sugerido na figura.



$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$$

1. Que valores pode tomar x?
2. Mostre que a área do quadrado [EFGH] é dada em função de x pela expressão $A(x) = 2x^2 - 12x + 36$.
3. A partir de cada um dos possíveis quadrados [EFGH], considere os prismas rectos de altura x e cuja base é esse quadrado.

   3.1. Mostre que a função que dá os vários volumes dos prismas é dada pela expressão $V(x) = 2x^3 - 12x^2 + 36x$.

   3.2. Calcule as dimensões do prisma quando a área da base é mínima.

   3.3. Calcule $A(0)$ e $V(0)$. Interprete geometricamente os resultados.

   3.4. Identifique o sólido que se obtém para $x = 6$ e calcule $A(6)$ e $V(6)$.

   3.5. Determine para que valores de x a área da base é 20 cm^2 e calcule o(s) volume(s) do(s) prisma(s) correspondente(s).

   3.6. Faça o estudo da variação da área da base e do volume do prisma com a variação de x.

Anexo 12

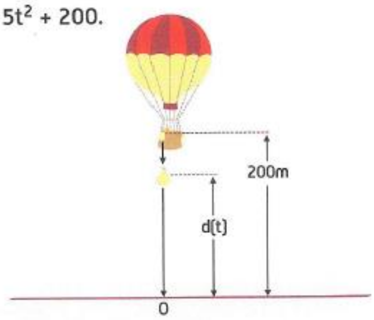
Aplicando 14 manual

+ aplicando

FUNÇÕES E GRÁFICOS | TEMA 2

14

De um balão a 200 metros acima do solo, deixa-se cair um saco de areia. Sabendo que, desprezando-se a resistência do ar, a distância d(t) do saco de areia, em queda, até ao solo, após t segundos, é dada (em metros) por $d(t) = -5t^2 + 200$.



1 A quantos metros do solo se encontra o saco, 3 segundos após ser largado?

2 Ao fim de quanto tempo o saco atinge o solo? (Apresente um valor exacto e outro aproximado à décima de segundo.)

3 Considere a função $d: [0, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto -5t^2 + 200$$

a) Construa um quadro de valores e apresente uma representação gráfica de d.

b) Indique o contradomínio, os zeros e classifique quanto à monotonia a função d.

c) Em que momento está o saco a 75 metros do chão?

Anexo 13

Investigações com a função afim

INVESTIGAÇÕES COM A FUNÇÃO AFIM

1. Todas as retas de equação $y = ax + a$, com $a \neq 0$, passam por um mesmo ponto. Investigue quais são as coordenadas desse ponto. Registe as suas observações.

Como encontrar as coordenadas do ponto recorrendo a um processo algébrico?

2. Considere a família de funções do tipo $y = mx + b$.

2.1. Escreva um elemento dessa família e compare-o graficamente com os elementos da família que se obtém somando uma mesma constante a cada um dos seus parâmetros (*m* e *b*). O que observa?

2.2. Acontecerá o mesmo se considerar outros elementos da família de funções $y = mx + b$? Elabore um pequeno relatório com o registo das representações gráficas e as conclusões a que chegou.

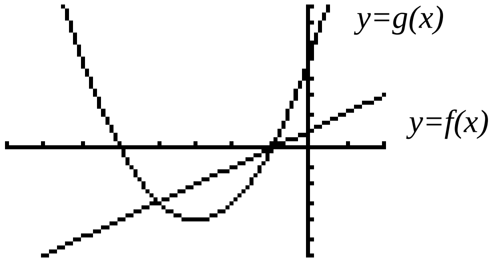
Procure encontrar uma justificação recorrendo a processos algébricos.

Anexo 14

Uma tarefa sobre transformações de funções

Uma tarefa sobre transformações de funções

Na figura encontram-se representadas as funções f e g



a) Sem efetuar cálculos determine o conjunto solução da condição $g(x-3)=0$.

b) Determine os valores de *h* e *k* de modo a que a função definida por:

b1) $g(x-h)$ seja par;

b2) $g(x-h)+k$ tenha como gráfico uma parábola com vértice no ponto $(-6,2)$.

c) Represente graficamente cada uma das funções definidas por:

c1) $|g(x)|$

c2) $|g(x)+3|$

c3) $|g(x)|+3$

c4) $-g(x)$

c5) $g(-x)$

c6) $g(|x|)$

Escreva uma expressão analítica que defina as funções *f* e *g*.

Anexo 15

Testes do 11.º Ano

Teste I

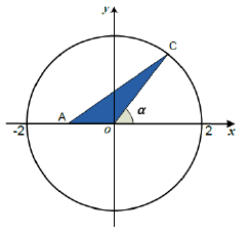
(25 outubro 2010)

ESCOLA SECUNDÁRIA __________
Teste de Avaliação de Matemática A
11º Ano 25 Out. 2010

I PARTE – ESCOLHA MÚLTIPLA

As questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão, justifique as respostas.

1. Na figura está representado:

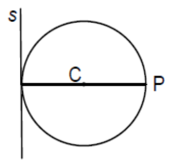


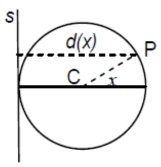
- Um círculo de centro na origem do referencial e raio 2;
- Um triângulo $[AOC]$;
- O ângulo α, de amplitude pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- O ponto C pertence à circunferência;
- O ponto A de coordenadas (-1, 0).

A área do $[AOC]$ é dada em função de α:

(A) $2\text{sen}\ \alpha \cos\ \alpha$ **(B)** $\text{sen}\ \alpha$ **(C)** $2\ \text{sen}\ \alpha$ **(D)** $4\ \text{sen}\ \alpha$

2. Considere uma circunferência de centro *C* e raio 4, tangente a uma recta ***s***. Um ponto *P* começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura.





Seja ***d(x)*** a distância de *P* a *s*, após uma rotação de amplitude ***x***.
Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo *x*?

(A) $d(x) = 4 + 4\,sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **(B)** $d(x) = 4 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(C) $d(x) = 4 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ **(D)** $d(x) = 4 - 4\,sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

3. Sendo $[ABC]$ um triângulo rectângulo em C, α é o ângulo oposto ao cateto a e β o ângulo oposto ao cateto ***b***. Então, se $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta$ será:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 2 **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ podemos concluir que a equação $2\cos^2\alpha-1=0$ é:

(A) possível e tem exactamente 3 soluções

(B) possível e tem exactamente 4 soluções

(C) possível e tem uma única solução

(D) possível e tem exactamente duas soluções

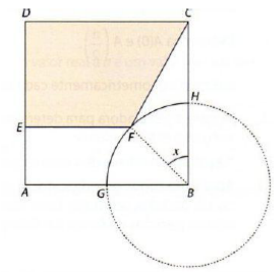
II Parte

Indique todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias.

1. Na figura está representado a sombreado um trapézio, $[CDEF]$

Tem-se:

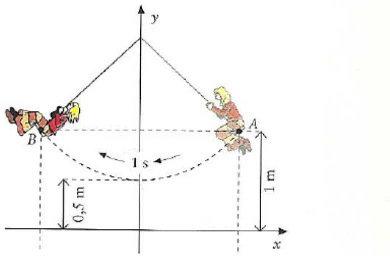
- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 4 cm;
- HG um arco de circunferência de centro B e raio 2 cm.
- o ponto ***F*** desloca-se sobre o arco HG;
- $[EF]\perp[AD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBF $\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$



1.1. Mostre que a área do trapézio $[CDEF]$ é dada em função de x, por $A(x)=2(4-senx)(2-\cos x)$.

1.2. Determine $A(0)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

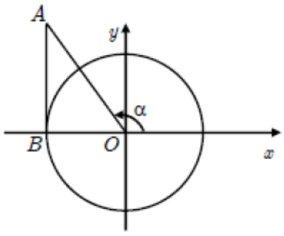
2. Na figura está representado um baloiço. A altura h, do baloiço, em metros, em função do tempo t em segundos, é dada por $h(t)=0{,}25\cos(2\pi t)+0{,}75$. O instante t=0 corresponde ao início do movimento, no ponto A.



Determine, analiticamente, os instantes durante o primeiro segundo, após o início do movimento, nos quais a altura do o baloiço é de 0,75m.

3. Considere a função definida por

$f(x) = sen(x-\pi) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - tg(\pi - x)$.



3.1. Mostre que $f(x) = tgx - sen^2 x$.

3.2. Considere o triângulo rectângulo $[ABO]$ no circulo trigonométrico em que $\overline{OA} = \sqrt{3}$.
Determine $f(\alpha)$.

4. A senhora Maria começou a andar às 10 horas e 30 minutos, altura em que o número das suas pulsações por minuto começou a subir. Depois de alguns minutos, a sra Maria parou e as suas pulsações diminuíram, tendo estas voltado a aumentar quando a sra. Maria recomeçou a andar, agora um pouco mais depressa. Considere que o número de pulsações da sra Maria foi dado, após ***t*** minutos, pela função definida por:

$p(t) = 80 + 0{,}4t + 5sen(0{,}25t)$ (a variável ***t*** está expressa em radianos)

4.1. Mostre que $p(t+8\pi) - p(t)$ é constante e calcule o seu valor arredondado às unidades.
Interprete-o no contexto do problema.

4.2. Recorrendo à calculadora gráfica, calcule durante quanto tempo a sra. Maria esteve parada pela primeira vez. Apresente o resultado em minutos e arredondado às décimas.
Apresente o (s) gráficos visualizados na calculadora e assinale os pontos relevantes para a resolução do problema e as suas abcissas arredondadas às décimas.

I Parte				II Parte						
1.	2.	3.	4.	1.1.	1. 2.	2.	3.1	3.2	4.1	4.2.
15	15	15	15	20	15	20	20	25	20	20

FIM

Teste II

(28 fevereiro 2011)

Escola Secundária _____________

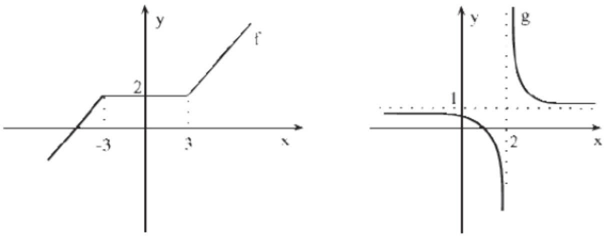
Teste de Avaliação de Matemática A

11º Ano 28 Fevereiro 2011

I Parte

As questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão, justificando a sua resposta.

1. Considere as funções f e g de domínios, respectivamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.



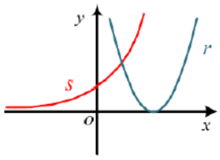
O domínio de $g \circ f$ é:

(A) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **(B)** $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

(C) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **(D)** $]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

2. Na figura estão representadas parte dos gráficos de duas funções, r e s, de domínios $\mathbb{R}$.

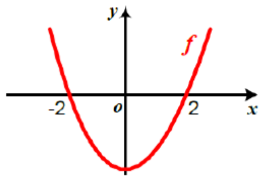
Qual das seguintes funções não admite zero?



(A) $r+s$ (B) $r-s$ (C) $r\times s$ (D) $\frac{r}{s}$

3. Considere a função quadrática f, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura, e a função g, definida por $g(x) = 2x + 4$.

As assimptotas verticais do gráfico da função $\frac{g}{f}$ são:



(A) $x = -2 \;\; e \;\; x = 2$ (B) $x = -2$

(C) $x = 2$ (D) Não existem

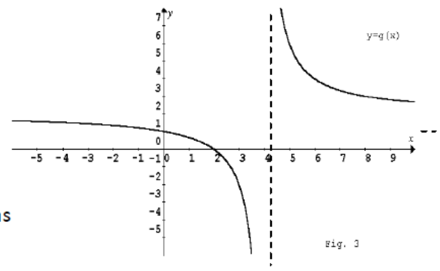
II Parte

Apresente todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias.

1. Sejam ***f*** e ***g*** duas funções tais que:

- $f(x) = -x^2 + 9$
- ***g*** é uma função racional da família $y = a + \dfrac{b}{x+c}$, com ***a***, ***b***, ***c*** $\in$ ***IR***,

representada graficamente na figura, em que 2 é o zero da função g . As rectas de equações $x = 4 \; e \quad y = 1$ são assimptotas do gráfico da função.



1.1. Calcule $(fog)\,(2) + g^{-1}(0)$.

1.2. Resolva a condição

$$\frac{g(x+1)}{-f(x)} < 0 .$$

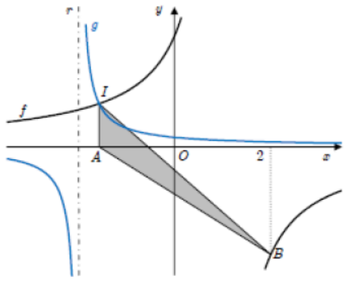
1.3. Determine uma expressão analítica da função ***g.***

1.4. Escreva uma expressão analítica da função gof.

1.5. Caracterize a função g^{-1} (inversa de ***g***).

1.6. Indique as equações das assimptotas de $v(x) = -g(x+1) - 2$.

2. No referencial da figura estão representados:



- Parte do gráfico da função f, de domínio $IR \setminus \{1\}$;
- Definida por $f(x) = \dfrac{3}{1-x} + k$, sendo k um número real;
- Parte do gráfico de g, de domínio $IR \setminus \{-2\}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{2x+4}$;
- O ponto I de intersecção entre os gráficos de *f* e de *g*;
- A recta r, assimptota do gráfico de g;
- O ponto A de abcissa igual ao ponto I e pertencente ao eixo *Ox*.
- O ponto B de abcissa 2 pertencente ao gráfico;
- O triângulo $[ABI]$

Sem utilizar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes:

Em **2.1.** e **2.2.** suponha que $f(0) = \dfrac{37}{12}$.

2.1. Escreva uma equação da assimptota horizontal do gráfico de *f*.

2.2. Escreva uma equação da recta r.

2.3. Considere agora que a abcissa do ponto A é a. Mostre que a área do triângulo $[ABI]$ é dada por $\dfrac{2-a}{4a+8}$.

3. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir. Admita que o número, em milhares, de coelhos que existem nessa região, t semanas após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por:

$$f(t) = \frac{t+5}{0{,}3t+k}$$ (*K* designa um número real positivo).

Admita que o valor de *k* é desconhecido. Sabe-se que, durante a primeira semana, após a detecção da doença, morreram cinco mil e quinhentos coelhos e que não nasceu nenhum.

Determine o valor de k, arredondado às décimas.

I Parte			II Parte									
1.	2.	3.	1.1	1.2.	1.3	1.4.	1.5.	1.6.	2.1.	2.2.	2.3.	3.
15	15	15	15	17	15	18	18	15	15	10	17	15

Fim

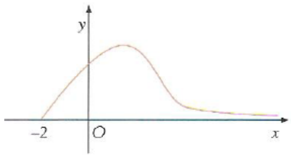
Teste III
(28 março 2011)

Escola Secundária ______________
Teste de Avaliação de Matemática A
11º Ano Turma B 28 Março 2011

I Parte

As questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão, justificando a sua resposta.

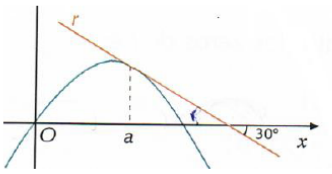
1. Considere a função f definida por $f(x)=x^2-3$ e a função g de domínio $[-2,+\infty[$ que se encontra representada graficamente na figura. O domínio de gof é:



(A) IR (B) $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

(C) $[-1, 1]$ (D) $[-2,+\infty[$

2. A recta r é tangente ao gráfico da função f que se encontra representada na figura . O valor de $f'(a)$ é:



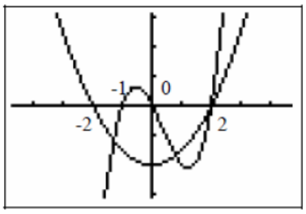
(A) $f'(a)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(B) $f'(a)=-\sqrt{3}$

(C) $f'(a)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $f'(a)=\dfrac{1}{3}$

3. Na figura estão representadas a função *f*, quadrática e a função *g*, cúbica.



O conjunto de zeros da função $\dfrac{f}{g}$ é:

(A) $\{-2\}$ (C) $\{-2{,}2\}$

(B) $\{-2,-1,0{,}2\}$ (D) $\{-2{,}-1,0\}$

4. De uma função racional *h* sabe-se que:

- o seu gráfico tem uma assimptota de equação $y = 2$ e outra de equação $x = 3$.
- tem um zero para $x = 1$

Então, acerca da função inversa h^{-1}, qual das afirmações seguintes é <u>falsa</u>?

(A) $D_{h^{-1}} = IR \setminus \{2\}$

(B) o gráfico de h^{-1} tem uma assimptota de equação $x = 2$.

(C) $D'_{h^{-1}} = IR \setminus \{3\}$

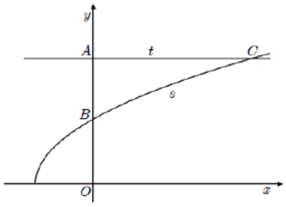
(D) $h^{-1}(0) = 0$

II Parte

Apresente todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias.

1. Na figura estão representadas partes do gráfico das funções ***s*** e ***t***, definidas respectivamente por $s(x) = \sqrt{4x+13}$ e $t(x) = 7$.

Tal como a figura sugere:



- A é o ponto de intersecção do gráfico de t com o eixo *Oy*;
- B é o ponto de intersecção do gráfico de s com o eixo *Oy*;
- C é o ponto de intersecção dos gráficos de ***s*** e de ***t***;

1.1. Calcule a área do triângulo $[ABC]$.

1.2. Determine, analiticamente, o conjunto solução da equação $s(x) = x + 2$.

2. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo do dia, o nível de poluição do ar diminuiu enquanto o purificador esteve ligado e uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar. Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l, às t horas desse dia, pode ser dado por $P(t) = 0{,}1t + \frac{1}{t+1}$, $t \in [0, 24]$.

2.1. Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta da tarde?

2.2. Determine, analiticamente, a velocidade de diminuição do nível de poluição às três horas.

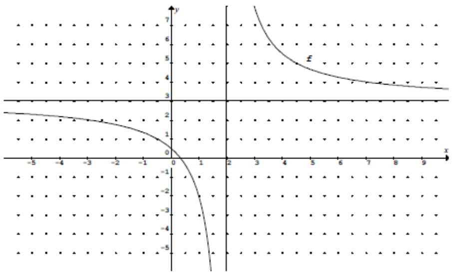
2.3. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

Quanto tempo o purificador esteve ligado? (apresente o resultado em horas e minutos arredondado às unidades).

3. Considere duas funções ***f*** e ***g***:

- ***g*** definida por $g(x) = 3x^2 - 3x + 2$;
- uma função ***f***, representada graficamente

Sabe-se que $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$



3.1. Determine o domínio da função definida por $l(x) = \sqrt{f(x-3)}$.

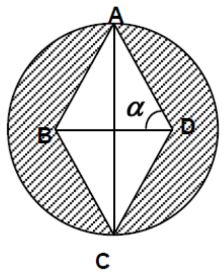
3.2. Resolva a condição $\frac{g'(x)}{f(x-2)} \leq 0$

3.3. Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função ***g*** no ponto de abcissa -2.

3.4. Determine, analiticamente, as abcissas dos pontos do gráfico da função ***f*** que verificam a condição $y - x + 3 = 0$.

4. Observe a figura, onde está representado um círculo e um losango cuja diagonal maior coincide com o diâmetro do círculo.

Sabe-se que $\overline{AC} = 10$ e $B\hat{D}A = \alpha$



Determine, em função de α, uma expressão simplificada da área da zona tracejada.

5. Indique, justificando, a posição relativa da recta definida por $\frac{x-1}{-2} = \frac{-y}{3} \wedge z = -2$ e do plano definido por $4x + 6y = 5$.

I Parte				II Parte										
1.	**2.**	**3.**	**4**	**1.1**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4.**	**4.**	**5.**
10	10	10	10	15	15	12	15	15	13	18	16	16	13	12

Fim

Teste IV
(24 maio 2011)

Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 1

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ $\quad$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ $\quad$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Seja f a função, de domínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$

Qual é o valor de $f^{-1}(3)$?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11

2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$

Para um certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

Qual é o valor de a ?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10

3. Seja f uma função real de variável real.

Sabe-se que:

- $f'(2) = 9$
- a recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2, intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada -15

Qual é o valor de $f(2)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por

$(x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 5) + k(1,\ 0,\ 0),\ \ k \in \mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta **paralela** à recta r?

(A) $y = 5 \wedge z = 6$

(B) $x = 3 \wedge y = 4$

(C) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(3, 4, 5),\ \ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(0, 1, 0),\ \ k \in \mathbb{R}$

5. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 2n \ \text{ se } \ n > 1 \end{cases}$$

Seja (w_n) a sucessão de termo geral $w_n = 5n - 13$

Qual é o valor de n para o qual se tem $w_n = u_2$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Estude, quanto à monotonia, a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{1-2n}{n+3}$

2. Determine o valor de $3-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5}$

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

3. Uma floresta foi atingida por uma praga.

Admita que a área, em **milhares** de hectares, da região afectada por essa praga é dada por

$A(t)=\frac{2t}{t^2+3}\ (t \geq 0)$

(Considere que t é medido em anos e que o instante $t=0$ corresponde ao início da praga.)

3.1. Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada.

Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada?

Na sua resposta deve:

- escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;
- resolver analiticamente essa inequação;
- apresentar o valor pedido.

3.2. **Utilize as capacidades gráficas da calculadora** para resolver o seguinte problema:

Ao fim de quanto tempo, contado a partir do início da praga, foi máximo o valor da área atingida por essa praga?

Na sua resposta deve:

- reproduzir o gráfico visualizado na calculadora;
- assinalar, no gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema e indicar as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas;
- apresentar a solução do problema em dias, arredondada às unidades (considere 1 ano = 365 dias).

4. Considere:

- a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$
- a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Utilize métodos exclusivamente analíticos na resolução dos três itens seguintes.

4.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto aos extremos relativos.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os extremos relativos, caso existam.

4.2. Sabe-se que -1 é um zero da função f

Caracterize a função $f \times g$

Na sua resposta deve:

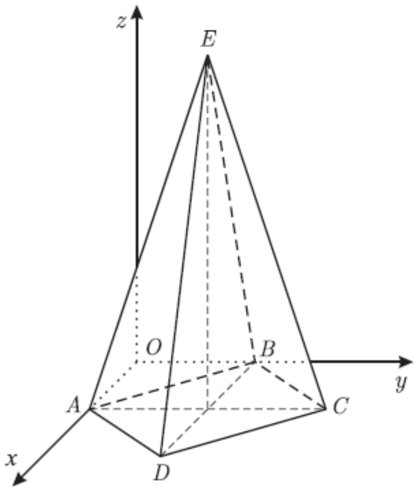
- indicar o domínio da função $f \times g$
- apresentar $(f \times g)(x)$ na forma de um polinómio do terceiro grau.

4.3. Seja P o ponto de intersecção das assimptotas do gráfico da função g

Para um certo número real k, o ponto P pertence ao gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) + k$

Determine o valor de k

5. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$ cuja base está contida no plano xOy



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(1, 0, 0)$
- o vértice B tem coordenadas $(0, 1, 0)$
- o plano DCE é perpendicular à recta definida pela condição $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = z$

Determine o volume da pirâmide.

Nota – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano DCE

FIM

Anexo 16

Fichas de trabalho 11.º Ano

Funções Racionais

ESCOLA SECUNDÁRIA ________________

Ficha de trabalho de Matemática A

11ºAno **Fevereiro 2011**

I PARTE – ESCOLHA MÚLTIPLA

As três questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão., justificando a sua opção

1. De uma função f de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que $f(-3)=0$ e f é par.
Seja $h(x)=f(x-5)$ a definição de h em $\mathbb{R}$. Qual dos seguintes pode ser o conjunto de zeros de h?

(A) $\{0,5\}$ **(B)** $\{2,8\}$ **(C)** $\{-8,-2\}$ **(D)** $\{-3,-5\}$

2. As rectas de equações $y=2$ e $x=-1$ são assímptotas do gráfico da função g.
Qual das afirmações pode ser verdadeira?

(A) $g(x)=1-\frac{5}{x-2}$ **(B)** $g(x)=-1+\frac{5}{x-2}$

(C) $g(x)=2+\frac{5}{x-1}$ **(D)** $g(x)=2-\frac{5}{x+1}$

3. As rectas de equações $x=0$ e $y=-1$ são assimptotas do gráfico de uma função h. Então pode concluir que o gráfico da função definida por $-h(x+2)+1$ admite como assimptotas as rectas de equações:

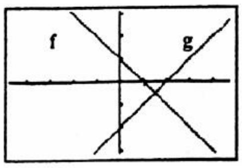
(A) $y=0$ e $x=-2$. (B) $y=1$ e $x=2$.

(C) $y=2$ e $x=-2$. (D) $y=0$ e $x=2$.

1

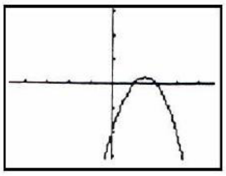
4.

Considera f e g duas funções cuja representação gráfica é a seguinte:

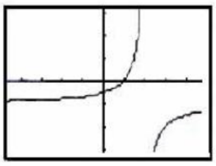


Elabora uma pequena composição, justificando qual das seguintes representações gráficas pode representar $\frac{f}{g}$.

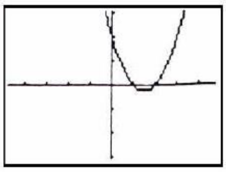
(A)



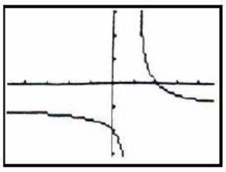
(B)



(C)



(D)



5.

Sejam f e g duas funções reais de variável real.

Sabe-se que:

- a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e tem cinco zeros;
- a função g tem domínio $\mathbb{R}$ e tem três zeros;
- um, e só um, dos zeros da função f também é zero da função g

Quantos zeros tem a função $\frac{f}{g}$?

(A) 7 **(B)** 5 **(C)** 4 **(D)** 2

6.

Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 2.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = -x + 3$$

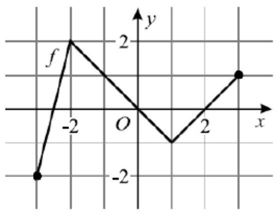


Figura 2

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

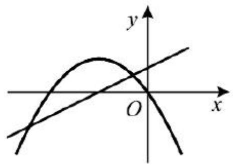
(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2

7. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função quadrática f;
- parte do gráfico de uma função afim g.

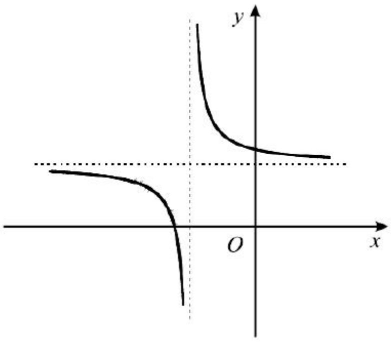


Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

(A) $]-\infty, -4[\cup [-2, 0[$ **(B)** $]-\infty, -4] \cup]-2, 0]$

(C) $]-4, -2] \cup]0, +\infty[$ **(D)** $[-4, -2[\cup [0, +\infty[$

8. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \ \wedge \ b > 0$ **(B)** $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

(C) $a < 0 \ \wedge \ b > 0$ **(D)** $a < 0 \ \wedge \ b < 0$

3

9. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

(A) $]-1,2[$ **(B)** $]1,2[$ **(C)** $]-\infty,2[$ **(D)** $]2,+\infty[$

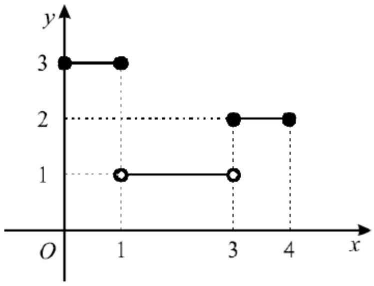
10. Considere as seguintes funções:

$f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ definida pela tabela

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x+1$

$h:[0,4] \to \{1,2,3\}$ cujo gráfico é



Indique o valor de $f^{-1}(2) + (g \circ h)(\sqrt{2})$

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

II PARTE

Apresente todos os cálculos que efectuar e as justificações julgadas necessárias

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o conjunto dos números reais x tais que

$$f(x) \leq -1$$

Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

1.2. O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

1.3. Determine o conjunto solução de $f(x) \leq 5$.

4

1.4. Determine o centro e os eixos de simetria de *f*.

..1.5 Caracterize a função inversa de *f*.

1.6. Determine as assimptotas do gráfico da função definida por $-f(x)+3$.

1.7. Determine h e k de modo que $y=f(x-h)+k$ seja uma função ímpar.

1.8. Determine m e p de modo que $y=f(x+m)-p$ tenha como centro de simetria o ponto C de coordenadas $(-1,2)$.

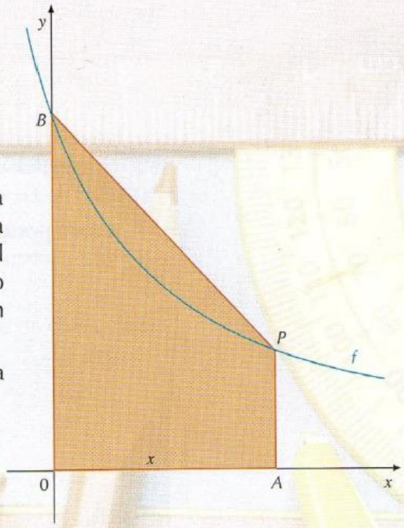
1.9. Sendo $g(x)=-2x+1$ caracterize a função $f\circ g$.

Trapézio

Considera a função *f*, definida por:

$$f(x)=\frac{3}{x+1}.$$

Na figura está parte da representação gráfica da função *f* num referencial o.m., em que a unidade é o centímetro e, ainda, um trapézio [*OAPB*].



O vértice *P* do trapézio pertence ao gráfico da função *f* e tem abcissa x não negativa.

1. Determina as coordenadas do vértice *B* do trapézio [*OAPB*].

2. Considera a função *g*, que à abcissa do ponto *P*, faz corresponder a área do trapézio [*OAPB*].

2.1. Mostra que $g(x)=\dfrac{3x^2+6x}{2x+2}$.

2.2. Sem recorrer à calculadora, resolve as seguintes questões.

2.2.1. Determina as coordenadas do ponto *P* no caso de a área do trapézio ser 7,2 cm^2.

2.2.2. Para que valores de x a área do trapézio não é inferior a 4 cm^2?

5

Anexo 17

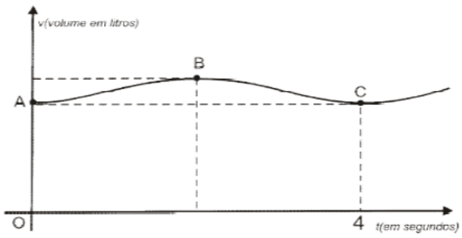
Fichas Pares 11.º Ano

Funções Trigonométricas

ESCOLA SECUNDÁRIA _________________
FICHA DE PARES DE MATEMÁTICA A
11º ANO OUT 2010

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. Sabe-se que em média, uma pessoa em repouso em cada 4 segundos inspira e expira 0,5 litros de ar. No fim de uma expiração restam nos pulmões, como reserva, 2, 25 litros de ar. O volume de ar nos pulmões, t segundos após uma expiração, é dado pelo seguinte modelo matemático: $v(t)=2,5-0,25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, que corresponde à representação gráfica seguinte:



Determine as coordenadas dos pontos A, B e C.
R: A(0; 2,25); B(2; 2,75) e C(4, 2, 25)

2. A altura da maré numa marina desde as zero horas da manhã de um certo dia pode ser dada aproximadamente, em metros, por:
$$h(t)=10-3\cos(0,26t);\ t\in[0,24[\text{, expresso em horas.}$$

   2.1. Determine a altura máxima e mínima atingida pela maré.
   R: h_{min}=7 m; $h_{máx}$=13 m

   2.2. Determine as horas do dia em que a altura da maré atingiu 12 metros.
   R: 8h 51 min e 15h 19 min

3. No ano 2000, em Lisboa, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr-do-sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por:
$$f(n)=12,2+2,64\,\text{sen}\frac{\pi(n-81)}{183},\ n\in\{1,2,3,\ldots,366\}$$
(o argumento da função está expresso em radianos).
Por exemplo: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr-do-sol foi de $f(34)\simeq 10,3$ horas. (Mês de Fevereiro com 29 dias).

   3.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr-do-sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
   R: 18h 50 min

   3.2. Sem recorrer à calculadora, determine em quantos dias do ano é que o tempo que decorre entre o nascer e o pôr-do-sol é de 12,2 horas.
   R: 2 dias

Explosão numa Fábrica de Produtos Químicos

Escola Secundária ________________
Ficha Pares de Matemática A
11 º Ano Fevereiro de 2011

EXPLOSÃO NUMA FÁBRICA DE PRODUTOS QUÍMICOS

1. Às 13 horas do passado dia 10 de Janeiro, houve uma explosão numa fábrica de produtos químicos. Em consequência dessa explosão, ocorreu a contaminação do ar. Admita que, passadas t horas da explosão, a área em km^2 da parte terrestre correspondente à zona contaminada é dada por:

$$A(t) = \frac{14t}{t+3}, \quad t \geq 0.$$

1.1. Qual era a área terrestre da zona contaminada às 15 horas do dia da explosão?

1.2. O que representa a condição $A(t) \leq 9$, no contexto da situação apresentada? Determine o seu conjunto solução.

1.3. Qual a menor área, em km^2, que a parte terrestre contaminada nunca ultrapassará?

1.4. Admita que a região terrestre contaminada é circular, com centro no local da explosão. A Inês vive a 2 km de distância do local da explosão. Abandonou a casa no dia 11 de Janeiro, às 12 horas. Investigue se a Inês abandonou a casa antes ou depois de o ar estar contaminado. Caso o tenha feito antes, determine a antecedência com que o fez. Apresente o resultado em horas e minutos arredondados às unidades.

Funções Racionais e Irracionais

ESCOLA SECUNDÁRIA ____________
FICHA DE PARES DE MATEMÁTICA A
11º ANO MARÇO 2011

Funções Racionais e Irracionais

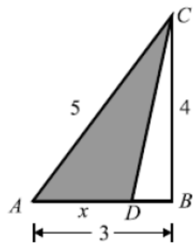
1. Considere:

- A função *f* de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=3+\frac{6}{x}$;
- A função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-3$.

1.1. Determine o conjunto dos números reais que são solução da inequação $f(x)\leq 5$. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

1.2. A equação $f(x)=g(x)$ tem exactamente duas soluções, sendo uma delas positiva e a outra negativa. Determine essas soluções utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora. Apresente as soluções arredondadas às centésimas. Apresente o(s) gráfico(s) visualizados na calculadora e assinale os pontos relevantes para a resolução do problema.

2. Na figura, está representado um triângulo [*ABC*] cujos lados medem 3, 4 e 5. Considere que um ponto *D* se desloca ao longo do cateto [*AB*], nunca coincidindo com o ponto *A*. Para cada posição do ponto *D*, seja *x* o comprimento do segmento de recta [*AD*].



2.1. Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo [*ACD*], em função de *x*?

(A) $x+4+\sqrt{25-x^2}$ **(B)** $x+5+\sqrt{25-x^2}$

(C) $x+4+\sqrt{x^2-6x+25}$ **(D)** $x+5+\sqrt{x^2-6x+25}$

2.2. Existe um valor de *x* para o qual o perímetro do triângulo [*ACD*] é igual a 11 unidades. Determine esse valor.

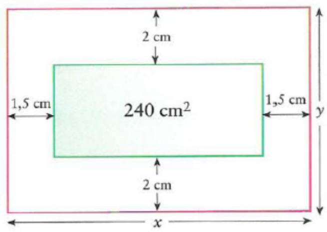
Derivadas

ESCOLA SECUNDÁRIA ________________
FICHA DE PARES DE MATEMÁTICA A
11º ANO ABRIL 2011

DERIVADAS

1. Um livro vai ser impresso em páginas rectangulares. A zona de impressão, de área 240 cm^2, ocupa a parte central do papel. São deixadas margens como mostra a figura.

Seja x o comprimento da folha e y a largura.

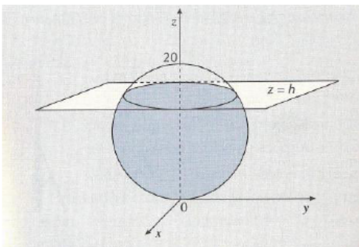


1.1. Mostre que a área total da página, em função de x, é dada por $A(x)=\dfrac{228x+4x^2}{x-3}$.

1.2. Indique o domínio da função definida na alínea anterior e determine um valor aproximado às décimas para as dimensões da página de modo a gastar o mínimo de papel.

2. No referencial o. m. $Oxyz$ da figura, em que a unidade é o centímetro, está representada uma esfera com 10 cm de raio. Considere um corte produzido na esfera por um plano do tipo $z=h$, com $h\in[0,20]$.

Para cada valor de h, o volume da parte da esfera situada abaixo do plano de corte é dado pela expressão: $V(h)=10\pi h^2-\dfrac{\pi h^3}{3}$.



2.1. Qual a equação do plano de corte para que o volume da parte da esfera abaixo desse plano seja de 864π cm^3?

2.2. Seja $V'(h)$ a taxa de variação de V quando o plano de corte é $z=h$.

2.2.1. Calcule $V'(1)$ e $V'(2)$. Atendendo ao contexto do problema e à representação gráfica de V, como explica que $V'(2)>V'(1)$?

2.2.2. Determine a equação do plano de corte que corresponde à maior taxa de variação instantânea da função V.

Anexo 18

Problema (funções racionais)

Problema (funções racionais)

Uma fábrica de sumos produz o sumo, que se chama assim *laranás*, mistura de laranja com ananás. Uma máquina misturadora trabalha com 20 litros de sumo de ananás (quantidade fixa), e uma quantidade variável de sumo de laranja, dependendo da concentração pretendida. Sabe-se ainda que, cada litro de sumo de laranja custa dois euros, e cada litro de sumo de ananás, seis euros e cinquenta.

a) Determine o custo de cada litro de *laranás*, se na mistura forem utilizados 50 litros de sumo de laranja.

b) Designe por x o número de litros de sumo de laranja que é utilizado na mistura. Mostre que o preço P, por litro, do sumo, em euros, é dado em função de x, pela expressão: $P(x)=\dfrac{2x+130}{x+20}$.

c) Recorrendo à calculadora gráfica investigue o número de litro de sumo de laranja necessários para que cada litro de *laranás* custe 4, 25 euros.

Anexo 19

Guiões da primeira e última entrevistas

Guião
(1.ª entrevista)

- Como tem sido a sua relação com a matemática?
- Qual a importância que atribui à matemática?
- Qual foi o tema onde teve mais dificuldades nos anos anteriores?
- Quais são as principais dificuldades que tem sentido este ano?
- Já tem calculadora gráfica?
- Já utilizou a calculadora gráfica? Qual foi o tipo de utilização e em que circunstâncias?

Guião
(8.ª entrevista)

- Como tem sido a sua relação com a calculadora gráfica?
- Costuma usar a calculadora gráfica com frequência?
- O recurso à calculadora gráfica é feito, usualmente, no início, no meio ou no fim da uma tarefa?
- Em que tipo de tarefas é que costuma recorrer à calculadora gráfica?
- Considera que a calculadora gráfica o ajudou a compreender melhor as funções? Em que aspetos?
- Como tem sido a sua relação com a matemática ao longo destes dois anos do ensino secundário?

Anexo 20

Guião de observação de aulas

Guião de Observação de Aulas[23]	
Data: Hora: Sala:	
Estrutura e sequência da aula	Tema Início Desenvolvimento Conclusão
Ambiente	Tipo de orquestração instrumental – Configuração didática – Modos de exploração Grau de envolvimento dos alunos
Interações a propósito da calculadora gráfica (entre alunos e entre alunos e professora)	Dificuldades na utilização da calculadora Confronto de resultados Institucionalização de normas de utilização
Atividades em aula	Origem e iniciativa (professor, alunos) Suporte (oral, escrito) Estilo de trabalho (individual, grupo, coletivo) Duração Natureza (exposição, prática/consolidação, exploração/investigação, resolução de problemas, modelação/aplicações, discussão) Conteúdo (carácter problemático, contextualização, ligação com a realidade, utilização de material, utilização da calculadora ou outras tecnologias) Incidência principal (cálculo, demonstração, conjeturas, procura de regularidades, generalização, conversão de representações)

[23] Ideia de Guimarães (2003)

Anexo 21

Autorizações e comunicações

Exmo. Sr. Diretor da Escola _______________

Eu, Maria Madalena Correia Consciência, professora do grupo 500, venho por este meio solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o Projeto de Investigação em Educação intitulado "A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário". Este projeto integra-se no âmbito do Doutoramento em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica, ferramenta de uso obrigatório no programa de Matemática A, e qual o seu papel na aprendizagem das funções.

A concretização deste projeto implicará a recolha de dados em dois anos letivos consecutivos, acompanhando os alunos do 10.º ao 11.º ano, ocorrendo em momentos em que o tema das funções esteja a ser lecionado (2.º período). Solicito que a recolha de dados seja feita na turma ___ do 10.º ano, no ano letivo 2009/2010, prolongando-se ao ano letivo 2010/2011, uma vez que, a professora que leciona a turma se mostrou disponível para ajudar a viabilizar este projeto. Convém referir que, deste trabalho, não resultará qualquer prejuízo para os alunos, não havendo lugar a qualquer alteração relativamente aos conteúdos programáticos nem às indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática A em vigor, sendo a professora da turma, em conjunto com o seu subgrupo disciplinar, responsável pela planificação e lecionação do tema.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: i) observação participante; ii) trabalhos produzidos dentro da sala de aula pelos alunos; e iii) entrevistas aos alunos que constituirão os estudos de caso. A recolha de dados envolverá o registo áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os Encarregados de Educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto de investigação.

_______________________, 5 de Novembro de 2009

Pede deferimento

____

(Madalena Consciência)

Exmo. Sr. Coordenador do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais da Escola

____

Eu, Maria Madalena Correia Consciência, professora do grupo 500, venho por este meio comunicar a minha intenção de concretizar, na turma ___, do 10.º ano desta escola, o Projeto de Investigação em Educação intitulado "A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário". Este projeto integra-se no âmbito do Doutoramento em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica, ferramenta de uso obrigatório no programa de Matemática A, e qual o seu papel na aprendizagem das funções.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: i) observação participante; ii) trabalhos produzidos dentro da sala de aula pelos alunos; e iii) entrevistas aos alunos que constituirão os estudos de caso. A recolha de dados envolverá o registo áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Informo, ainda, que foi solicitada autorização à Direção da Escola, a qual foi concedida, e que brevemente irei solicitar autorização aos Encarregados de Educação, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto de investigação, sendo salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Com os melhores cumprimentos,

_____________________, 10 de Novembro de 2009

A Investigadora

____

(Madalena Consciência)

Exmo. Representante da Área Disciplinar de Matemática da Escola ______________________

Eu, Maria Madalena Correia Consciência, professora do grupo 500, venho por este meio comunicar a minha intenção de concretizar, na turma ___, do 10.º ano desta escola, o Projeto de Investigação em Educação intitulado "A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário". Este projeto integra-se no âmbito do Doutoramento em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica, ferramenta de uso obrigatório no programa de Matemática A, e qual o seu papel na aprendizagem das funções.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: i) observação participante; ii) trabalhos produzidos dentro da sala de aula pelos alunos; e iii) entrevistas aos alunos que constituirão os estudos de caso. A recolha de dados envolverá o registo áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Informo, ainda, que foi solicitada autorização à Direção da Escola, a qual foi concedida, e que brevemente irei solicitar autorização aos Encarregados de Educação, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto de investigação, sendo salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Com os melhores cumprimentos,

_____________________, 10 de Novembro de 2009

A Investigadora

____

(Madalena Consciência)

Exma. Sra. Diretora da Turma ___, do 10.º ano
da Escola___________________________

Eu, Maria Madalena Correia Consciência, professora do grupo 500, venho por este meio comunicar a minha intenção de concretizar, na turma ___, do 10.º ano desta escola, o Projeto de Investigação em Educação intitulado "A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário". Este projeto integra-se no âmbito do Doutoramento em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver e tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica, ferramenta de uso obrigatório no programa de Matemática A, e qual o seu papel na aprendizagem das funções.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: i) observação participante; ii) trabalhos produzidos dentro da sala de aula pelos alunos; e iii) entrevistas aos alunos que constituirão os estudos de caso. A recolha de dados envolverá o registo áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Informo ainda que foi solicitada autorização à Direção da Escola, a qual foi concedida, e que irei solicitar autorização aos Encarregados de Educação dos alunos, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto de investigação, sendo salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Antecipadamente grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

_____________________, 10 de Novembro de 2009

A Investigadora

____

(Madalena Consciência)

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Maria Madalena Correia Consciência, professora do Quadro de Nomeação Definitiva da Escola Secundária Dr. Ginestal Machado, venho por este meio solicitar autorização para a participação do seu educando no Projeto de Investigação em Educação intitulado "A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário".

Este projeto integra-se no âmbito do Doutoramento em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam da calculadora gráfica, ferramenta de uso obrigatório no programa de Matemática A, e qual o seu papel na aprendizagem das funções. A professora da disciplina de Matemática, Dr.ª ____________________, mostrou a sua total disponibilidade para ajudar a viabilizar este projeto.

A concretização do projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, usando meios áudio e vídeo, em dois anos letivos consecutivos, acompanhando os alunos do 10.º ao 11.º ano e ocorrerá em momentos em que o tema das funções esteja a ser lecionado (2.º período). De modo a obter informação mais detalhada está ainda prevista a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de entrevistas a alguns alunos, sendo os Encarregados de Educação dos mesmos posteriormente contactados.

Mais declaro que as imagens e o som daí resultantes não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico, sendo sempre preservado o anonimato, quer dos alunos e da professora, quer da escola.

Convém referir que, deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, não havendo lugar a qualquer alteração relativamente aos conteúdos programáticos, nem às indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática A em vigor, nem este terá quaisquer repercussões na avaliação dos alunos. Considero que, pelo contrário, a participação dos alunos no estudo, poderá revelar-se uma mais-valia para a sua aprendizagem, pois terão oportunidade para refletir acerca da sua atividade matemática.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais e com os melhores cumprimentos,

______________________, 30 de Novembro de 2009

A Investigadora

____

(Madalena Consciência)

Autorização

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, n.º _____, da turma _____, do 10.º ano da Escola ______________________________, declaro que tomei conhecimento dos objetivos do Projeto de Investigação intitulado "A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário" e da necessidade de alguns momentos da recolha de dados serem áudio e vídeo gravados; e ______________________________ (autorizo/não autorizo) a participação do meu educando no estudo, salvaguardado o respetivo anonimato.

______/______/________(data)

O(a) Encarregado(a) de Educação

____